Казанский федеральный университет

Е.А.Широкова

МАТЕМАТИКА-1

Курс лекций для направления «Химия»,
1 семестр

Казань
2018

Матрицы

Числовой матрицей размера $m \times n$ называют таблицу из m строк и n столбцов, состоящую из чисел и имеющую вид

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ \ldots\ a_{mn} \end{pmatrix} = \left[a_{ij} \right]_{i=1,\, j=1}^{m,\ n}.$$

В случае $m = n$ матрица называется квадратной. Диагональ этого квадрата, соединяющая левый верхний и правый нижний углы, называется **главной**.

Частным случаем матрицы можно считать n-мерный вектор, заданный своими координатами. Его можно рассматривать либо как матрицу-строку размером $1 \times n$, либо как матрицу-столбец размером $n \times 1$.

Например, таблицу, представляющую удельные веса, коэффициенты теплопроводности и удельные теплоемкости пяти различных металлов, можно считать матрицей размером 5×3, если названия металлов располагаются одно под другим слева от таблицы.

Матрицы имеют приложения в экономике при построении математической модели межотраслевого баланса производства и распределения продукции. В частности, в этой модели строится квадратная таблица учета продукции, производимой и потребляемой различными отраслями. Для этого составляют квадратную таблицу, размер которой определяется количеством отраслей (n):

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{X}_1 & \\ \mathrm{X}_2 & \\ \ldots & \\ \mathrm{X}_\mathrm{n} & \end{array} \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ \ldots\ x_{1n} \\ x_{21}\ x_{22}\ x_{23}\ \ldots\ x_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n1}\ x_{n2}\ x_{n3}\ \ldots\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}_1\ \mathrm{X}_2\ \mathrm{X}_3\ \ldots\ \mathrm{X}_\mathrm{n}$$

. Каждая отрасль (X_k) не только производит какую-то продукцию, но и потребляет продукцию. Например, легкая промышленность потребляет энергию (энергетика), станки (машиностроение), а также частично потребляет свою же собственную продукцию –изделия легкой промышленности. Машиностроение потребляет энергию (энергетика), продукцию легкой промышленности и частично свою собственную продукцию, так как, например, швейные машинки, необходимые легкой промышленности, изготавливаются машиностроением с помощью станков, произведенных машиностроением для машиностроения. …

Квадратная матрица учета продукции состоит из элементов x_{ij}, $i, j = 1,...,\mathrm{n},$, представляющих стоимость части продукции, произведенной в i-й отрасли для нужд j-й отрасли.

Действия над матрицами.

1. Для матриц можно определить умножение на число. Для этого на данное число умножаются все элементы матрицы.

$$k \cdot M = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} \; k \cdot a_{12} \; k \cdot a_{13} \ldots k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} \; k \cdot a_{22} \; k \cdot a_{23} \ldots k \cdot a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k \cdot a_{m1} \; k \cdot a_{m2} \; k \cdot a_{m3} \ldots k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Для матриц одного размера определяется операция сложения: новая матрица имеет элементами суммы соответствующих элементов исходных матриц.

$$M^1 + M^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^1 + a_{11}^2 \; a_{12}^1 + a_{12}^2 \; a_{13}^1 + a_{13}^2 \ldots a_{1n}^1 + a_{1n}^2 \\ a_{21}^1 + a_{21}^2 \; a_{22}^1 + a_{22}^2 \; a_{23}^1 + a_{23}^2 \ldots a_{2n}^1 + a_{2n}^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}^1 + a_{m1}^2 \; a_{m2}^1 + a_{m2}^2 \; a_{m3}^1 + a_{m3}^2 \ldots a_{mn}^1 + a_{mn}^2 \end{pmatrix}.$$

В частности, при сложении любой матрицы M с **нулевой матрицей** того же размера – элементами которой являются только нули – результатом будет снова матрица M .

Заметим, что операция сложения коммутативна: при перемене мест слагаемых матриц сумма не меняется.

3. Для того чтобы умножить одну матрицу на другую, необходимо соответствие размеров матриц: количество **столбцов первой матрицы должно совпадать с количеством строк второй матрицы**. Пусть матрица A размера $m \times n$ с элементами a_{ij}, $i = 1,...,m,$ $j = 1,...,n,$ умножена на матрицу B размера $n \times l$ с элементами b_{jk}, $j = 1,...,n,$ $k = 1,...,l.$ Результатом умножения является матрица C размера $m \times l$, элементы которой получаются следующим образом:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk},\; i = 1,..,m,\; k = 1,...,l.$$

Заметим, что умножение матриц некоммутативно, то есть, в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$ даже когда A и B – квадратные матрицы одного размера.

Продемонстрируем это на примере с помощью пакета MAXIMA. Введем две матрицы: запишем **A:matrix([1,2],[0,3]);B:matrix([3,1],[-1,0]);** и нажмем Shift+Enter. Компьютер запомнит эти матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Теперь найдем произведения: запишем **A.B;B.A;** и нажмем Shift+Enter. Мы получим два разных результата: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Заметим, что в случае умножения матрицы M на квадратную матрицу соответствующего размера вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, называемую **единичной матрицей** (на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы – нули), результатом будет опять матрица *M.*

4. Транспонирование матрицы. Если $M = \left[a_{ij}\right]_{i=1,\, j=1}^{m,\ n}$, то транспонированной к этой матрице является матрица $M^T = \left[a_{ji}\right]_{j=1, i=1}^{n,\ m}$. Таким образом, для транспонирования следует сделать строки столбцами, а столбцы строками. В случае, когда матрица квадратная, получение транспонированной матрицы означает симметричное отражение элементов исходной матрицы относительно диагонали, соединяющей левый верхний и правый нижний элементы матрицы (главной диагонали).

Транспонирование матрицы M в пакете MAXIMA производится по команде **transpose(M).**

Определители

Каждой **квадратной** матрице можно поставить в соответствие число, называемое определителем матрицы и обозначаемое

$$\Delta = \det M = \det\left[a_{ij}\right]_{i=1,\, j=1}^{n,\ n} = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \dots a_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

В определителе различают **главную диагональ** (слева направо, сверху вниз) и побочную диагональ (слева направо, снизу вверх).

Определитель вычисляется методом разложения по ряду (строке или столбцу) путем сведения определителя n-го порядка к линейной комбинации

n определителей $(n-1)$-го порядка. Каждый новый определитель также сводится к вычислению определителей меньшего – уже $(n-2)$-го – порядка…. И так последовательно вычисление определителя любого порядка сведется к вычислению определителей 2-го порядка.

Вычисление определителя 2-го порядка: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$, то есть от произведения чисел на главной диагонали вычитается произведение чисел на побочной диагонали.

Для вычисления определителя высокого порядка следует ввести понятие **минора.** Минором M_{ij}, соответствующим элементу a_{ij} называют определитель, полученный из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Теперь в соответствии с правилом вычисления определителя

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot M_{ij} \cdot (-1)^{i+j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot M_{ij} (-1)^{i+j},$$

где первое выражение – разложение заданного определителя по i-й строке, а второе – по j-му столбцу. Способ выбора строки или столбца произволен, однако при устном вычислении проще выбирать тот ряд, где большее число нулевых элементов. Заметим, что если представить определитель в виде суммы произведений из n элементов, то в каждое произведение будут входить по одному представителю каждой строки и каждого столбца.

В частности, вычисление определителя 3-го порядка сводится к сумме шести произведений по три элемента, лежащих на разных строках и столбцах. Произведения берутся со знаком +, если эти три элемента лежат на главной диагонали или являются вершинами треугольника с основанием, параллельным главной диагонали. Произведения берутся со знаком -, если три элемента лежат на побочной диагонали или являются вершинами треугольника с основанием, параллельным побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & . & . \\ . & a_{22} & . \\ . & . & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} . & a_{12} & . \\ . & . & a_{23} \\ a_{31} & . & . \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} . & . & a_{13} \\ a_{21} & . & . \\ . & a_{32} & . \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} . & . & a_{13} \\ . & a_{22} & . \\ a_{31} & . & . \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} . & a_{12} & . \\ a_{21} & . & . \\ . & . & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & . & . \\ . & . & a_{23} \\ . & a_{32} & . \end{vmatrix},$$

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}.$$

Можно вычислять определитель третьего порядка также следующим способом: присоединим к исходной матрице снизу две ее первых строки и пройдем по направлениям главной диагонали, перемножая стоящие на соответствующих прямых три элемента и складывая со знаком +, затем пройдем по направлениям побочной диагонали, перемножая стоящие на соответствующих прямых три элемента и складывая со знаком – .

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Правила вычисления определителей основаны на следующих их свойствах**.**

1. **Из строки или столбца можно выносить общий множитель за знак определителя**: $\begin{vmatrix} a_{11}..\alpha\cdot a_{1k}..\,a_{1n} \\ a_{21}..\,\alpha\cdot a_{2k}..\,a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}..\,\alpha\cdot a_{nk}..\,a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha\cdot\begin{vmatrix} a_{11}..a_{1k}..\,a_{1n} \\ a_{21}..\,a_{2k}..\,a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}..\,a_{nk}..\,a_{nn} \end{vmatrix}$.

Доказательство следует из того, что по одному элементу каждой строки (столбца) есть в каждом слагаемом представления определителя в виде суммы.

2. **Если каждый элемент строки (столбца) представим в виде суммы, то такой определитель равен сумме двух определителей, у которых в этой строке (столбце) стоят соответствующие слагаемые**:

$$\begin{vmatrix} a_{11}..\tilde{a}_{1k}+\breve{a}_{1k}..\,a_{1n} \\ a_{21}..\,\tilde{a}_{2k}+\breve{a}_{2k}..\,a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}..\,\tilde{a}_{nk}+\breve{a}_{nk}..\,a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}..\tilde{a}_{1k}..\,a_{1n} \\ a_{21}..\,\tilde{a}_{2k}..\,a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}..\,\tilde{a}_{nk}..\,a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}..\breve{a}_{1k}..\,a_{1n} \\ a_{21}..\,\breve{a}_{2k}..\,a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}..\,\breve{a}_{nk}..\,a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство из тех же соображений, что и доказательство предыдущего свойства.

3. **При перестановке двух строк или двух столбцов знак определителя меняется на противоположный**:

$$\begin{vmatrix} a_{11}..a_{1k}\cdots a_{1l}\ ..\ a_{1n} \\ a_{21}..\ a_{2k}\cdots a_{2l}\ ..\ a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}..\ a_{nk}\cdots a_{nl}\ ..\ a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11}..a_{1l}\cdots a_{1k}\ ..\ a_{1n} \\ a_{21}..\ a_{2l}\cdots a_{2k}\ ..\ a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}..\ a_{nl}\cdots a_{nk}\ ..\ a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказать это свойство можно по индукции, последовательно увеличивая порядок определителя. Для определителя 2-го порядка свойство легко проверяется. Теперь докажем для определителя 3-го порядка: переставим в определителе 3-го порядка две строки и разложим определитель по строке, оставшейся на месте. Во всех минорах второго порядка, вошедших в разложение, поменяется знак из-за перестановки строк этих миноров, следовательно, поменяется знак у всего определителя третьего порядка. Для определителей высших порядков доказательство аналогично: нужно раскладывать определитель по строке (столбцу), оставшимся на месте.

4. **Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю**. Доказательство получается перестановкой одинаковых строк (столбцов). С одной стороны, должен поменяться знак, с другой стороны, новый определитель не отличается от исходного. Это возможно только, когда определитель равен нулю.

5. **Определитель с двумя строками (столбцами), отличающимися коэффициентом, равен нулю**. Доказательство следует из 1-го и 4-го свойств.

6. **Если к строке (столбцу) определителя прибавить строку (столбец), умноженную (умноженный) на произвольное число, значение определителя не изменится**. Доказательство следует из свойств 2-го и 5-го.

Данное свойство 6 используется для приведения определителя к **треугольному виду**, когда под главной диагональю стоят нули, удобному для вычисления).

7. Если заменить в определителе строки на столбцы, а столбцы на строки (этот процесс называется **транспонированием** и представляет зеркальное отражение определителя относительно главной диагонали), определитель не изменится.

Применим для вычисления определителя $\begin{vmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ **метод приведения к треугольному** виду. Умножим последний столбец на (-1) и прибавим к первому столбцу. Получим определитель $\begin{vmatrix} -2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -7 & -3 & 2 \end{vmatrix}$. Уничтожим элемент в левом нижнем углу, умножив верхнюю строку на $(-\frac{7}{2})$ и прибавим к последней строке. Мы получим определитель $\begin{vmatrix} -2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{43}{2} & -12 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -7 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 43 & -24 \end{vmatrix}$. Остается уничтожить элемент 43 в нижней строке последнего определителя, не «испортив» имеющихся нулей. Для этого умножим последний столбец на $\frac{43}{24}$ и прибавим ко второму столбцу. Мы получим определитель $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & \frac{1}{6} & 4 \\ 0 & \frac{115}{24} & 1 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix}$. Вычисление последнего определителя сводится к перемножению элементов главной диагонали. Ответ: 115.

Современные компьютерные средства позволяют мгновенно осуществлять различные действия с матрицей. Например, пакет программ MAXIMA дает возможность вводить матрицу, а затем вычислять ее определитель.
Так команда **M:matrix([1,2,3],[-1,0,-2],[0,-1,3]);** вводит матрицу размера 3×3, а затем команда **determinant(M);** вычисляет определитель этой матрицы (7).

Построение обратной матрицы

Матрицей, обратной к квадратной матрице A называется матрица A^{-1}, такая что $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$, где I – единичная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы – нули.

Для построения обратной матрицы нужно
1) заменить каждый элемент исходной матрицы a_{ij} числом $M_{ij}\cdot(-1)^{i+j}$, где M_{ij} – минор, соответствующий элементу a_{ij},

2) транспонировать полученную на этапе 1) матрицу,

3) умножить полученную на этапе 2) матрицу на $\frac{1}{\Delta}$, где Δ – определитель исходной матрицы.

Для построения обратной матрицы с помощью пакета программ MAXIMA необходимо использовать команду **invert:** для матрицы, введенной по команде **M:matrix([1,2,3],[-1,0,-2],[0,-1,3]);** находим обратную по команде **invert(M).**

Системы линейных уравнений

В данном разделе нас будут интересовать возможность решения систем линейных уравнений, то есть, систем вида

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i – известные числа, а x_j – неизвестные, которые нужно найти, решив систему, $i = 1,\ldots,m,\ \ j = 1,\ldots,n$.

Система линейных уравнений с использованием правила умножения матриц может быть записана в виде: $A\cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ \ldots\ a_{mn} \end{pmatrix}$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если число переменных системы (n) больше числа уравнений (m), система оказывается недоопределенной, и если имеет решения, то их бесконечное множество. В случае, когда $m > n$, система оказывается переопределенной и может не иметь решений. При любом соотношении между числом неизвестных и уравнений системы для решения или исследования системы линейных уравнений можно применять следующий метод.

Метод Гаусса

Основан данный метод на том, что при замене одного выбранного уравнения системы новым уравнением, полученным прибавлением к обеим частям данного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженным на одно и то же число, получившаяся система будет эквивалентна данной, то есть обе системы будут иметь одно и то же решение или одновременно будут неразрешимыми.

Суть метода в том, что последовательно исключаются неизвестные из уравнений системы. Рассмотрим исходную систему. Предположим, что мы хотим исключить переменное x_1 из всех уравнений, кроме одного – первого из уравнений системы. В таком случае в качестве первого уравнения в системе мы должны выбрать то, где коэффициент при x_1 отличен от нуля. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Изменим второе уравнение системы, прибавив к обеим его частям обе части первого уравнения, умноженные на число $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$. В новом втором уравнении уже не будет члена с x_1. Теперь изменим третье уравнение системы, прибавив к обеим его частям обе части первого уравнения, умноженные на число $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$. В новом третьем уравнении также не будет члена с x_1…. Проделав эту операцию со всеми уравнениями системы, мы получим новую систему, эквивалентную данной и содержащую x_1 только в первом уравнении. Теперь исключим неизвестное x_2 из всех уравнений, кроме первого и второго. Для этого на второе место поставим то уравнение системы, не содержащее x_1, в котором коэффициент при x_2 не равен нулю. Будем прибавлять обе части этого уравнения, умноженные на соответствующее число, к соответствующим частям всех уравнений, начиная с третьего, чтобы уничтожить в них члены с x_2 ….. Проделав это со всеми уравнениями системы и последовательно со всеми неизвестными, мы можем получить следующие варианты эквивалентных систем.

А) В случае, когда $n > m$, мы либо придем к системе, где последнее уравнение содержит $n-m+1$ неизвестное, либо получим на каком-то этапе невозможное соотношение, когда ноль равен числу, отличному от нуля. В первом случае система имеет **бесконечное множество решений**, так как первые m неизвестных выражаются линейно через оставшиеся $n-m$ неизвестные. Во втором случае система **несовместна,** то есть, не имеет решений.

Б) В случае, когда $n<m$, мы можем прийти к системе, в котором $m-n+1$ последних уравнений одинаковы и представляют собой одно и то же выражение для x_n. В этом случае система имеет **единственное решение**. Если же на каком-то этапе получится соотношение, где ноль равен числу, отличному от нуля, то система **несовместна**.

В) В случае, когда $n=m$, мы также можем на каком-то этапе получить соотношение, где ноль равен числу, отличному от нуля. Такая система **несовместна.** В противном случае в последнем уравнении определяется неизвестное x_n, а из предыдущих уравнений определяются последовательно и однозначно все другие неизвестные. В этом случае система имеет **единственное** решение.

П р и м е р. Решим методом Гаусса систему $\begin{cases} x-y+3z=5, \\ 3x-2y=-2, \\ -x+5y-z=7. \end{cases}$ Сначала с помощью первого уравнения исключим x из второго и третьего уравнений: к обеим частям второго уравнения прибавим части первого уравнения, умноженные на -3, а к обеим частям третьего уравнения прибавим соответствующие части первого уравнения. Получим эквивалентную систему

$\begin{cases} x-y+3z=5, \\ y-9z=-17, \\ 4y+2z=12. \end{cases}$ Теперь исключим y из последнего уравнения, умножив обе части второго уравнения на –4 и прибавив к обеим частям третьего уравнения. Получим систему с треугольной левой частью: $\begin{cases} x-y+3z=5, \\ y-9z=-17, \\ 38z=80. \end{cases}$

Теперь из последнего уравнения мы имеем: $z=\frac{80}{38}=\frac{40}{19}$. Зная это значение, получим y из второго уравнения: $y=\frac{37}{19}$. И наконец, значение $x=\frac{12}{19}$ определим из первого уравнения.

Для систем, где число уравнений и неизвестных совпадают, возможно применение следующего метода, основанного на вычислении определителей.

Использование обратной матрицы для решения систем

Пусть требуется решить систему вида $A \cdot X = B$, где A– квадратная матрица. Решить – это значит, найти матрицу-столбец X. Мы знаем, что в случае решения простейшего алгебраического уравнения $a \cdot x = b$ достаточно умножить обе части уравнения на a^{-1}, и в случае, когда $a \neq 0$, мы сразу получим решение: $x = a^{-1} \cdot b$.
Для решения заданной системы в случае, когда $\det A \neq 0$, тоже можно найти A^{-1}– матрицу, обратную к матрице A,– и получить решение по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Метод Крамера

Определители играют большую роль в решениях линейных систем из n уравнений относительно n неизвестных

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + a_{n3} \cdot x_3 + ... + a_{nn} \cdot x_n = b_n. \end{cases}$$

Существует **правило Крамера** решения системы (4), в соответствии с которым $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}, \ j = 1, ..., n,$ где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – главный определитель системы, а Δ_j– также определитель n-го порядка, отличающийся от Δ j-м столбцом: он заменен столбцом из свободных членов $b_i, i = 1, ..., n$.

Очевидно, что правило Крамера применимо, если $\Delta \neq 0$, и при этом исходная система имеет **единственное** решение. В том случае, если $\Delta = 0$ и существует хотя бы один из определителей Δ_j такой, что $\Delta_j \neq 0$, система не имеет решений.
Если $\Delta = 0$ и $\Delta_j = 0, \ j = 1, ..., n$, это означает, что хотя бы одно из уравнений исходной системы является линейной комбинацией других уравнений, и его можно удалить из системы. Остается система из $(n-1)$ уравнения относительно n неизвестных. В ее левой части ищем среди

определителей определитель $(n-1)$-го порядка отличный от нуля. Берем систему с этим главным определителем, а столбец слагаемых, содержащих переменное x_k, коэффициенты при котором не вошли в этот определитель, переносим в правую часть. Решая новую систему по правилу Крамера, получим решение, зависящее от x_k. Если среди определителей $(n-1)$-го порядка нет ненулевых, убираем еще одно уравнение из системы и снова ищем хотя бы один ненулевой определитель, уже $(n-2)$-го порядка….

П р и м е р. Решим систему $\begin{cases} x-y+3z=5, \\ 3x-2y=-2, \\ -x+5y-z=7. \end{cases}$ из предыдущего примера методом Крамера. Сначала сосчитаем главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 38$. Затем найдем все определители, где столбцы главного определителя заменяются последовательно столбцами свободных членов: $\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 7 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 24,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 74,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 80$.

В соответствии с формулами Крамера $x = \frac{12}{19},\ y = \frac{37}{19},\ z = \frac{40}{19}$.

Современные пакеты математических программ позволяют решать системы, не прибегая к вычислению определителей. Однако необходимо понимать, почему система, решаемая с помощью компьютера, может не иметь решений или иметь много решений.

Решение систем линейных уравнений в пакете программ MAXIMA проводится следующим образом: по команде **solve([2*x-3*y+z=5,-x+2*z=-10,-3*y+z=8],[x,y,z]);** компьютер решает систему из 3-х уравнений относительно 3-х неизвестных (**[x=-3/2,y=-55/12,z=-23/4]**).

Ранг матрицы

Если определитель – числовая характеристика, определяемая только для квадратной матрицы, то для **произвольной** матрицы можно ввести числовую характеристику, называемую **рангом** матрицы. Рассмотрим для некоторой матрицы А размера $m \times n$ всевозможные квадратные матрицы, полученные из А вычеркиванием строк и столбцов. Пусть существует такая квадратная матрица, размера $p \times p$ ($p \le \min\{m,n\}$), определитель которой отличен от нуля, в то время как все квадратные матрицы большего размера имеют нулевые определители. Тогда говорят, что **матрица А имеет ранг, равный р** ($rank\mathrm{A} = p$).

Для вычисления ранга матрицы с помощью пакета программ MAXIMA используют команду **rank:** для матрицы, введенной по команде **M1:matrix([1,2,3],[-1,0,-2],[0,-1,3],[-1,0,-1]);** ранг матрицы вычислим по команде **rank(M1);** (3).

Справедлива следующая теорема: система

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m, \end{cases}$$

совместна (то есть имеет решения) тогда и только тогда, когда ранги главной матрицы системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы системы

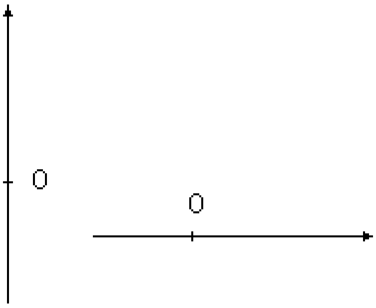
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

совпадают.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

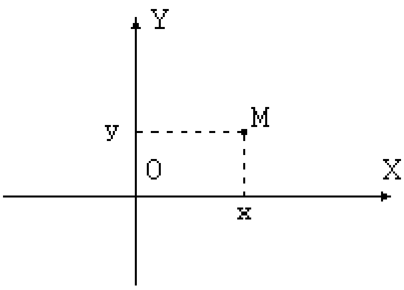
1. **Точка на прямой**.

Точка М на прямой (шкале) задается одним числом (координатой), указывающим, на сколько единиц длины точка М удалена от начальной точки О. На шкале должно быть задано положительное направление движения. Если точка М удалена в положительном направлении от О, то координата берется со знаком +, если в направлении, противоположном положительному направлению, то координата берется со знаком –. Примером является **шкала температур**, где температуры определяются с определенным знаком.



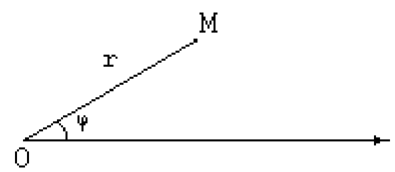
2. **Точка на плоскости**.

Для задания точки на плоскости приходится использовать две шкалы, называемые координатными осями (ось абсцисс и ось ординат), пересекающимися в точке O, называемой началом координат. Традиционно изображают взаимно перпендикулярные оси координат OX и OY, причем ось OX изображают горизонтально, а ось OY вертикально. Обычно принято задавать такие направления положительных движений по осям, что положительное направление оси OX после поворота на 90^0 против часовой стрелки совпадает с положительным направлением оси OY.



Произвольная точка M на плоскости задается координатами (x, y) ее проекций на координатные оси. Каждая проекция получается проведением через M прямой, параллельной оси, до пересечения с другой осью. Такая система координат называется **декартовой** (по имени знаменитого математика и философа Рене Декарта, жившего в 17 веке).

Другим способом задания точки на плоскости является задание точки в **полярной** системе координат. Для задания такой системы координат следует задать направленный луч (называемый **полярной осью)**, который обычно изображают горизонтальным, направленным вправо. Положение точки M на плоскости задают расстоянием до начала луча (полярный радиус точки r) и углом, на который следует повернуть луч, чтобы точка оказалась на нем (полярный угол точки φ).



Полярные координаты точки M (r,φ) имеют следующие особенности: первая координата неотрицательна, а вторая координата неоднозначна, так как вместо угла φ можно взять угол $\varphi+2\pi k$ при любом целом k.

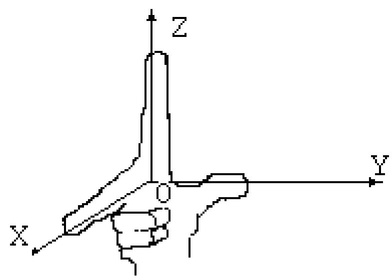
Связь между декартовыми и полярными координатами осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot\sin\varphi. \end{cases}$$

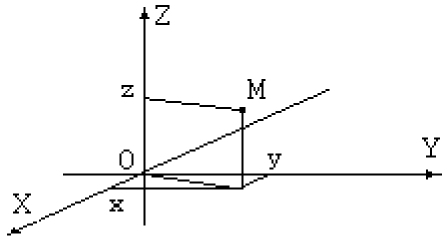
3. **Точка в пространстве**.

Для задания точки в пространстве требуется уже 3 координаты.

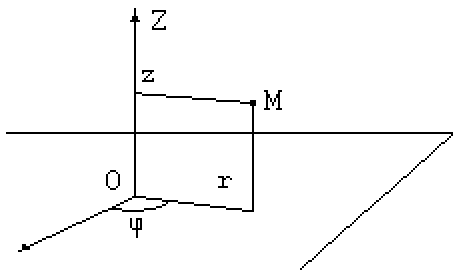
В случае **декартовой** системы координат мы строим 3 оси координат, традиционно взаимно перпендикулярные. Кроме того, обычно задают координатные оси OX, OY и OZ, составляющие **правую тройку.** Это означает, что если средний и большой пальцы правой руки, направить, соответственно, вдоль осей OX и OY в положительном направлении, то указательный палец правой руки укажет положительное направление оси OZ.



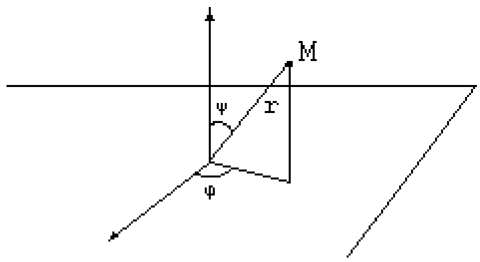
Координаты точки М (x, y, z) в пространстве определяется проекциями точки на соответствующие оси, причем проекции получаются проведением через М плоскостей, параллельных координатным плоскостям, до пересечения с координатными осями.



Другой координатной системой является **цилиндрическая** система координат. При такой системе координат задается координатная плоскость и перпендикулярная ей координатная ось. На плоскости задаются полярные координаты, причем начало полярной оси находится в точке О пересечения заданной координатной оси с заданной координатной плоскостью. Проекция точки на плоскость задается полярными координатами. Проекция точки на заданную ось определяет третью координату. Таким образом, точка М задается координатами (r, φ, z). Связь между цилиндрическими координатами и декартовыми координатами следующая: аппликата z в декартовых и в цилиндрических координатах одна и та же, а координаты r и φ связаны с координатами x и y так же, как связаны декартовы и полярные координаты на плоскости.



Еще одна координатная система в пространстве – **сферическая** система координат. Здесь также задаются плоскость и перпендикулярная ей ось. В точке их пересечения ставится точка О. Из точки О в заданной плоскости проводится полярная ось. Точка М в пространстве задается расстоянием r до точки О (выбор радиуса сферы), углом ψ, который отрезок, соединяющий точку О с точкой М, образуют с заданной осью (выбор параллели), а также углом, который образует проекция отрезка ОМ на заданную плоскость с полярной осью (выбор меридиана).



Связь между сферическими и декартовыми координатами осуществляется по формулам $\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\psi, \\ y = r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\psi, \qquad \varphi\in[0,2\pi],\ \psi\in[0,\pi]. \\ z = r\cdot\cos\psi, \end{cases}$

4. **Расстояние между двумя точками**.

Расстояние между точками проще всего измерять с помощью декартовых координат в прямоугольной системе благодаря теореме Пифагора.

Если точки M_1 и M_2 с координатами, соответственно, x_1 и x_2 расположены на прямой, то расстояние между ними равно $|x_1 - x_2|$.

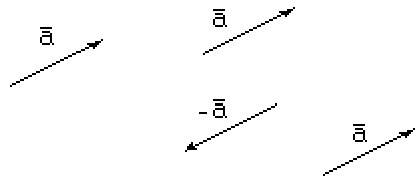
Если точки M_1 и M_2 с координатами, соответственно, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) расположены на плоскости, то расстояние между ними равно $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

Если точки M_1 и M_2 с координатами, соответственно, (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) расположены в пространстве, то расстояние между ними равно $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

Если точки M_1 и M_2 с координатами, соответственно, $(x^1{}_1, x^2{}_1, ..., x^n{}_1)$ и $(x^1{}_2, x^2{}_2, ..., x^n{}_2)$ расположены в n-мерном пространстве, то расстояние между ними равно $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x^k{}_1 - x^k{}_2)^2}$.

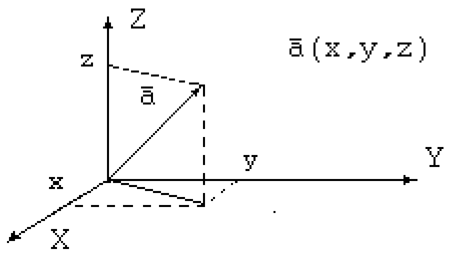
Векторы

Вектор – это направленный отрезок. Он задается длиной и направлением. Иногда можно прочитать «вектор с началом в точке А и концом в точке В». Это не означает, что у вектора фиксированы начальная и конечная точка. Тот же вектор (с той же длиной и тем же направлением) можно параллельно перенести, и тогда у него будут другие начало и конец. Геометрически конец вектора традиционно обозначают стрелкой.



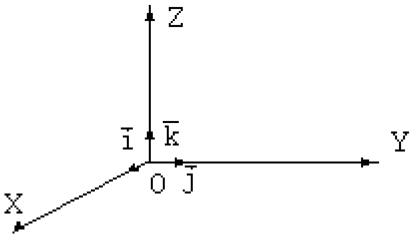
Векторы, параллельные друг другу, имеющие одинаковые длины, но противоположно направленные, называются взаимно противоположными и при записи различаются знаками.

Для того чтобы задать вектор в пространстве, проще всего поместить его начало в начало координат, тогда координаты конечной точки вектора полностью определят вектор. Поэтому векторы можно задавать с помощью координат.

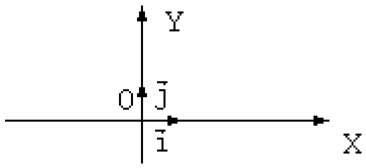


Таким образом, координаты – это проекции вектора на координатные оси. Используя координаты вектора, легко получить его длину (расстояние от конца до начала): $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Простейшими векторами в пространстве являются векторы единичной длины, имеющие направления координатных осей. Они называются **ортами** и обозначаются $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Эти векторы имеют следующие координаты: $\bar{i}(1,0,0)$, $\bar{j}(0,1,0)$, $\bar{k}(0,0,1)$.



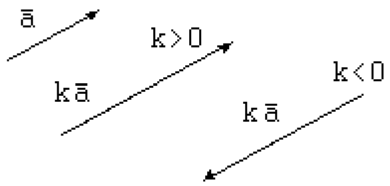
В случае вектора на плоскости XOY используются две координатные оси и каждый вектор имеет две координаты. В этом случае ортами являются векторы $\bar{i}(1,0)$, $\bar{j}(0,1)$.



Кроме того, имеет смысл ввести нулевой вектор $\vec{0}$ – вектор, имеющий нулевую длину и не имеющий направления.

1. Линейные преобразования векторов.

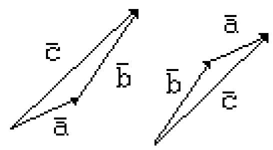
Умножение вектора на число. Умножение вектора на положительное число $k>0$ означает умножение длины вектора на это число при сохранении направления вектора. Умножение вектора на отрицательное число $k<0$ означает умножение длины вектора на число $|k|$ и замена направления вектора на противоположное.



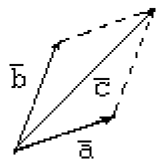
При умножении на число координаты вектора умножаются на это число: $\bar{a}=(x,y,z)$, $k\cdot\bar{a}=(k\cdot x,\, k\cdot y,\, k\cdot z)$.

Сложение векторов. Вектор $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ может быть получен одним из следующих способов.

А) Приставим начало вектора $\bar{b}$ к концу вектора $\bar{a}$, а затем соединим начало вектора $\bar{a}$ с концом вектора $\bar{b}$. Полученный вектор, конец которого совпадает с концом вектора $\bar{b}$ и является вектором $\bar{c}$. Очевидно, что результат суммирования не зависит от перестановки слагаемых $\bar{a}$ и $\bar{b}$.



Б) Поместим начала векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в одну точку. Если считать эти векторы сторонами параллелограмма, то вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ будет диагональю того же параллелограмма, причем начало вектора будут находиться в точке, совпадающей с началами векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.



При сложении векторов их соответствующие координаты складываются: если вектор $\bar{a}$ имеет координаты (x_1, y_1, z_1), а вектор $\bar{b}$ координаты (x_2, y_2, z_2), то вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ имеет координаты $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Нетрудно показать, используя свойства подобных треугольников, что линейные преобразования векторов удовлетворяют следующему равенству: $\lambda \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}$.

2. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является **число**, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними: $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$.

Из определения скалярного произведения следует, что $(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2$. Заметим, что в силу взаимной перпендикулярности скалярное произведение двух разных ортов равно нулю, а скалярный квадрат орта равен 1.

Скалярное произведение обладает свойствами: 1) $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$,

2) $((\bar{a}_1 + \bar{a}_2), \bar{b}) = (\bar{a}_1, \bar{b}) + (\bar{a}_2, \bar{b})$.

Найдем выражение скалярного произведения с помощью координат. Пусть вектор $\bar{a}$ имеет координаты (x_1, y_1, z_1), а вектор $\bar{b}$ координаты (x_2, y_2, z_2). Их разложения по базису имеют вид $\bar{a} = x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}$ и $\bar{b} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}$, соответственно. Применяя свойства скалярного произведения, получим

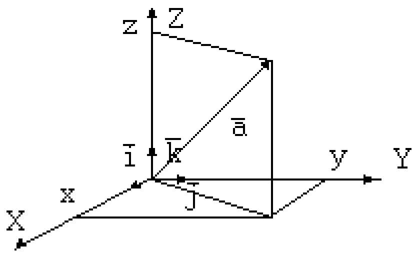
$$(\bar{a}, \bar{b}) = (x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}) \cdot (x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Используя скалярное произведение двух векторов, легко найти угол между этими векторами. В соответствии с определением скалярного произведения $\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$, следовательно,

$$\varphi = \arccos \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Условие взаимной перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

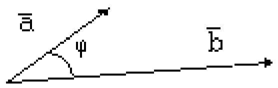
Разложение вектора по базису в трехмерном пространстве и на плоскости. Используя координаты вектора и орты, легко заметить, что вектор $\bar{a}$ с координатами (x, y, z) представляет собой следующую линейную комбинацию векторов-ортов: $\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$.



Такое представление вектора называется разложением вектора по базису, где **базисом** является набор ортов $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. В случае вектора на плоскости XOY базисом является набор $(\bar{i}, \bar{j})$. В соответствии с количеством векторов базиса плоскость называется двумерным пространством, а пространство – трехмерным пространством.

3. Скалярное произведение векторов в стандартном ортогональном базисе.

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является **число**, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними: $(\bar{a},\bar{b}) = \bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$.



Из определения скалярного произведения следует, что $(\bar{a},\bar{a}) = |\bar{a}|^2$. Заметим, что в силу взаимной перпендикулярности скалярное произведение двух разных ортов равно нулю, а скалярный квадрат орта равен 1.

Скалярное произведение обладает свойствами: 1) $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$,

2) $((\bar{a}_1+\bar{a}_2),\bar{b}) = (\bar{a}_1,\bar{b}) + (\bar{a}_2,\bar{b})$.

Найдем выражение скалярного произведения с помощью координат. Пусть вектор $\bar{a}$ имеет координаты (x_1, y_1, z_1), а вектор $\bar{b}$ координаты (x_2, y_2, z_2). Их разложения по базису имеют вид $\bar{a} = x_1\cdot\bar{i} + y_1\cdot\bar{j} + z_1\cdot\bar{k}$ и $\bar{b} = x_2\cdot\bar{i} + y_2\cdot\bar{j} + z_2\cdot\bar{k}$, соответственно. Применяя свойства скалярного произведения, получим
$(\bar{a},\bar{b}) = (x_1\cdot\bar{i} + y_1\cdot\bar{j} + z_1\cdot\bar{k})\cdot(x_2\cdot\bar{i} + y_2\cdot\bar{j} + z_2\cdot\bar{k}) = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$.

Используя скалярное произведение двух векторов, легко найти угол между этими векторами. В соответствии с определением скалярного произведения $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$, следовательно,

$$\varphi = \arccos\frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Условие взаимной перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$.

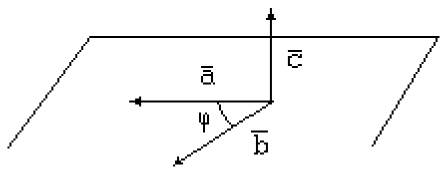
4. Векторное произведение векторов в стандартном ортогональном пространстве.

Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является **вектор** $\bar{c}$, обладающий следующими свойствами:

1) его длина равна произведению длин двух векторов на синус меньшего угла между ними,

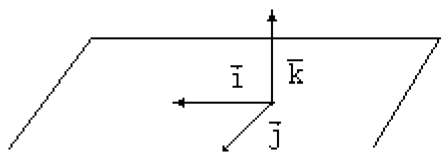
2) он перпендикулярен плоскости, в которой лежат оба исходных вектора, а значит, перпендикулярен каждому из исходных векторов,

3) его направление выбрано так, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ составляют **правую тройку.** То есть если направить средний палец правой руки по вектору $\bar{a}$, а большой – по вектору $\bar{b}$, то указательный примет направление вектора $\bar{c}$.

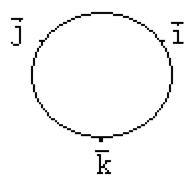


Обозначение векторного произведения: $\bar{c}=[\bar{a},\bar{b}]$ или $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$. Из определения имеем: $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\varphi$, $[\bar{a},\bar{a}]=0$, $[\bar{a},\bar{b}]=-[\bar{b},\bar{a}]$. Кроме того, справедливы свойства $[\bar{a}_1+\bar{a}_2,\bar{b}]=[\bar{a}_1,\bar{b}]+[\bar{a}_2,\bar{b}]$ и $[\lambda\cdot\bar{a},\bar{b}]=\lambda\cdot[\bar{a},\bar{b}]$.

Нетрудно заметить, что $[\bar{i},\bar{j}]=-[\bar{j},\bar{i}]=\bar{k}$, $[\bar{j},\bar{k}]=-[\bar{k},\bar{j}]=\bar{i}$, $[\bar{k},\bar{i}]=-[\bar{i},\bar{k}]=\bar{j}$.



Запомнить, какой орт получается как векторное произведение двух других ортов, легко, если пользоваться следующей схемой.



Если при движении от первого в векторном произведении вектора ко второму мы движемся против часовой стрелки, результатом векторного произведения будет третий вектор со знаком +, если по часовой стрелке, то третий вектор со знаком –.

Представляя векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с координатами, соответственно, (x_1,y_1,z_1) и (x_2,y_2,z_2) в виде разложения по базису $\bar{a}=x_1\cdot\bar{i}+y_1\cdot\bar{j}+z_1\cdot\bar{k}$,

$\bar{b} = x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}$ и пользуясь свойствами векторного произведения, получим:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = (y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2) \cdot \bar{i} + (z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2) \cdot \bar{j} + (x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2) \cdot \bar{k}.$$

Запомнить векторное произведение в координатной форму проще всего с применением определителя:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

В правой части последнего равенства находится определитель третьего порядка.

Нетрудно доказать, что это модуль векторного произведения $[\bar{a}, \bar{b}]$ совпадает с площадью параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Из определения векторного произведения следует, что **векторное произведение двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельны.**

5. Смешанное произведение векторов.

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$. Из определений скалярного и векторного произведений следует, что **если все три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, участвующие в смешанном произведении, лежат в одной плоскости, то $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$.**

Если координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равны, соответственно, $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ и (x_3, y_3, z_3), то смешанное произведение вычисляется с помощью определителя третьего порядка: $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Нетрудно доказать, что абсолютная величина смешанного произведения трех векторов равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

6. n-мерные векторы

По аналогии с двумерными и трехмерными векторными пространствами рассматривают векторные пространства X размерности n, где n – произвольное натуральное число. Такой вектор уже не изобразишь графически, и представляет он собой упорядоченный набор из n координат: $x=(x^1,x^2,...,x^n)$. При записи многомерного вектора верхнюю стрелку над буквой не изображают.

n-мерные векторы можно умножать на число: $\alpha\cdot x=(\alpha\cdot x^1,\alpha\cdot x^2,...,\alpha\cdot x^n)$, складывать: $x+y=(x^1+y^1,x^2+y^2,...,x^n+y^n)$ и скалярно умножать друг на друга: $(x,y)=x^1\cdot y^1+x^2\cdot y^2+...+x^n\cdot y^n$. Пространство векторов, в котором заданы такие операции, называется **евклидовым пространством**. Аналогом длины вектора x в таком пространстве является **норма** вектора, которая равна $\|x\|=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+...+(x^n)^2}$.

7. Базис в векторном пространстве.

Мы использовали понятие базис применительно к двумерным и трехмерным векторам как систему, соответственно, двух или трех взаимно ортогональных векторов единичной длины: $\bar{i}$, $\bar{j}$ в случае векторов на плоскости и $\bar{i}$, $\bar{j}, \bar{k}$ в случае векторов в пространстве.

Однако в качестве базиса на плоскости могут служит любые два ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ плоскости, не лежащие на одной прямой, так как любой вектор $\bar{c}$ на плоскости может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса: $\bar{c}=\alpha\cdot\bar{a}+\beta\cdot\bar{b}$. Действительно, сравнивая координаты векторов в левой и правой частях последнего равенства, мы сведем задачу определения коэффициентов α, β к решению линейной системы из двух уравнений с ненулевым главным определителем.

В качестве базиса в трехмерном пространстве могут служить любые три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ пространства, не лежащие в одной плоскости, так как любой вектор $\bar{d}$ в пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации $\bar{d}=\alpha\cdot\bar{a}+\beta\cdot\bar{b}+\gamma\cdot\bar{c}$. Коэффициенты α, β, γ могут быть определены как решение линейной системы из трех уравнений с ненулевым главным определителем.

Вообще, **базисом** в n-мерном пространстве векторов называется такой набор из n ненулевых векторов этого пространства, что любой вектор данного пространства может быть представлен как линейная комбинация векторов базиса. Необходимое и достаточное условие того, что набор из n векторов представляет базис, является **отличие от нуля определителя из координат векторов набора.** Это условие обеспечивает **линейную независимость** векторов набора. То есть невозможность найти такую линейную комбинацию векторов набора, которая приводила бы к нулевому вектору.

Линейное пространство

Линейным пространством X над полем вещественных чисел **R** называется множество элементов, для которых заданы операции **сложения** ($x+y$) для любых двух элементов x и y из X и **умножения на число** ($\lambda \cdot x$) для любого x из X и любого λ из **R,** не выводящие из множества X. Эти операции должны удовлетворять следующим свойствам:

1) $x+y=y+x$,

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$,

3) существует элемент $\Theta \in X$ такой, что $x+\Theta=\Theta+x=x$, и называемый **нулевым** элементом,

4) для любого $x \in X$ существует элемент $-x \in X$ такой, что $x+(-x)=\Theta$ и называемый **противоположным** элементом для элемента x,

5) для любого $x \in X$ справедливо: $1 \cdot x = x$,

6) для любых $\lambda,\ \mu \in \mathrm{R}$ и любого $x \in X$ справедливо: $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda \cdot x+\mu \cdot x$,

7) для любых $\lambda,\ \mu \in \mathrm{R}$ и любого $x \in X$ справедливо: $(\lambda \cdot \mu)\cdot x=\lambda \cdot (\mu \cdot x)$,

8) для любого $\lambda \in \mathrm{R}$ и любых $x, y \in X$ справедливо: $\lambda \cdot (x+y)=\lambda \cdot x+\lambda \cdot y$.

П р и м е р ы линейных пространств.

1. Множество векторов n-мерного пространства.

2. Множество матриц размера 2×2.

Базисом в линейном пространстве называется такой минимальный набор из ненулевых элементов этого пространства, что любой вектор данного пространства может быть представлен как линейная комбинация элементов базиса. Количество элементов в базисе определяет размерность пространства.

П р и м е р ы.

1. Базисом в n-мерном векторном пространстве является, например, набор из n векторов этого пространства, все координаты которых, кроме одной, являются нулями. Размерность этого пространства n.

2. Базисом в пространстве матриц размера 2×2 являются матрицы, все элементы которых, кроме одного, являются нулями. Размерность такого пространства 4.

Линейные отображения

Линейным отображением F векторного пространства X в векторное пространство Y называется такое отображение, что для любых двух векторов x_1 и x_2 из пространства X и любых двух вещественных чисел α и β справедливо:

$$F(\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_2)=\alpha\cdot F(x_1)+\beta\cdot F(x_2).$$

Любое линейное отображение n-мерного векторного пространства в m-мерное векторное пространство задается некоторой матрицей размера $m\times n$ и наоборот, любая матрица размера $m\times n$ задает линейное отображение n-мерного пространства в m-мерное.

Действительно, возьмем произвольную матрицу A размера $m\times n$**.** Ее можно умножить на n-мерный вектор x, рассматриваемый в вида матрицы-столбца размером $n\times 1$. Результатом умножения будет матрица-столбец размером $m\times 1$, то есть, m-мерный вектор y. Имеем $y=A\cdot x$, где

$$y=\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ \dots\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

То, что отображение, задаваемое умножением вектора на матрицу, является линейным, следует из свойств сумм и произведений матриц на число.

В частности, линейное отображение n-мерного пространства на множество вещественных чисел (одномерное пространство) задается матрицей-строкой размера $1\times n$.

Собственные векторы и собственные значения

Предположим, что мы имеем отображение из пространства R^n в пространство R^n, задаваемое квадратной матрицей $M=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix}=\left[a_{ij}\right]_{i=1,\,j=1}^{n,\ n}$. В ряде задач бывает необходимо найти такой ненулевой вектор $\tilde{x}=(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\dots,\tilde{x}^n)\in\mathrm{R}^n$, что $M\cdot\tilde{x}=\lambda\cdot\tilde{x}$, где λ – вещественное число. Такое число называется **собственным значением** матрицы M, а вектор $\tilde{x}$ называется соответствующим этому собственному значению **собственным вектором**.

П р и м е р. Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Обозначим координаты искомого собственного вектора $\vec{a}=(x,y,z)$. Тогда из определения собственного вектора следует

$$\begin{cases} x+2y+3z=\lambda x, \\ 2x+y+3z=\lambda y, \\ 3x+3y+6z=\lambda z. \end{cases}$$

Перенесем все неизвестные в левые части уравнений системы, и получим
$$\begin{cases} x(1-\lambda)+2y+3z=0, \\ 2x+y(1-\lambda)+3z=0, \\ 3x+3y+(6-\lambda)z=0. \end{cases}$$

Если главный определитель последней системы отличен от нуля, согласно формулам Крамера, мы сможем получить только нулевые значения неизвестных, однако собственный вектор не должен быть нулевым. Остается только приравнять нулю главный определитель системы. Так как $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)$, приравнивая главный определитель нулю, получим уравнение $\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)=0$, называемое

характеристическим уравнением. В нашем примере характеристическое уравнение имеет 3 корня. Следовательно, матрица обладает тремя собственными значениями. Найдем, например, собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$. Координаты этого вектора удовлетворяют системе $\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ 2x+y+3z=0, \\ 3x+3y+6z=0, \end{cases}$ причем вследствие равенства нулю главного определителя полученной однородной системы одно из уравнений системы можно отбросить, так как оно получается из двух других. Из соотношений $\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ 2x+y+3z=0, \end{cases}$ получим $x=-z, y=-z$. Таким образом, собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$, с точностью до растяжения и смены направления на противоположное равен $(1,1,-1)$.

Если характеристическое уравнение имеет 2 кратных корня, после подстановки этих корней в однородную систему приходится отбрасывать 2 уравнения, не отличающихся от первого. В этом случае для каждого из кратных собственных значений выбираем собственные векторы так, чтобы они не были параллельными.

П р и м е р. Найдем собственные числа и собственные векторы матрицы $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$ и имеет 2 корня: 0 и 1, причем корень 1 имеет кратность 2.

Разложить левую часть характеристического уравнения на сомножители можно при помощи MAXIMы по команде **factor(determinant(matrix([2–t,–1,–1],[3,–2–t,–3],[–1,1,2–t]))).**

Найдем собственные векторы, соответствующие кратному корню 1. Для определения координат (x, y, z) мы получим следующую однородную систему: $\begin{cases} x-y-z=0, \\ 3x-3y-3z=0, \\ -x+y+z=0. \end{cases}$ Очевидно, что система сводится к единственному уравнению $x-y-z=0$. Взяв, например, $x=0$, мы получим первый собственный вектор, соответствующий собственному значению 1: (0,1,–1). Взяв $y=0$, мы получим второй собственный вектор (1,0,1), соответствующий тому же собственному значению 1, не параллельный первому.

В общем случае, когда работаем с матрицей размера $n \times n$, характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda \; a_{12} \; a_{13} \; \ldots \; a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22}-\lambda \; a_{23} \; \ldots \; a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \; a_{n2} \; a_{n3} \; \ldots \; a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Для нахождения собственных значений матрицы M с помощью MAXIMы применяют команду **eivals(M)**, для нахождения собственных векторов матрицы M с помощью MAXIMы применяют команду **eivects(M)**.

Квадратичные формы

Квадратичной формой в пространстве R^2 с координатами (x, y) является выражение вида $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, где a_{ij}, $i, j = 1, 2$, – произвольные числа. Квадратичной формой в пространстве R^3 с координатами (x, y, z) является выражение вида $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$. Квадратичной формой в пространстве R^{n} является выражение вида

$x^T \cdot M \cdot x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix}$, где матрица M симметрична относительно главной диагонали.

Часто возникает вопрос, при каких коэффициентах квадратичная форма будет сохранять знак при произвольных значениях переменных $x^1, \ldots, x^n$.

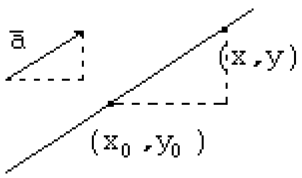
Из свойств квадратных трехчленов $a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22}$ следует, что квадратичная форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ положительна тогда и только тогда, когда для коэффициентов квадратичной формы справедливы условия: 1) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, 2) $a_{11} > 0$ (или $a_{22} > 0$). Она отрицательна, если

1) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, 2) $a_{11} < 0$ (или $a_{22} < 0$).

Для квадратичной формы высших порядков рассматривают последовательность определителей $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ из коэффициентов матрицы M, расположенных в левом верхнем углу. Если $\Delta_i > 0,\ \forall i = 1,...,n,$ то квадратичная форма положительна. Если $\Delta_i(-1)^i > 0$ (определители с нечетными номерами отрицательны, определители с четными номерами положительны), то квадратичная форма отрицательна.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Прямая. Простейшей плоской кривой является прямая – геометрическое место точек, соединив любые две из которых, мы получим отрезок, параллельный заданному вектору.



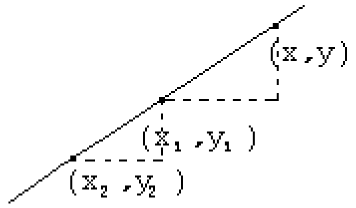
Рассмотрим прямую в плоскости XOY. Фиксировать прямую, параллельную данному вектору $\bar{a}$ с координатами (α, β) мы сможем, задав одну точку с координатами (x_0, y_0), через которую прямая проходит. Выберем на прямой произвольную точку с координатами (x, y). Тогда из подобия соответствующих треугольников имеем

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}. \qquad (1)$$

Соотношение (1) называют **каноническим уравнением прямой**, оно является основой для получения разных видов уравнения прямой на плоскости. Приравнивая обе части (1) переменной $t,\ -\infty \le t \le +\infty,$ мы получим **параметрическое уравнение прямой**: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \beta \cdot t. \end{cases}$ Вводя угловой коэффициент прямой $k=\dfrac{\beta}{\alpha}$ (тангенс угла, образуемого прямой с положительным направлением OX), мы получим из (1) **уравнение прямой с угловым коэффициентом**: $y=y_0+k\cdot(x-x_0)$.

Приравнивая нулю координаты направляющего вектора α и β, получим **прямые, параллельные координатным осям**: $x=x_0$ и $y=y_0$.

Прямая на плоскости может задаваться не только точкой и направляющим вектором, но и двумя различными точками.



Составляя пропорции сторон подобных треугольников, получим соотношение $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Это линейное соотношение представляет собой **уравнение прямой, проходящей через две различные точки**.

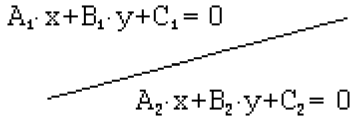
Частным случаем последнего уравнения является уравнение прямой, проходящей через точки, расположенные на осях координат. Пусть прямая проходит через точки $(a,0)$ и $(0,b)$. Легко заметить, что ее уравнение принимает вид $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, называемое **уравнением прямой в отрезках** (имеются в виду отрезки, отсекаемые на осях).

Любая прямая на плоскости XOY представляется линейным уравнением вида $A\cdot x+B\cdot y+C=0$. И наоборот, любое линейное уравнение вида $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ описывает прямую на плоскости XOY.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Рассмотрим две прямые, задаваемы уравнениями $A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1=0$ и $A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2=0$.

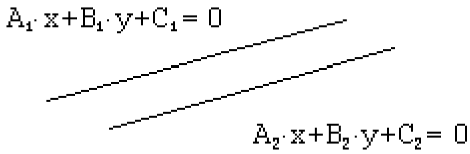
Возможны следующие случаи взаимного расположения этих прямых: 1) прямые совпадают, 2) прямые параллельны, 3) прямые пересекаются в одной точке. Исследуем соотношение между коэффициентами уравнений прямых в каждом из перечисленных случаев.

В случае 1) оба уравнения, описывающие одну и ту же прямую, должны совпадать или отличаться коэффициентом, на который можно сократить.



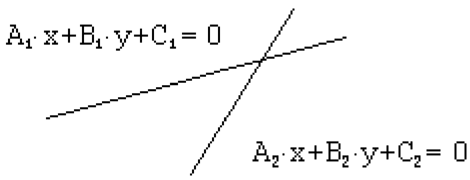
Таким образом, в данном случае $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

В случае 2) угловые коэффициенты обеих прямых одинаковы. То есть,



$k=-\dfrac{A_1}{B_1}=-\dfrac{A_2}{B_2}$. Отсюда получим условие параллельности: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$.

В случае 3) угловые коэффициенты прямых разные, то есть, $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$, и



следовательно, прямые пересекаются в одной точке.

Точка пересечения двух прямых на плоскости находится решением системы уравнений

$$\begin{cases} A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1=0,\\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2=0.\end{cases}$$

Сравните рассмотренные случаи со случаями разрешимости системы из двух уравнений с двумя неизвестными.

Угол между двумя прямыми.

Пусть две прямые с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 пересекаются в некоторой точке. Найдем угол между этими прямыми. Вспоминая то, что угловой коэффициент прямой – это тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси ОХ, по известной формуле тангенса разности двух углов, получим tg $\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$, где φ – искомый угол между прямыми.

Расстояние от точки до прямой.

Рассмотрим прямую с уравнением $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ и точку с координатами $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Расстоянием от заданной точки до заданной плоскости является длина перпендикулярного к плоскости отрезка с концом в заданной точке. Таким образом, следует провести через заданную точку $(\tilde{x}, \tilde{y})$ прямую, перпендикулярную заданной прямой. Параметрическими уравнениями новой прямой являются уравнения $\begin{cases} x = \tilde{x} + A \cdot t, \\ y = \tilde{y} + B \cdot t. \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$.

Найдем то значение параметра t_0, при котором новая прямая пересекает заданную прямую. При этом значении параметра точка новой прямой становится точкой исходной прямой, то есть, $A \cdot (\tilde{x} + A \cdot t_0) + B \cdot (\tilde{y} + B \cdot t_0) + C = 0$. Выражая t_0 из последнего уравнения, получим $t_0 = -\frac{A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{y} + C}{A^2 + B^2}$. Следовательно, основанием перпендикуляра, опущенного из заданной точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$ на заданную прямую является точка с координатами (x_0, y_0, z_0), где $x_0 = \tilde{x} - \frac{A \cdot (A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{y} + C)}{A^2 + B^2}$, $y_0 = \tilde{y} - \frac{B \cdot (A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{y} + C)}{A^2 + B^2}$.

Осталось найти расстояние между точками $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и (x_0, y_0). Оно равно $\frac{|A \cdot \tilde{x} + B \cdot \tilde{y} + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Таким образом, чтобы вычислить расстояние от точки до прямой, следует взять модуль левой части уравнения прямой с заданными координатами точки и разделить на корень из суммы квадратов коэффициентов уравнения прямой при переменных.

Кривые второго порядка. Кривой второго порядка называется кривая, описываемая уравнением второй степени, то есть уравнением, в которое переменные x и y входят с суммарной степенью не более 2. Таким образом, **кривая второго порядка задается уравнением вида** $A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$.

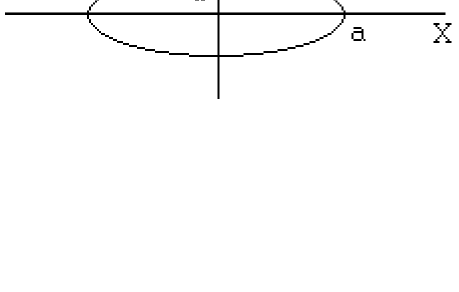
Обратное неверно: не любое уравнение второй степени задает реальную кривую. Так, если в уравнении

$x^2 + 4y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ выделить полные квадраты, мы получим уравнение $(x-1)^2 + (2y-1)^2 = -1$, которому не может удовлетворить никакая точка из плоскости XOY с координатами (x, y).

Существуют **три основных уравнения второй степени**, задающие (с точностью до сдвига и поворота координатных осей) **три основные кривые второго порядка: эллипс, гиперболу и параболу.**

Эллипс. Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная. Для того, чтобы получить **каноническое уравнение эллипса**, приведенное к координатным осям, расположим фокусы эллипса в точках $(-c, 0)$ и $(c, 0)$. Заданную сумму расстояний возьмем равной $2a$, причем $a > c$. Выражая сумму расстояний от точки с координатами (x, y) до заданных фокусов, получим соотношение $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$. Избавляясь от корней и вводя обозначение $b^2 = a^2 - c^2$, придем к каноническому уравнению $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Эллипс пересекает ось OX в точках $\pm a$, а ось OY в точках $\pm b$. Нетрудно видеть, что вместе со значением x уравнению удовлетворяет и $-x$, а вместе с y и $-y$. Следовательно, эллипс – кривая, симметричная относительно осей координат.



Значения a и b называются полуосями эллипса. В случае, когда полуоси равны, эллипс превращается в окружность $x^2+y^2=a^2$.

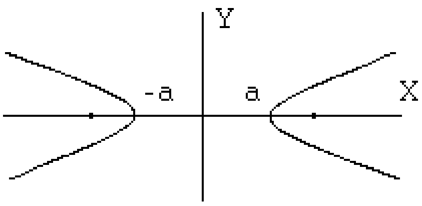
Как известно, окружность – геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой центром окружности. Окружность является частным случаем эллипса, когда оба фокуса сливаются в одну точку.

Фокусы эллипса, уравнение которого приведено выше, расположены на оси OX в точках $\pm\sqrt{a^2-b^2}$, если $a>b$, и на оси OY в точках $\pm\sqrt{b^2-a^2}$, если $b>a$.

Параметрическое задание эллипса: $\begin{cases} x=a\cdot\cos t, \\ y=b\cdot\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

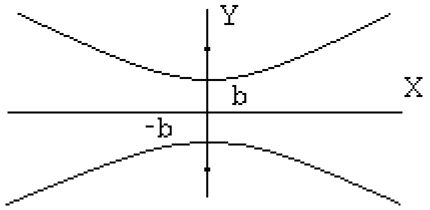
Для изображения эллипса с полуосями 5 и 3 с помощью MAXIMы воспользуемся параметрическим представлением эллипса и командой **plot2d([parametric,5*cos(t),3*sin(t),[t,0,2*%pi]])**.

2. Гипербола. Гиперболой называют геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная. **Каноническое уравнение** гиперболы, приведенное к координатным осям, имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, если фокусы гиперболы расположены на оси OX в точках $\pm\sqrt{a^2+b^2}$. В этом случае гипербола пересекает ось OX в точках $\pm a$, а ось OY не пересекает.



В отличие от эллипса, расположенного в конечной части плоскости, гипербола – кривая, ветви которой уходят в бесконечность.

В том случае, когда фокусы гиперболы расположены в точках $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ на оси OY, гипербола задается **каноническим уравнением** $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, она пересекает ось OY в точках $\pm b$ и не пересекает ось OX.



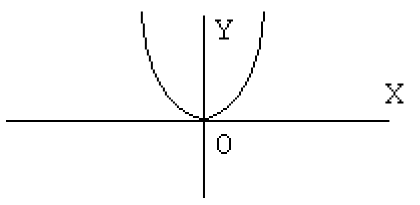
Параметрическое задание гиперболы, пересекающей ось OX:

$\begin{cases} x = \pm a \cdot \text{ch}\, t, \\ y = b \cdot \text{sh}\, t, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$. **Параметрическое задание** гиперболы, пересекающей ось OY: $\begin{cases} x = a \cdot \text{sh}\, t, \\ y = \pm b \cdot \text{ch}\, t, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$.

Здесь функции $\text{sh}\, t$ и $\text{ch}\, t$ – гиперболические синус и косинус, соответственно, имеющие представление $\text{sh}\, t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\text{ch}\, t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, и удовлетворяющие соотношению $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$.

Для изображения правой ветви гиперболы с полуосями 5 и 3 с помощью MAXIMы воспользуемся параметрическим представлением эллипса и командой **plot2d([parametric,5*cosh(t),3*sinh(t),[t,-2,2]])**.

3. Парабола. Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и осью симметрии OY имеет вид $y = A \cdot x^2$. В случае $A > 0$ парабола расположена в верхней полуплоскости, в случае $A < 0$ – в нижней полуплоскости.



Уравнение параболы с осью симметрии OX имеет вид $x = B \cdot y^2$.

В качестве **параметрического задания** можно взять $\begin{cases} x = t, \\ y = A \cdot t^2, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$, в первом случае и $\begin{cases} x = B \cdot t^2, \\ y = t, \end{cases}$ $t \in (-\infty, +\infty)$, во втором случае. То есть роль параметра играет одна из декартовых координат.

Для изображения параболы $y = 3x^2$ с помощью MAXIMы воспользуемся явным представлением параболы и командой **plot2d(3*x^2,[x,-2,2])**.

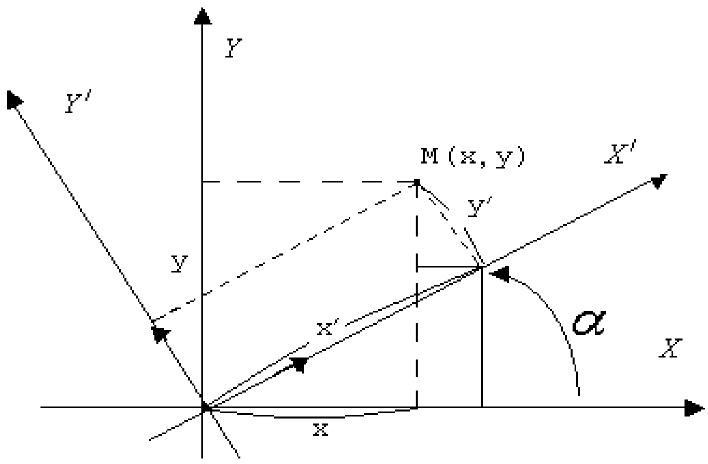
Любое уравнение вида $A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$, если оно имеет смысл, приводится путем линейной замены переменных вида $\begin{cases} x = \cos\alpha \cdot \tilde{x} - \sin\alpha \cdot \tilde{y} + \beta, \\ y = \sin\alpha \cdot \tilde{x} + \cos\alpha \cdot \tilde{y} + \gamma, \end{cases}$ к уравнению одного из трех перечисленных типов относительно $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Указанная линейная замена переменных означает сдвиг, растяжение и поворот новых декартовых координатных осей относительно старых. Покажем, как это делается поэтапно.

1. Если в уравнении кривой 2-го порядка отсутствует слагаемое с произведением $x \cdot y$, приведение к каноническому виду сводится к выделению полных квадратов сумм или разностей.

П р и м е р. Выяснить, какая кривая второго порядка имеет уравнение $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$.

Для решения задачи запишем уравнение в виде $9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 2y) - 23 = 0$. Теперь выделим в уравнении полные квадраты: $9(x-1)^2 + 4(y+1)^2 - 36 = 0$. Деля на 36 обе части уравнения, получим уравнение $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$. Таким образом, заданная кривая – это эллипс с центром в точке (1,–1) с полуосями 2 и 3.

2. Если в уравнении кривой 2-го порядка слагаемое с произведением $x \cdot y$ присутствует, то первым делом следует избавиться от такого слагаемого с помощью перехода к новым координатам , полученным поворотом осей.



Нетрудно видеть, что вводя новые оси координат и новые координаты

(x', y'), мы получим следующее выражение старых координат через новые:
$x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha,$
$y = y' \cdot \cos\alpha + x' \cdot \sin\alpha.$

Пусть уравнение кривой второго порядка имеет общий вид: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Первое, что следует сделать для приведения уравнения к каноническому виду – это сделать такой поворот осей, чтобы в уравнении кривой в новых координатах слагаемое с произведением $x' \cdot y'$ отсутствовало. При подстановке выражений старых координат через новые координаты в исходное уравнение мы получим

$$A(x'^2\cos^2\alpha - 2x'y'\cos\alpha\sin\alpha + y'^2\sin^2\alpha) + 2B(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha +$$
$$+ y'\cos\alpha) + C(x'^2\sin^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\sin\alpha + y'^2\cos^2\alpha) + D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) +$$
$$+ E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при $x' \cdot y'$, получим соотношение: $2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2(A - C)\cos\alpha\sin\alpha$. Следовательно, угол поворота осей α нужно выбрать так, чтобы $\mathrm{ctg}\,2\alpha = \dfrac{A - C}{2B}$.

На следующем этапе мы выделяем полные квадраты сумм или разностей и определяем вид кривой.

П р и м е р. Определить, какая кривая задается уравнением $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 7x + 26y - 34 = 0$.

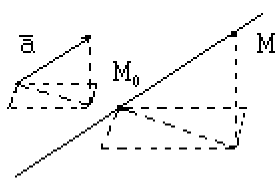
Для решения задачи определяем угол поворота α: $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{7}{24}$. Применяя несложные тригонометрические преобразования, получим: $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Введем новые координаты с помощью поворота осей:

$$x=\frac{4x'}{5}-\frac{3y'}{5},$$
$$y=\frac{3x'}{5}+\frac{4y'}{5}.$$

В новых координатах уравнение кривой примет вид $25x'^2+10x'+25y'-34=0$. Выделяя полный квадрат, получим $(x'+\frac{1}{5})^2=-(y'-\frac{7}{5})$. Таким образом, в координатах (x',y') мы получили параболу с вершиной в точке $(-\frac{1}{5},\frac{7}{5})$ с ветвями, направленными вниз. Если вернуться к старым координатам, то вершина параболы оказывается в точке $(-1,1)$. Итак, наша кривая – парабола с вершиной в точке $(-1,1)$ с осью, составляющей угол $-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$ с положительным направлением оси OX.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая в пространстве. Определение прямой как геометрического места таких точек, что отрезок, соединяющий любые две из них, параллелен заданному вектору, сохраняется и для случая пространственных прямых. Единственная разница в том, что заданный вектор $\bar{a}$ имеет уже три координаты (α,β,γ), заданная точка прямой M_0 имеет три координаты (x_0,y_0,z_0), и переменная точка прямой M также имеет три координаты (x,y,z).



Поэтому, используя подобие соответствующих треугольников, мы вместо соотношения (1) получим двойное равенство

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}. \qquad (2)$$

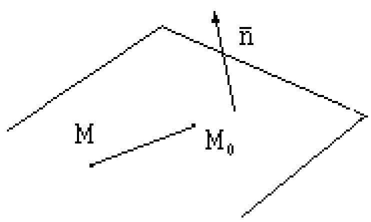
Приравнивая все части (2) переменной t, $-\infty \le t \le +\infty$, мы получим **параметрическое уравнение пространственной прямой**:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \cdot t, \\ y = y_0 + \beta \cdot t, \ -\infty < t < +\infty. \\ z = z_0 + \gamma \cdot t, \end{cases}$$

Второй способ задания пространственной прямой – как геометрическое место точек пересечения двух плоскостей – мы сможем использовать после знакомства с плоскостями.

Плоскость. Простейшей из пространственных поверхностей является плоскость – геометрическое место таких точек, что отрезок, соединяющий любые две из них, перпендикулярен данному вектору, называемому **нормалью к плоскости**.

Зададим плоскость с данной нормалью $\bar{n}$ (A, B, C) с помощью точки M_0 с координатами (x_0, y_0, z_0), лежащей в этой плоскости.

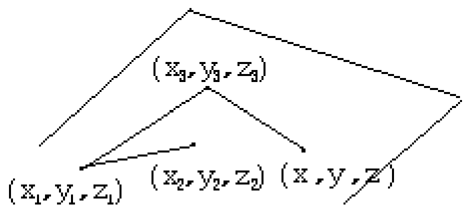


Если взять произвольную, отличную от M_0, точку M с координатами (x, y, z) в данной плоскости, то согласно определению и условию взаимной перпендикулярности двух векторов имеем $\overline{MM_0} \cdot \bar{n} = 0$. Используя координаты этих векторов получим условие взаимной перпендикулярности в виде $A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$.

Последнее уравнение и есть **уравнение плоскости, проходящей через данную точку**. В частности, уравнения плоскостей, параллельных координатным плоскостям, имеют вид $x = x_0$, $y = y_0$ или $z = z_0$.

В случае, когда какой-то из коэффициентов уравнения плоскости отличен от нуля, можно выразить соответствующую координату через две другие координаты, например, $z = z_0 - \frac{A}{C} \cdot (x - x_0) - \frac{B}{C} \cdot (y - y_0)$ при $C \neq 0$. Такое уравнение может считаться **параметрическим заданием** плоскости, где в качестве двух независимых параметров выступают две из координат, а третья линейно выражается через два параметра.

Плоскость в пространстве может задаваться не только нормалью и одной точкой, но и тремя различными точками, с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3), через которые она проходит.



Рассматривая три вектора, лежащие в одной плоскости, получим в соответствии со свойством смешанного произведения соотношение $\begin{vmatrix} (x-x_1) & (y-y_1) & (z-z_1) \\ (x_2-x_1) & (y_2-y_1) & (z_2-z_1) \\ (x_3-x_1) & (y_3-y_1) & (z_3-z_1) \end{vmatrix} = 0$. Если разложить определитель по верхней строке, получим линейную комбинацию разностей $(x-x_1)$, $(y-y_1)$ и $(z-z_1)$, то есть линейное уравнение относительно координат переменной точки плоскости x, y и z.

Любая плоскость в пространстве XYZ представляется линейным уравнением вида $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$. И наоборот, любое линейное уравнение $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ задает плоскость.

Упражнение. Выведите уравнение плоскости «в отрезках»: плоскости, отсекающей на координатных осях, соответственно, отрезки длиной a,b и c.

Расстояние от точки до плоскости.

Рассмотрим плоскость с уравнением $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ и точку с координатами $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Расстоянием от заданной точки до заданной плоскости является длина перпендикулярного к плоскости отрезка с концом в заданной точке. Таким образом, следует провести через заданную точку $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ прямую, перпендикулярную заданной плоскости. Параметрическими уравнениями такой прямой являются уравнения $\begin{cases} x = \tilde{x} + A \cdot t, \\ y = \tilde{y} + B \cdot t, \quad -\infty < t < +\infty. \\ z = \tilde{z} + C \cdot t. \end{cases}$ Найдем то значение параметра t_0, при котором прямая пересекает заданную плоскость. При этом значении параметра точка прямой становится точкой плоскости, то есть,

$A\cdot(\tilde{x}+A\cdot t_0)+B\cdot(\tilde{y}+B\cdot t_0)+C\cdot(\tilde{z}+C\cdot t_0)+D=0$. Выражая t_0 из последнего уравнения, получим $t_0=-\dfrac{A\cdot\tilde{x}+B\cdot\tilde{y}+C\cdot\tilde{z}+D}{A^2+B^2+C^2}$. Следовательно, основанием перпендикуляра, опущенного из заданной точки $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ на заданную плоскость является точка с координатами (x_0,y_0,z_0), где $x_0=\tilde{x}-\dfrac{A\cdot(A\cdot\tilde{x}+B\cdot\tilde{y}+C\cdot\tilde{z}+D)}{A^2+B^2+C^2}$, $y_0=\tilde{y}-\dfrac{B\cdot(A\cdot\tilde{x}+B\cdot\tilde{y}+C\cdot\tilde{z}+D)}{A^2+B^2+C^2}$,

$$z_0=\tilde{z}-\frac{C\cdot(A\cdot\tilde{x}+B\cdot\tilde{y}+C\cdot\tilde{z}+D)}{A^2+B^2+C^2}.$$

Осталось найти расстояние между точками $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ и (x_0,y_0,z_0). Оно равно $\dfrac{|A\cdot\tilde{x}+B\cdot\tilde{y}+C\cdot\tilde{z}+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Таким образом, чтобы вычислить расстояние от точки до плоскости, следует взять модуль левой части уравнения плоскости с заданными координатами точки и разделить на корень из суммы квадратов коэффициентов уравнения плоскости при переменных.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Рассмотрим прямую $\begin{cases} x=x_0+\alpha\cdot t, \\ y=y_0+\beta\cdot t, -\infty<t<+\infty, \\ z=z_0+\gamma\cdot t. \end{cases}$ и плоскость $A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0$. Прямая может 1) лежать в плоскости, 2) быть параллельной плоскости, то есть не пересекать плоскость, 3) пересекать плоскость в единственной точке.

В случае 1) направляющий вектор прямой и нормаль к плоскости взаимно перпендикулярны, то есть, $\alpha\cdot A+\beta\cdot B+\gamma\cdot C=0$, и существует общая точка у прямой и плоскости (существование одной такой точки обеспечивает принадлежность всех точек прямой данной плоскости);

в случае 2) $\alpha\cdot A+\beta\cdot B+\gamma\cdot C=0$ и на прямой существует точка, не лежащая в плоскости (существование такой точки обеспечивает то, что все точки прямой не принадлежат данной плоскости);

в случае 3) $\alpha\cdot A+\beta\cdot B+\gamma\cdot C\neq 0$.

Геометрическим местом точек пересечения двух плоскостей является прямая. Направляющим вектором этой прямой является векторное произведение нормалей к заданным плоскостям.

Упражнение. Запишите параметрическое уравнение прямой, получаемой пересечением плоскостей $2x-y+3z=5$ и $x-4y+z=0$.

Для получения точки пересечения **трех плоскостей** следует решить систему

$$\begin{cases} A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\cdot z+D_1=0, \\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\cdot z+D_2=0, \\ A_3\cdot x+B_3\cdot y+C_3\cdot z+D_3=0. \end{cases}$$

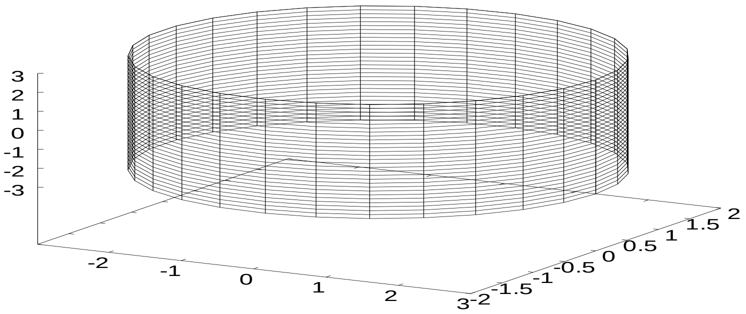
Мы знаем, что решение единственно, если главный определитель системы отличен от нуля. Система не имеет решений, если ранги главной и расширенной матриц системы различны.

Упражнение. Приведите примеры геометрических картин в случаях, когда три плоскости а) пересекаются в одной точке, б) имеют множество точек пересечения – прямую, в) не имеют общих точек. Как эти примеры согласуются с теорией разрешимости систем линейных уравнений с точки зрения определителей?

Поверхности второго порядка. Поверхностью второго порядка называют геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени, то есть уравнению, в котором координаты x, y и z входят в суммарной степени не выше 2. Такое уравнение имеет вид $A\cdot x^2+B\cdot x\cdot y+C\cdot y^2+D\cdot x\cdot z+E\cdot y\cdot z+F\cdot z^2+K\cdot x+L\cdot y+M\cdot z+N=0.$ Не всякое уравнение, представляющее линейную комбинацию произведений не более двух переменных, определяет реальную поверхность, а случаев, когда реальная поверхность существует, очень много. Мы рассмотрим несколько типов поверхностей второго порядка.

1. Цилиндрические поверхности. Уравнение второй степени, не содержащее одной из переменных, задает цилиндрическую поверхность.

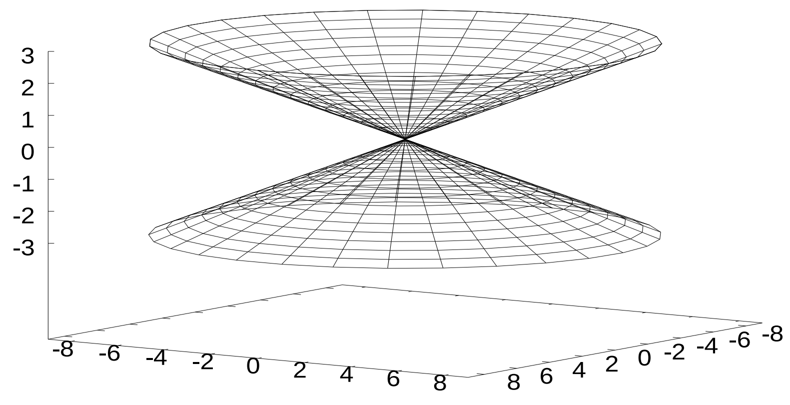
Например, уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ задает связь между координатами x и y, но не накладывает ограничений на координату z. В итоге получается поверхность, «вырастающая» из соответствующего эллипса, расположенного в плоскости XOY. Из каждой точки эллипса перпендикулярно плоскости XOY выходит прямая, называемая **образующей** данной цилиндрической поверхности. В совокупности эти образующие составляют цилиндрическую поверхность, а сам эллипс называется **направляющей** цилиндрической поверхности.



Аналогичным способом получаются цилиндрические поверхности из кривых второго порядка, лежащих в других координатных плоскостях.

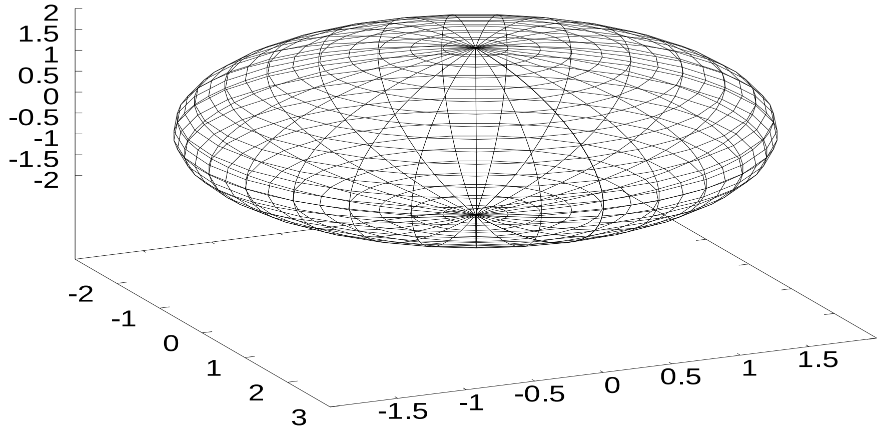
Для трехмерного изображения цилиндрической поверхности красного цвета высотой 6 с эллипсом, имеющим полуоси 3 и 2, в качестве направляющей, воспользуемся командами **load(draw); draw3d(color = red, parametric_surface(3*cos(t),2*sin(t),z,t,0,2*%pi,z,-3,3)).**

2. Конические поверхности. Это поверхности, построенные с помощью **образующих**, не параллельных друг другу, как в цилиндрических поверхностях, а проходящих через одну и ту же точку и через точки направляющей. Примером конической поверхности является круговой конус с направляющей – окружностью. **Уравнение кругового конуса** с направляющей, лежащей в плоскости, параллельной плоскости XOY, имеет вид $z^2=R^2\cdot(x^2+y^2)$.



Для трехмерного изображения конической поверхности коричневого цвета используем команды **load(draw); draw3d(color = brown, parametric_surface(3*z*cos(t),3*z*sin(t),z,t,0,2*%pi,z,-3,3)).**

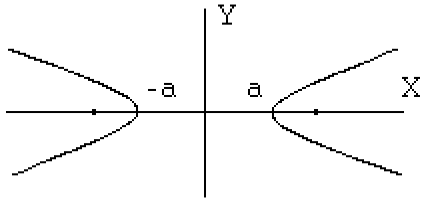
3. Поверхности вращения. Рассмотрим в плоскости XOY эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Начнем вращать эту кривую относительно оси OX. Кривая опишет поверхность, называемую **эллипсоидом вращения** и имеющую уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.



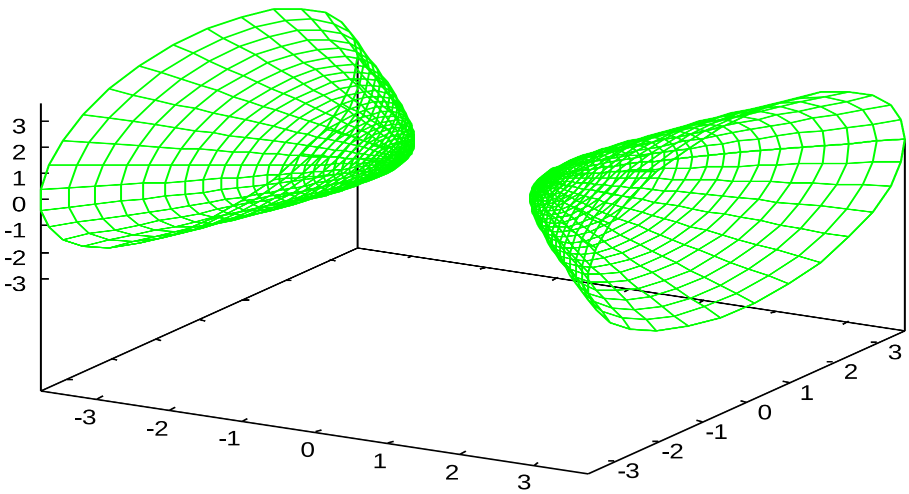
При вращении вокруг оси OX выражение y^2 в уравнении эллипса заменяется на выражение y^2+z^2. Аналогично при вращении вокруг оси OY мы получим эллипсоид вращения с уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$.

Для трехмерного изображения эллипсоида вращения вокруг оси OX голубого цвета используем команды **load(draw); draw3d(color = blue, parametric_surface(3*cos(t)*sin(s),2*sin(t)*sin(s), 2*cos(s),t,0,2*%pi, s,0,%pi)).** Это поверхность вращения эллипса с полуосями 3 и 2.

Рассмотрим в плоскости XOY гиперболу $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.



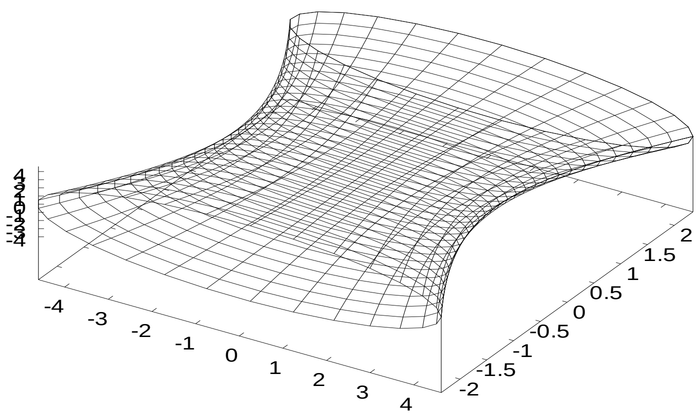
Будем вращать эту кривую вокруг оси OX. Мы получим поверхность, задаваемую уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1$ и называемую **двуполостным гиперболоидом вращения**.



Для трехмерного изображения двуполостного гиперболоида вращения вокруг оси OX зеленого цвета используем команды

load(draw); draw3d(color = green, parametric_surface(cosh(u),sinh(u)*cos(v),sinh(u)*sin(v),u,0,2,v,0,2*%pi), parametric_surface(-cosh(u),sinh(u)*cos(v),sinh(u)*sin(v),u,0,2,v,0,2*%pi)). Это поверхность вращения гиперболы $x^2 - y^2 = 1$.

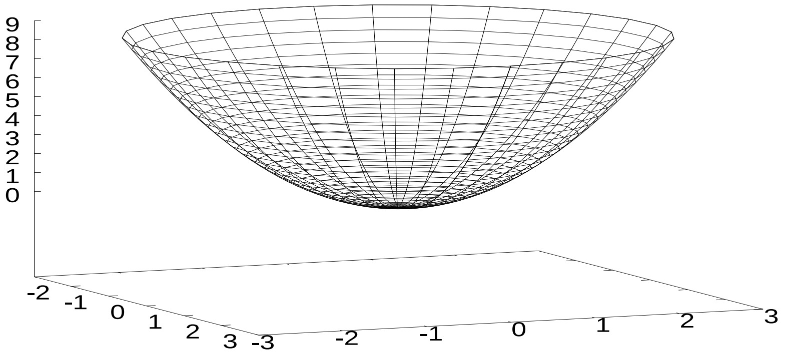
Будем вращать ту же гиперболу вокруг оси OY. Мы получим поверхность, задаваемую уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ и называемую **однополостным гиперболоидом вращения**.



Для трехмерного изображения однополостного гиперболоида вращения вокруг оси OY темно-зеленого цвета используем команды

load(draw); draw3d(color = dark_green, parametric_surface(3*cosh(t)*cos(s),2*sinh(t),3*cosh(t)*sin(s),t,-1,1,s,0,2*%pi)). Это поверхность вращения гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Параболоидом вращения называется поверхность вида $z = A \cdot (x^2 + y^2)$. Эта поверхность получается вращением лежащей в плоскости XOZ параболы $z = A \cdot x^2$ вокруг своей оси.



Для трехмерного изображения параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ используем команды **plot3d([r*cos(t),r*sin(t),r^2],[r,0,2],[t,0,2*%pi]).**

8. Поверхности с эллиптическими сечениями. Очевидно, что сечения поверхностей вращения плоскостями, перпендикулярными осям вращения, являются окружностями. В том случае, когда сечениями являются эллипсы, мы имеем поверхности более общего вида, для которых, помимо канонических представлений, приведем параметрические задания поверхностей. Заметим, что в отличие от кривых на плоскости поверхности в пространстве задаются при помощи **двух** параметров.

Эллипсоид. Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Параметрическое задание: $\begin{cases} x = a \cdot \cos u \cdot \sin v, \\ y = b \cdot \sin u \cdot \sin v, \ u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]. \\ z = c \cdot \cos v, \end{cases}$

Двуполостный гиперболоид. Каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

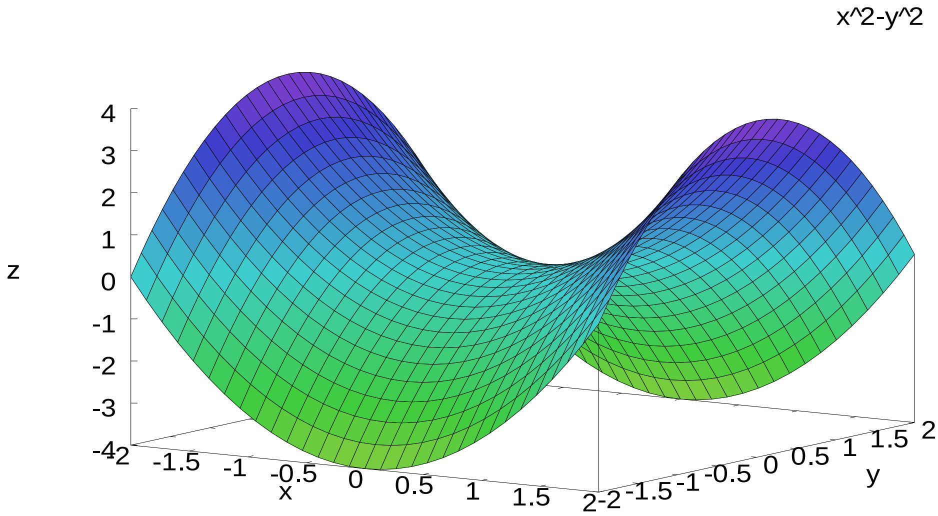
Параметрическое задание: $\begin{cases} x = \pm a \cdot \mathrm{ch}\, u, \\ y = b \cdot \mathrm{sh}\, u \cdot \cos v, \ u \in (-\infty, +\infty), \ v \in [0, 2\pi]. \\ z = c \cdot \mathrm{sh}\, u \cdot \sin v, \end{cases}$

Однополостный гиперболоид. Каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Параметрическое задание: $\begin{cases} x = a\cdot \operatorname{ch} u\cdot \cos v, \\ y = b\cdot \operatorname{sh} u, \quad u\in(-\infty,+\infty),\ v\in[0,2\pi]. \\ z = c\cdot \operatorname{ch} u\cdot \sin v, \end{cases}$

Эллиптический параболоид. Каноническое уравнение $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. Параметрическое задание либо с использованием переменных x и y в качестве параметров, либо $\begin{cases} x = a\cdot r\cdot \cos t, \\ y = b\cdot r\cdot \sin t,\ \ r\in[0,+\infty),\ t\in[0,2\pi]. \\ z = r^2, \end{cases}$

Гиперболический параболоид (седло). Каноническое уравнение $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$. Параметрическое задание с использованием переменных x и y в качестве параметров.



Для трехмерного изображения гиперболического параболоида $z=x^2-y^2$ используем команды **plot3d(x^2-y^2,[x,-2,2],[y,-2,2])** .

Упражнения. Самостоятельно постройте примеры поверхностей второго порядка с эллиптическими сечениями в трехмерном изображении.

Математический анализ

Математическим анализом называется раздел математики, посвященный исследованию функций методами анализа бесконечно-малых величин. На первом этапе мы займемся изучением функций, действительного переменного.

Аксиоматика множества действительных чисел

1. **Аксиомы сложения**.

1) $\forall x, y \in \mathrm{R}$ справедливо $x + y = y + x$.

2) $\forall x, y, z \in \mathrm{R}$ справедливо $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3) $\exists 0 \in \mathrm{R}$ (нейтральный элемент сложения) такой, что $\forall x \in \mathrm{R}$ справедливо $x + 0 = x$.

4) $\forall x \in \mathrm{R}\, \exists (-x) \in \mathrm{R}$ такой, что $x + (-x) = 0$.

2. **Аксиомы умножения.**

1) $\forall x, y \in \mathrm{R}$ справедливо $x \cdot y = y \cdot x$.

2) $\forall x, y, z \in \mathrm{R}$ справедливо $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

3) $\exists 1 \in \mathrm{R}$ (нейтральный элемент умножения) такой, что $\forall x \in \mathrm{R}$ справедливо $x \cdot 1 = x$.

4) $\forall x \in \mathrm{R} \backslash \{0\}\, \exists \dfrac{1}{x} \in \mathrm{R}$ такой, что $x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$.

3. Аксиома сложения и умножения.

1) $\forall x, y, z \in \mathrm{R}$ справедливо $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

4. Аксиомы порядка.

1) $\forall x \in \mathrm{R}$ справедливо $x \le x$.

2) $\forall x, y \in \mathrm{R}$ таких, что $x \ne y$, справедливо одно из двух соотношений: $x \le y$ или $y \le x$.

3) Если выполняются одновременно соотношения $x \le y$ и $y \le z$, то справедливо соотношение $x \le z$.

4) Если выполняются одновременно соотношения $x \le y$ и $y \le x$, то $x = y$.

5. Аксиомы порядка, связанные с операциями.

1) Если $x \le y$, то для $\forall z \in \mathrm{R}$ справедливо $x + z \le y + z$.

2) Если выполняются одновременно соотношения $0 \le x$ и $0 \le y$, то $0 \le x \cdot y$.

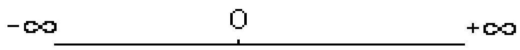
6. Аксиома непрерывности.

Пусть X и Y – подмножества множества R, причем для $\forall x \in X$ и для $\forall y \in Y$ справедливо $x \le y$. Тогда $\exists z \in \mathrm{R}$ такое, что $x \le z$ и $z \le y$ для $\forall x \in X$ и для $\forall y \in Y$.

Все перечисленные аксиомы обеспечивают те свойства вещественных чисел, которыми мы привычно пользуемся.

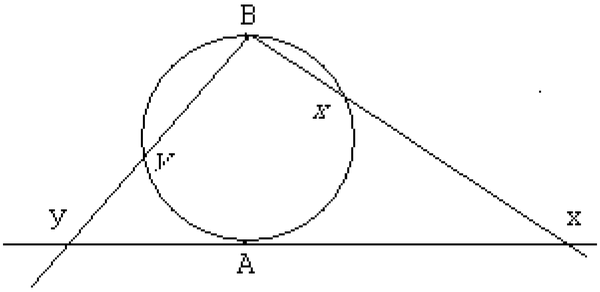
Последняя аксиома кажется лишней в перечне аксиом. Однако именно эта последняя аксиома позволяет ввести иррациональные числа в множество действительных чисел. Действительно, первые пять аксиом справедливы и для множества рациональных чисел Q, то есть, чисел, представимых в виде отношения $\frac{p}{q}$, где $p-$ целое число, а $q-$ натуральное число. Однако еще древние греки знали, например, что число, квадрат которого равен 2, не является рациональным. Существование иррациональных чисел во множестве R доказывается именно применением аксиомы непрерывности.

Известной еще древним грекам является **интерпретация** множества R в виде бесконечной прямой, на которую нанесена точка (О), являющаяся началом отсчета как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Действительные числа – это точки прямой с расстояниями от точки отсчета, равными величинам чисел. Такой интерпретацией мы активно пользуемся со школы, называя положительной бесконечностью $(+\infty)$ условный предел при удалении точки по прямой вправо и отрицательной бесконечностью $(-\infty)$ условный предел при удалении точки по прямой влево.



Другой моделью множества R является окружность. Характерной особенностью такой интерпретации является то, что аналогом бесконечности является одна из точек окружности. Покажем, что между точками бесконечной прямой и конечной окружности существует взаимнооднозначное соответствие, позволяющее заменять одну модель на другую.

Представим окружность, касающуюся прямой в точку А, которую мы назовем полюсом. Другим полюсом (В) назовем точку, диаметрально противоположную А. Проводя из В лучи, пересекающие окружность и данную прямую, мы получим взаимнооднозначное соответствие точек окружности и прямой. Полюс А будут соответствовать самому себе. Полюс В будет соответствовать бесконечности. При этом понятия $+\infty$ и $-\infty$ будут означать только направление движения к одной и той же точке В, соответствующей бесконечно удаленной точке.



Функции действительного переменного.

Числовые величины могут быть <u>*переменными*</u> *и* <u>*постоянными*</u>, то есть меняющимися или не меняющимися в процессе исследования. Переменные величины могут быть <u>*независимыми*</u> *и* <u>*зависимыми*</u> – меняющимися в зависимости от каких-то других величин.

Эти понятия также условны. Если рассмотреть уравнение окружности $x^2+y^2=9$, в нем участвует две переменные величины x и y. Одной из них можно придавать в некоторой области любые значения, другая находится из приведенного уравнения. Следовательно, одну из них можно считать независимой, другую – зависимой переменной. При этом независимой переменной может считаться любая из них, тогда вторая будет зависимой.

Функция – это закон, по которому каждому элементу некоторого множества (область определения) ставится в соответствие элемент другого множества (область значений).

Способы задания функции одной переменной

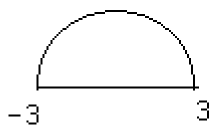
Вернемся к независимым и зависимым переменным. Независимую переменную часто называют аргументом, зависимую – функцией.
Определение 1. Если каждому элементу некоторого множества $X \subset \mathrm{R}$ ставится в соответствие элемент множества $Y \subset \mathrm{R}$, говорят, что на множестве X задана функция $y=f(x)$, здесь f определяет закон, с помощью которого осуществляется это соответствие.

П р и м е р ы**.** 1. Показательная функция $y=2^x$, $x \in \mathrm{R}$.
2. Логарифмическая функция $y=\log_2 x$, $x>0$.

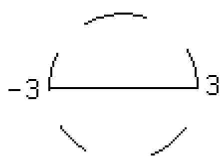
3. Степенная функция $y = x^5, x \in \mathrm{R}$.
Функция может быть задана в виде таблицы или графика, либо формулой (аналитическое задание).

Аналитически функцию можно задать в явном виде $y = f(x)$ (*явное задание функции*), когда из формулы следует, что переменная y зависит от x, то есть является функцией аргумента x.

Можно задать ее *неявно* $F(x, y) = 0$, когда любая из переменных может считаться независимой, тогда другая переменная является функцией. Пример неявного задания функции $x^2 + y^2 = 9$. Нетрудно заметить, что эта формула задает фактически две непрерывные функции $y = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3, 3]$,



и $y = -\sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3, 3]$. График первой функции представляет верхнюю полуокружность, график второй – нижнюю ее часть. Если не требовать непрерывности, то из соотношения $x^2 + y^2 = 9$ можно получить бесчисленное множество функций, заданных на отрезке [-3,3].



Кроме того, возможно *параметрическое задание функции* $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, когда вводится дополнительный параметр $t \in [t_0, T]$. Примером является параметрическое уравнение той же, что и выше окружности $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$, в неявном виде записанное как $x^2 + y^2 = 9$.

Определение 2. Множество X называется *области существования* функции, или областью ее определения.

Определение 3. Множество Y называется *областью значений* функции.

Определение 4. Любое связное подмножество R (то есть такое, что от одной произвольной его точки можно дойти до второй произвольной его точки, оставаясь внутри подмножества) числовой оси называется *промежутком*.

Открытый промежуток, не включающий граничных точек, называется *интервалом* и обозначается (a,b) или $a<x<b$. Замкнутый промежуток, содержащий все внутренние и граничные точки, называется *отрезком* и обозначается $[a,b]$ или $a\le x\le b$. Существуют также полуинтервалы $[a,b)$ и $(a,b]$. В первом случае в полуинтервал входит только левая граничная точка, во втором – только правая.

П р и м е р ы. 1. У функции $y=\sin x$ область существования вся числовая ось то есть $-\infty<x<\infty$, область значений $[-1,1]$.
2. У функции $y=\sqrt{x}$ область существования $[0,\infty)$ или $0\le x<\infty$, область значений также $[0,\infty)$.
3. У функции $y=\log_a x$ область существования $(0,\infty)$, область значений $(-\infty,\infty)$.

Функции можно задавать не только на подмножествах R, но и на подмножествах R^2 (функция двух переменных), R^3 (функция трех переменных),….

Функции на множестве натуральных чисел в комбинаторике

В школьном курсе изучается много функций, задаваемых на вещественной оси или ее подмножествах. Подмножества эти являются отрезками, интервалами, полуинтервалами,….. В настоящем параграфе мы определим те функции, которые можно рассматривать только на множестве N, и найдем их приложения в **комбинаторике** – разделе математики, посвященном решению задач выбора и расположения элементов конечных множеств.

Основой для всех таких функций можно считать **факториал:**

$$n!=1\times2\times3\times...\times n.$$

1. Попробуем решить такую задачу: сколькими способами можно рассадить на n пронумерованных стульях n гостей? На первый стул можно посадить любого из n гостей. Выбрав одного из них, на второй стул можно усадить уже одного из оставшихся (n – 1) претендентов. Выбрав и

этого, на третий стул выбираем одного из (n – 2) гостей… . На последний стул претендент будет только один. Таким образом, если двигаться от конца процесса, мы получим $1\times2\times3\times...\times n = n!$ вариантов.

Взаимно однозначное отображение конечного упорядоченного множества на себя называется **подстановкой** элементов множества. Каждая последовательность элементов конечного множества с учетом порядка называется **перестановкой** этих элементов и обозначается P_n. Перестановки не меняют элементов множества или их количества, они меняют порядок элементов. Таким образом, число всевозможных перестановок в множестве из n элементов P_n = n!.

2. Представим теперь, что, как в предыдущей задаче, у нас n пронумерованных стульев, но мы рассаживаем на них m претендентов, причем m > n. Конечно, всех усадить мы не сможем, но хотим выяснить, сколько имеется вариантов рассаживания. Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, видим, что на 1-й стул имеется m претендентов, на второй (m – 1), на третий (m – 2),…., на n-й стул остается (m – n + 1) претендент. Итак, число вариантов равно

$$(m-n+1)\times(m-n+2)\times...\times(m-1)\times m = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Любой упорядоченный набор n различных элементов множества, состоящего из m элементов, называется **размещением** из m по n, число таких размещений обозначается $A_m{}^n$. Таким образом,

$$A_m{}^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

3. Рассмотрим теперь несколько другую задачу, где мы «раздаем» не сидячие места на пронумерованных стульях (как известно, человек не может сидеть одновременно более, чем на одном стуле), а, например, n раритетных книг группе страстных библиофилов, состоящей из m человек. Сколько вариантов раздачи n книг m претендентам? На первую книгу у нас m претендентов, на вторую – тоже m претендентов, и так далее. Следовательно, мы имеем m^n вариантов распределения книг между претендентами.

Любой упорядоченный набор n элементов множества, состоящего из m элементов, называется **размещением с повторением** из m по n и равен m^n.

4. Вернемся ко второй задаче, где мы рассаживали m человек на n стульях, только теперь у нас стулья не пронумерованы, не отличаются друг от друга, и нас не интересует, где кто сидит, а интересует, сидит человек или

стоит. Значит, число вариантов рассаживания совпадает с числом вариантов отбора из m гостей группы счастливчиков, состоящей из n человек, которые смогут сесть на стулья. Решение этой задачи можно связать с решением задачи 2. Представим, что мы решили бы задачу 2 таким образом: отбирали бы группы по n человек, а затем делали бы внутри группы отобранных для сидения n человек всевозможные перестановки, чтобы учесть все варианты рассаживания на пронумерованных стульях. Мы должны были бы получить тот же результат: A_m^n. Следовательно, количество вариантов выбора групп по n человек из m человек равно A_m^n, деленное на число перестановок в группе из n человек, то есть на $n!$.

Любое подмножество из n элементов множества, состоящего из m элементов, называется **сочетанием** из m по n, и число сочетаний обозначается C_m^n. В соответствии с рассуждениями при решении задачи, $C_m^n = \dfrac{A_m^n}{n!}$ или $C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$.

Последовательности

Определение. Функция одного переменного, заданная на множестве N, называется последовательностью. Значение функции при n=1, называется первым членом последовательности (x_1), значение при n=2 – вторым членом последовательности (x_2), ….

Последовательности бывают числовыми, если все ее элементы – числа и функциональными, когда ее элементы – функции.

П р и м е р ы. 1. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, ..., \frac{1}{n^2}, ...$ – числовая последовательность.

2. $x, x^2, x^3, ..., x^n, ...$ при $x \in [1,5]$ – функциональная последовательность.

Определение. Число a называется **пределом последовательности** x_n, $n \in \mathrm{N}$, ($a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$), если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пример. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)=1$. Здесь $x_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $a=1$. Так как $|x_n - a| = \dfrac{1}{n^2}$, найдем такое значение $N(\varepsilon)$, что при $\forall n > N(\varepsilon)$ ($\dfrac{1}{n^2} < \varepsilon$). Так как последнее неравенство эквивалентно неравенству $n > \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}$, за $N(\varepsilon)$

можно принять наибольшее целое число, меньшее или равное $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$. Такое число обозначается как $[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}]$.

Элементарные свойства пределов

1. Предел единственен.

Доказательство . Пусть $a=\lim_{n\to\infty} x_n$ и $b=\lim_{n\to\infty} x_n$. Для $\forall\varepsilon>0$ найдем $N_1(\varepsilon)$ такое, что $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $\forall n>N_1(\varepsilon)$ и найдем $N_2(\varepsilon)$ такое, что $|x_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $\forall n>N_2(\varepsilon)$. Тогда при $\forall n>\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}$ получим $|b-a|=|b-x_n+x_n-a|\le|b-x_n|+|x_n-a|<\varepsilon$. Из произвольности ε получаем: расстояние между числами a и b может быть сделано сколь угодно малым. Это означает, что $a=b$.

2. Пусть $x_n\le y_n\le z_n, \forall n\in \mathrm{N}$. Если $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} z_n=a$, то $\lim_{n\to\infty} y_n=a$. (Теорема о двух полицейских).

Доказательство. Для $\forall\varepsilon>0$ найдем $N_1(\varepsilon)$ такое, что $|x_n-a|<\varepsilon$ при $\forall n>N_1(\varepsilon)$ и найдем $N_2(\varepsilon)$ такое, что $|z_n-a|<\varepsilon$ при $\forall n>N_2(\varepsilon)$. Тогда при $\forall n>\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}$ получим неравенства $a-\varepsilon<x_n,\ z_n<a+\varepsilon$. Следовательно, при $\forall n>N(\varepsilon)=\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}$ справедливо $a-\varepsilon<x_n\le y_n\le z_n<a+\varepsilon$, что обеспечивает неравенство $|y_n-a|<\varepsilon$.

3. Пусть $x_n\ge 0$ при $\forall n\in \mathrm{N}$. Если $\exists\lim_{n\to\infty} x_n=a$, то $a\ge 0$.

Доказательство от противного. Пусть $a<0$. В соответствии с определением предела при $\varepsilon=-\frac{a}{2}$ найдем $N_0\in \mathrm{N}$ такое, что $\forall n>N_0$ $(|x_n-a|<-\frac{a}{2})$. То есть $\frac{a}{2}<x_n-a<-\frac{a}{2}$ при $\forall n>N_0$. Из правого неравенства следует $x_n<\frac{a}{2}$, что противоречит предположению.

4. Если $\exists\lim_{n\to\infty} x_n=a$, то $\exists\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

Доказательство. Сначала получим вспомогательное неравенство $||x_n|-|a||\le|x_n-a|$. Имеем

$$\begin{cases}|a|=|a-x_n+x_n|\le|a-x_n|+|x_n|\\ |x_n|=|x_n-a+a|\le|x_n-a|+|a|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|a|-|x_n|\le|a-x_n|\\ |x_n|-|a|\le|x_n-a|\end{cases}\Rightarrow||x_n|-|a||\le|x_n-a|.$$

Согласно определению предела для $\forall\varepsilon>0$ $\exists N=N(\varepsilon)\in \mathrm{N}$ такое, что при $\forall n>N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $|x_n-a|<\varepsilon$. Согласно доказанному неравенству при тех же $\forall n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство: $||x_n| - |a|| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Для рассмотрения следующих свойств пределов последовательностей введем два определения.

Определение 1. Последовательность $x_n, n \in \mathrm{N}$, называется ограниченной, если $\exists M > 0$ тчо $|x_n| < M, \forall n \in \mathrm{N}$.

Определение 2. Последовательность $x_n, n \in \mathrm{N}$, называется бесконечно малой величиной (б.м.в.), если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

5. Если последовательность $x_n, n \in \mathrm{N}$, сходится, то есть, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $x_n, n \in \mathrm{N}$, – ограниченная величина.

<u>Доказательство</u>. В соответствии с определением предела при $\varepsilon = 1$ найдем такое $N_1 \in \mathrm{N}$, что $|x_n - a| < 1$ при $\forall n > N_1$. Следовательно, в соответствии с неравенством, полученным выше, $||x_n| - |a|| < 1$ при $\forall n > N_1$. Отсюда $|x_n| < 1 + |a|$ при $\forall n > N_1$. Найдем теперь $M = \max\{|x_1| + 1, |x_2| + 1, \ldots, |x_{N_1(\varepsilon)}| + 1, |a| + 1\}$. Очевидно, что $|x_n| < M, \forall n \in \mathrm{N}$.

6. Пусть $x_n, n \in \mathrm{N}$, – ограниченная величина, $y_n, n \in \mathrm{N}$,– б.м.в. Тогда $z_n = x_n y_n, n \in \mathrm{N}$, – б.м.в.

<u>Доказательство</u>. Найдем для $\forall \varepsilon > 0$ такое $N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, что $\forall n > N(\varepsilon)$ ($|y_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$). Тогда для $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|z_n| = |x_n y_n| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

7. Пусть $x_n, n \in \mathrm{N}$, – б.м.в., $y_n, n \in \mathrm{N}$,– б.м.в. Тогда $z_n = x_n + y_n, n \in \mathrm{N}$, б.м.в.

<u>Доказательство</u>. Найдем для $\forall \varepsilon > 0$ такое $N_1(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, что $\forall n > N_1(\varepsilon)$ ($|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$) и такое $N_2(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, что $\forall n > N_2(\varepsilon)$ ($|y_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$) . Тогда при $\forall n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ ($|z_n| < \varepsilon$).

Арифметические свойства пределов

Для упрощения доказательств этих свойств приведем новое определение предела последовательности, эквивалентное данному выше:
число a называется пределом последовательности $x_n, n \in \mathrm{N}$, если $x_n = a + x_n'$, где x_n' – б.м.в. (Доказать эквивалентность определений самостоятельно).

1.Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

Доказательство. Так как $x_n = a + x'_n$ и $y_n = b + y'_n$, то $x_n + y_n = a + b + (x'_n + y'_n)$, причем выражение в скобках – б.м.в. согласно седьмому элементарному свойству.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

Доказательство. Так как $x_n = a + x'_n$ и $y_n = b + y'_n$, то $x_n \cdot y_n = a \cdot b + (b \cdot x'_n + a \cdot y'_n + x'_n \cdot y'_n)$, причем выражение в скобках – б.м.в. согласно шестому и седьмому элементарным свойствам.

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$.

Доказательство. Так как $x_n = a + x'_n$, то $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x'_n|}{|a||x'_n + a|}$. Чтобы показать, что выражение $\frac{|x'_n|}{|a||x'_n + a|}$ – б.м.в., согласно шестому элементарному свойству достаточно показать, что $\frac{1}{|x'_n + a|}$ – ограниченная величина при достаточно больших значениях $n \in \mathrm{N}$. Имеем $\frac{1}{|x'_n + a|} = \frac{1}{|-(-x'_n) + a|} \leq \frac{1}{||a| - |-x'_n||}$. Пусть число $N_0 \in \mathrm{N}$ таково, что $|x'_n| < \frac{|a|}{2}$ при $\forall n > N_0$. Следовательно, $\frac{1}{|x'_n + a|} < \frac{2}{|a|}$ при $\forall n > N_0$ и $\frac{|x'_n|}{|a||x'_n + a|}$ – б.м.в. Теперь остается применить шестое элементарное свойство и новое определение предела.

Следствие. Согласно 2-му и 3-му арифметическим свойствам очевидным является следующее утверждение: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{y_n}{x_n}\right) = \frac{b}{a}$.

Неперово число

Без доказательства примем к сведению, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$, причем имеет место обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$. Это число называется неперовым числом, находится между числами 2 и 3 и приблизительно равно 2,71828.

Предел функции в точке

Существуют два определения предела функции в точке: $b = \lim_{x \to a} f(x)$.

1. **Определение Гейне**: для любой последовательности $x_n,\ n \in \mathrm{N}$, такой что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, справедливо: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.
2. **Определение Коши**: для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x,\ |x-a| < \delta$, справедливо $(|f(x) - b| < \varepsilon)$.

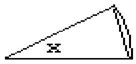
Для чего нужны два определения? Первое определение не является конструктивным, так как мы не сможем проверить всевозможные числовые последовательности, сходящиеся к точке a. Однако, это определение очень удобно для построения контрпримеров. Доказывать же существование предела в точке удобно с помощью второго определения.

Для того, чтобы пользоваться двумя определениями, докажем их эквивалентность, то есть покажем, что из условий первого определения следует выполнение условий второго определения и наоборот.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть справедливы условия второго определения и пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Из определения предела числовой последовательности для любого $\varepsilon > 0$ и определенного в соответствии с условием второго предела значения $\delta(\varepsilon) > 0$ найдем такое значение $N = N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, что $|x_n - a| < \delta(\varepsilon)$ для любого $n > N(\varepsilon)$. Следовательно, в соответствии с условием определения 2 $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ при $\forall n > N(\varepsilon)$. Последнее является установлением того факта, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$. То есть выполнение условий второго определения обеспечивает выполнение условий первого определения.

$1 \Rightarrow 2$ доказывается от противного. Пусть выполняются условия первого определения, но условия второго определения нарушаются, то есть, $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\forall \delta > 0\ \ \exists x_0$ такое, что $|x_0 - a| < \delta$ и $(|f(x_0) - b| \geq \varepsilon_0)$. В силу произвольности $\delta > 0$ возьмем $\delta = \dfrac{1}{n}$ и найдем при каждом значении $n \in \mathrm{N}$ такое значение x_n, что $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$ и $(|f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0)$. Мы видим, что нашли последовательность $x_n,\ n \in \mathrm{N}$, такую, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq b$. Последнее показывает невыполнимость условий первого определения. Мы пришли к противоречию.

П р и м е р. Покажем, что $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$. Пусть $x > 0$. Сравним площади сектора радиуса 1 раствора x и вписанного в него равнобедренного треугольника с той же вершиной, представленных на рисунке. Площадь треугольника равна $\frac{\sin x}{2}$, площадь сектора равна $\frac{x}{2}$.



Треугольник вписан в сектор, значит площадь треугольника меньше площади сектора. Следовательно, $\sin x < x$ для любого $x > 0$. Пользуясь нечетностью функции $\sin x$, получим $\sin x > x$ для любого $x < 0$. Таким образом, $|\sin x| < |x|$ для $x \neq 0$. Для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon$ такое что $|\sin x| < \varepsilon$ при $|x| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ в соответствии с определением Коши.

Из определения Гейне и свойств пределов последовательностей следует справедливость свойств пределов функций.

Свойства пределов функций

1) если $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $c = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, то $b + c = \lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x))$;

2) если $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $k \in \mathrm{R}$, то $kb = \lim\limits_{x \to a} (kf(x))$;

3) если $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $c = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, то $b \cdot c = \lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x))$;

4) если $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $c = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, причем $c \neq 0$, то $\frac{b}{c} = \lim\limits_{x \to a} (\frac{f(x)}{g(x)})$;

5) если $f(x) \geq 0$ при любых x, лежащих в некоторой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \geq 0$;

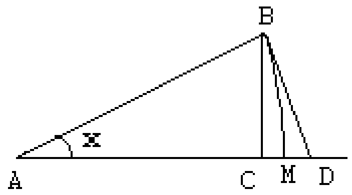
6) если $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ при любых x, лежащих в некоторой окрестности точки a, причем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ (теорема о двух полицейских).

П р и м е р. Покажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$. Воспользуемся полученной выше оценкой в неравенстве $0 \leq |\cos x - 1| = 2\sin^2 \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{2}$. Теперь из теоремы о двух полицейских следует $|\cos x - 1| \to 0$ при $x \to 0$. Следовательно, $\cos x \to 1$ при $x \to 0$.

Первый замечательный предел

Докажем, что справедлива формула: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Прежде всего, заметим, что вследствие нечетности функции $\sin x$ отношение $\frac{\sin x}{x}$ при x, близком к 0, положительно при любом знаке x. Достаточно предположить, что x приближается к 0, оставаясь положительным. В противном случае мы сменим знак x, что не повлияет на результат.

Используем геометрическое доказательство. Рассмотрим сектор круга радиуса 1 с углом при вершине, равным x. BM – дуга граничной окружности сектора, A – его вершина, AB = AM = 1. BD – отрезок касательной к дуге BM в точке B. BC – перпендикуляр, опущенный из точки B на отрезок AM.



В силу последовательной вложимости друг в друга треугольника ABM, сектора ABM и треугольника ABD соответствующие соотношения имеют место между площадями этих фигур: $S_{\Delta ABM}<S_{сектABM}<S_{\Delta ABD}$. Имеем $S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}\sin x,\ S_{сектABM}=\frac{1}{2}x,\ S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$. Поэтому получаем неравенство $\sin x<x<\operatorname{tg}x$. Если мы поделим все части этого неравенства на $\sin x$, то в силу предположения о знаке x знаки неравенства не изменятся. Поэтому мы имеем $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$. А теперь устремим x к нулю и применим теорему о двух полицейских. Мы получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$. Осталось применить свойство 4) для получения предела обратной величины: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Второй замечательный предел и его следствия

Докажем, что справедлива формула $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$. Но прежде изменим определение Коши с учетом того, что переменная x стремится не к конечному значению a, когда для попадания x в окрестность a следует выполнить неравенство $|x-a|<\delta$ при достаточно малом $\delta>0$, а к бесконечности. Переменная x окажется в окрестности бесконечности, если окажется по модулю больше достаточно большой величины. Таким образом, **определение Коши** в случае $x\to\infty$ будет выглядеть так: $b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $M=M(\varepsilon)>0$ такое, что для любого числа $x\in X$, удовлетворяющего условию $|x|>M$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Пусть $x>0$, то есть $x\to+\infty$. Рассмотрим неравенство

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1}=(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}= \\ =(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}(1+\frac{1}{[x]}) . \qquad (*)$$

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}=e$, так как при $x\geq1$ величина $[x]$ – натуральное число – и мы имеем последовательность, участвующую в определении числа e. Аналогично, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}=e$. Теперь остается применить неравенство (*) и теорему о двух милиционерах.

Для случая $x<0$ сделаем замену $x=-y$. Тогда $(1+\frac{1}{x})^x=(1-\frac{1}{y})^{-y}=(\frac{y-1}{y})^{-y}=(\frac{y}{y-1})^y=(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}(1+\frac{1}{y-1})$.

При $x\to-\infty$ имеем: $y\to+\infty$. Поэтому можно применить уже доказанную формулу для положительной переменной $y-1$. Доказательство завершено.

Прологарифмируем обе части второго замечательного предела – получим $\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{1}{x}))=1$. Если теперь заменить $\frac{1}{x}$ переменной t, которая стремится к нулю при стремлении x к бесконечности, получим следствие из второго замечательного предела

1) $\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$.

Другим следствие второго замечательного предела является предел, получаемый из предыдущего заменой $z=\ln(1+t)$:

2) $\lim\limits_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}=1$.

Рассмотрим теперь предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$. Сделаем замену $(1+x)^{\alpha}=e^{z}$. При такой замене $x\to 0$ тогда и только тогда, когда $z\to 0$. Получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{e^{z/\alpha}-1}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z}\cdot\lim\limits_{z\to 0}\frac{z/\alpha}{e^{z/\alpha}-1}\cdot\alpha=\alpha$. (Во втором выражении равенства числитель и знаменатель умножены на z и сделан переход к пределу в соответствии со вторым следствием.)

Таким образом, третьим следствием второго замечательного предела является

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$.

Правила вычисления предела

Чтобы вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, необходимо следующее.

1. Попробовать подставить в функцию, стоящую под знаком предела, $x=a$. Если функция в этой точке непрерывна, в соответствии формулой $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ предел равен числу $f(a)$.

2. Если точка a не входит в область определения функции, то конечный предел может не существовать, и если абсолютная величина функции неограниченно увеличивается при стремлении переменной к a, то пределом является бесконечность.

3. Если в результате подстановки получается неопределенность, то есть выражение вида $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^{\infty}$, следует раскрыть эту неопределенность, сделав сокращения, или привести получаемое выражение к замечательному пределу или его следствию.

П р и м е р ы.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x+3)}=\frac{3}{4}..$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{1-\cos 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=2.$

Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ показывает, что в числителе и знаменателе присутствуют бесконечно большие функции. Чтобы избавиться от неопределенности следует вынести самую большую величину в числителе и знаменателе за скобки, произвести сокращение, после чего еще раз применить пункт 1 правил.

П р и м е р ы.

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+x-1}{x^3-x^2+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=1.$$

Сокращение на x^2 законно, поскольку $x\neq\infty$, а только стремится к ∞, то есть принимает сколь угодно большие по абсолютной величине, но конечные, значения.

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3-x^2+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=0.$$

Неопределенности $\infty-\infty, 0\cdot\infty$ приводятся вначале к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, а затем раскрываются одним из перечисленных выше способов.

П р и м е р ы.

1. $$\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to3}\frac{x+3-6}{x^2-9}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{1}{(x+3)}=\frac{1}{6}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}x=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{\mathrm{tg}x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 3}\cos x=1.$

Неопределенность вида 1^{∞} раскрывается приведением ко второму замечательному пределу.

П р и м е р ы.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x^{-1}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{x^{-2}}{\sin^2 x^{-1}}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{-1}}{\sin x^{-1}}\right)^2}=e^1=e.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{x^2}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

Односторонние пределы

Число b называется **левым пределом** функции $f(x)$ при $x\to a$ (пределом слева), если для любой последовательности значений аргумента x_n, стремящейся к a слева $(x_n<a)$ соответствующая ей функциональная последовательность $f(x_n)$ сходится к b. Обозначение $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$.

Соответствующее определение Коши имеет вид: для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для $\forall x,\ 0<a-x<\delta$, справедливо $(|f(x)-b|<\varepsilon)$.

Число b называется **правым пределом** функции $f(x)$ при $x\to a$ (пределом справа), если для любой последовательности значений аргумента x_n, стремящейся к a справа$(x_n>a)$ соответствующая ей функциональная последовательность $f(x_n)$ сходится к b. Обозначение $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$.

Соответствующее определение Коши имеет вид: для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для $\forall x,\ 0<x-a<\delta$, справедливо $(|f(x)-b|<\varepsilon)$.

Существование предела в точке означает, что пределы слева и справа существуют и равны.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией (бесконечно малой) при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Определение 2. Функция $A(x)$ называется бесконечно большой функцией (бесконечно большой) при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}A(x)=\infty$.

Следствие. Функция $\dfrac{1}{A(x)}$ при $x\to x_0$ бесконечно малая, а $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая.

Замечание. Не следует путать определение **бесконечно большой величины** $(\forall M>0\ \exists\delta=\delta(M)$ тчо $\forall x,\ |x-x_0|<\delta\ \ (|A(x)|>M)$) и **неограниченной величины** $(\forall M>0\ \exists\, x\ (|A(x)|>M))$. Так, функция $f(x)=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{x})}{x}$ при $x\to 0$ является неограниченной величиной, но не является бесконечно большой величиной.

Определение 3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=K$, причем $0<|K|<\infty$, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется бесконечно малыми одного порядка малости при $x\to x_0$.

П р и м е р. Функции $(1+x)^3-1$ и x – бесконечно малые величины одного порядка малости при $x\to 0$.

Определение 4. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называется эквивалентными бесконечно малыми при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

П р и м е р. Функции x и $\sin x$ – эквивалентные бесконечно малые величины при $x\to 0$.

Определение 5. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$, при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

П р и м е р. Функция x^2– бесконечно малая величина более высокого порядка малости, чем $\sin x$ при $x \to 0$.

Известны следующие **свойства** бесконечно малых.

1) Сумма конечного числа бесконечно малых – бесконечно малая.
2) Произведение бесконечно малой и ограниченной величины – величина бесконечно малая.

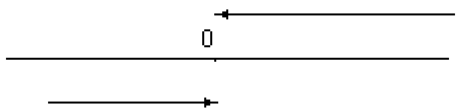
Функция, непрерывная в точке

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве $X \subset \mathrm{R}$ и $a \in X$. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то говорят, что эта функция непрерывна в точке a. По-другому можно записать свойство непрерывности так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$. Свойство непрерывности функций передается суперпозиции этих функций: если $y = f(x)$ непрерывна в точке a, а функция $z = g(y)$ непрерывна в точке $b = f(a)$, то функция $z = h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Функция, непрерывная в каждой точке множества X, называется непрерывной на множестве X. График непрерывной функции представляет собой непрерывную кривую. Все известные из школьного математического курса функции непрерывны в областях, где они заданы: многочлены, e^x, $\ln x$ при $x > 0$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, $\operatorname{ctg} x$ при $x \neq \pi k,\ k \in Z$.

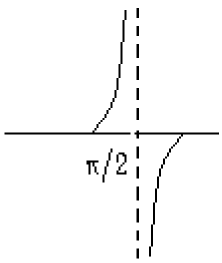
Пример разрывной функции – функция $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Доказать, что она имеет разрыв в точке $x = 0$ можно с применением определения Гейне. Зададим последовательность $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Очевидно, что общий член последовательности стремится к нулю с ростом номера, причем четные члены последовательности – положительные числа, нечетные – отрицательные. Нетрудно заметить, что $f(x_n) = (-1)^n$. Поскольку последовательность $(-1)^n$ не имеет предела, то в соответствии с определением Гейне функция $y = \operatorname{sgn} x$ не имеет предела в точке $x=0$, и поэтому не может быть непрерывной в этой точке, как бы мы ее в этой точке ни определяли.



Приведенный пример точки разрыва – **точка разрыва первого рода**. В соответствии с определением точки разрыва первого рода функция должна иметь пределы при x, стремящимся к точке разрыва слева и при x, стремящимся к точке разрыва справа, только эти пределы не совпадают. В случае функции $y=\operatorname{sgn} x$ предел слева в точке разрыва $x=0$ равен -1, предел справа равен 1.

Точкой разрыва второго рода функции $f(x)$ называется такая предельная точка множества X, на котором задана функция, что хотя бы один из пределов (слева или справа) функции в этой точке не существует или бесконечен. В качестве примера можно привести функцию $y=\operatorname{tg} x$. В точке $x=\pi/2$ функция не определена, но эта точка является предельной для множества определения функции. При стремлении x к $\pi/2$ слева значения функции, постоянно увеличиваясь, стремятся к $+\infty$. При стремлении x к $\pi/2$ справа, значения функции, уменьшаясь, стремятся к $-\infty$.



Функция, непрерывная в каждой точки множества X, называется непрерывной на множестве X .

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда справедливы следующие свойства.

1. Функция $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. (Без доказательства).

2. $\exists x_M, x_m \in [a,b]$ такие, что $f(x_M)=M, f(x_m)=m$, где M – наибольшее, m – наименьшее значения функции на отрезке. (Без доказательства).

3. Если $f(a)\cdot f(b)<0$ (значения на концах отрезка имеют разные знаки), то $\exists x_0 \in [a,b]$ такое, что $f(x_0)=0$.

Доказательство. Для доказательства разделим отрезок $[a,b]$ пополам и проверим значение $f(\frac{a+b}{2})$. Если $f(\frac{a+b}{2})=0$, то $x_0=\frac{a+b}{2}$ и теорема доказана. В противном случае выберем ту половину отрезка, на границах которой функция имеет разные знаки. Разделим этот новый отрезок пополам и проверим значение функции в этой середине…. Продолжая указанный процесс, мы либо получим значение 0 у функции в одной из середин получаемых отрезков, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n,b_n]$, $n\in \mathrm{N}$, обладающих свойствами: $[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$, $b_n-a_n\to 0$ при $n\to\infty$, так как $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$, и $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$. Так как последовательность левых концов отрезков a_n, $n\in \mathrm{N}$, не убывает и ограничена сверху (например числом b), то существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$. Так как последовательность правых концов отрезков b_n, $n\in \mathrm{N}$, не возрастает и ограничена снизу (например числом a), то существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$. Заметим, что $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)+\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$. Благодаря замкнутости отрезка точка $x_0=\alpha=\beta$ принадлежит отрезку $[a,b]$.

При этом в силу непрерывности функции на отрезке $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=f(x_0)$. В силу того, что знаки $f(a_n)$ и $f(b_n)$ разные, $f(x_0)$, являясь пределом как положительной, так и отрицательной последовательностей, может быть только нулем.

Следствиями 3-го свойства являются следующие свойства:

3-а. Функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. (Для доказательства следует применить свойство 3 к функции $f_1(x)=f(x)-k$ для любого значения k между $f(a)$ и $f(b)$).

3-б. Функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между M и m, где M и m из свойства 2. (Для доказательства следует применить свойство 3-а для функции $f(x)$ на отрезке $[x_m, x_M]$).

Условие дифференцируемости функции в точке

Условию непрерывности функции $f(x)$ в точке a можно дать следующее определение: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(a+\Delta x)-f(a))=0$, где $\Delta x=x-a$ называется приращением аргумента, а $\Delta f=f(x)-f(a)$ называется соответствующим приращением функции. В связи с этим возникает вопрос о сравнении малых величин Δx и Δf при стремлении Δx к нулю.

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке a, если существует такая константа A, что $\Delta f=A\Delta x+\alpha$ при достаточно малых значениях Δx, где $\alpha -$ величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx.

Из определения следует, что функция, дифференцируемая в точке, является непрерывной в этой точке. Более того, следует, что величина Δx не может быть величиной большего порядка малости, чем Δf, в противном случае величина A была бы не константой, а бесконечной величиной.

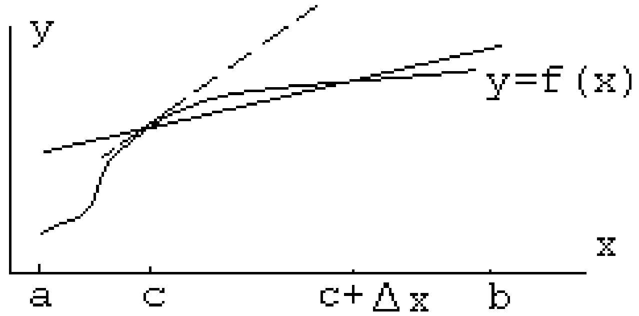
В случае дифференцируемости функции в точке соответствующая константа A имеет свое название: она называется **производной** функции $f(x)$ в точке a и обозначается $f'(a)$. Из определения также очевидно, что производная определяется с помощью предельного перехода следующим образом:

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Условие дифференцируемости имеет важные геометрический и физический смыслы.

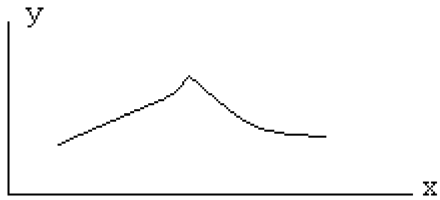
Задача о проведении касательной к кривой

Пусть заданная кривая является графиком непрерывной функции $y=f(x),\ x\in[a,b]$. Требуется провести касательную к этой кривой в точке $c\in(a,b)$. Заметим, что **касательная** – это прямая, получающаяся в пределе из хорд, проходящих через точки $(c, f(c))$ и $(c+\Delta x, f(c+\Delta x))$, когда $\Delta x\to 0$. Уравнение хорды – прямой, проходящей через две заданные различные точки, – имеет вид: $\frac{x-c}{(c+\Delta x)-c}=\frac{y-f(c)}{f(c+\Delta x)-f(c)}$ или $y=f(c)+\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}(x-c)$. Делая предельный переход при $\Delta x\to 0$, получим предельное значение углового коэффициента хорд – угловой коэффициент касательной: $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$. На рисунке касательная представлена пунктиром. Итак, $k=tg\alpha$, где α – угол, образованный касательной с положительным направлением оси OX.



Таким образом, уравнение касательной в точке $(c,f(c))$ имеет вид $y=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)$.

Очевидно, что существуют непрерывные кривые, в некоторых точках которых провести касательную невозможно.



Возникает вопрос: какое условие нужно наложить на функцию $f(x)$ в окрестности точки c, чтобы в соответствующей точке можно было провести касательную к графику этой функции. Существование касательной означает, что равны пределы отношения $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0\pm 0$, то есть, что существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)$. Это значит, что $f(c+\Delta x)-f(c)=f'(c)\Delta x+\Delta x\cdot a$, где $a\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Следовательно, $\Delta x\cdot a=\alpha-$ величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx. Таким образом, для того, чтобы можно было провести касательную к кривой $y=f(x),\ x\in[a,b]$ в точке $(c,f(c))$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке c.

Задача о вычислении мгновенной скорости

Предположим, что мы следим за прямолинейным движением точки, пройденный путь которой в зависимости от времени выражается формулой $S(t)$. Чтобы вычислить среднюю скорость движения точки на участке $[t_0, t_0+\Delta t]$, достаточно получить значение $\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$. Если теперь устремить Δt к нулю, мы получим, что отрезок выродится в точку, а средняя скорость по отрезку при существовании предела $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$ превратится в мгновенную скорость в точке t_0. Таким образом, производная функции $S(t)$, представляющей зависимость пути от времени, представляет мгновенную скорость в соответствующей точке.

Итак**,** **геометрическим** смыслом производной $f'(x_0)$ является тангенс угла наклона касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$,
физическим смыслом производной $f'(x_0)$ является скорость в момент $x=x_0$, когда зависимость длины пути y от скорости x задается функцией $y=f(x)$.

Дифференциал

Как было сказано выше, в случае дифференцируемости функции в точке второе слагаемое α в выражении приращения функции $\Delta f = f'(x_0)\Delta x+\alpha$ – величина более высокого порядка малости, чем величина Δx, а следовательно – в случае, когда $f'(x_0)\neq 0$, – и чем величина $f'\left(x_0\right)\Delta x$. Другими словами, **первое слагаемое в выражении приращения функции представляет основную часть приращения функции**. Называют его **дифференциалом функции** $y=f\left(x\right)$ в точке x_0 и обозначают $df(x_0)=f'\left(x_0\right)\Delta x.$ В целях единообразия и для того, чтобы подчеркнуть, что Δx – бесконечно малая величина, приращение аргумента Δx в этой формуле обозначают dx. Тогда $df = f'\left(x\right)dx$, откуда следует второе обозначение производной $f'\left(x\right)=\dfrac{df}{dx}$. Связь между приращением функции и ее дифференциалом изображена на рисунке 1.

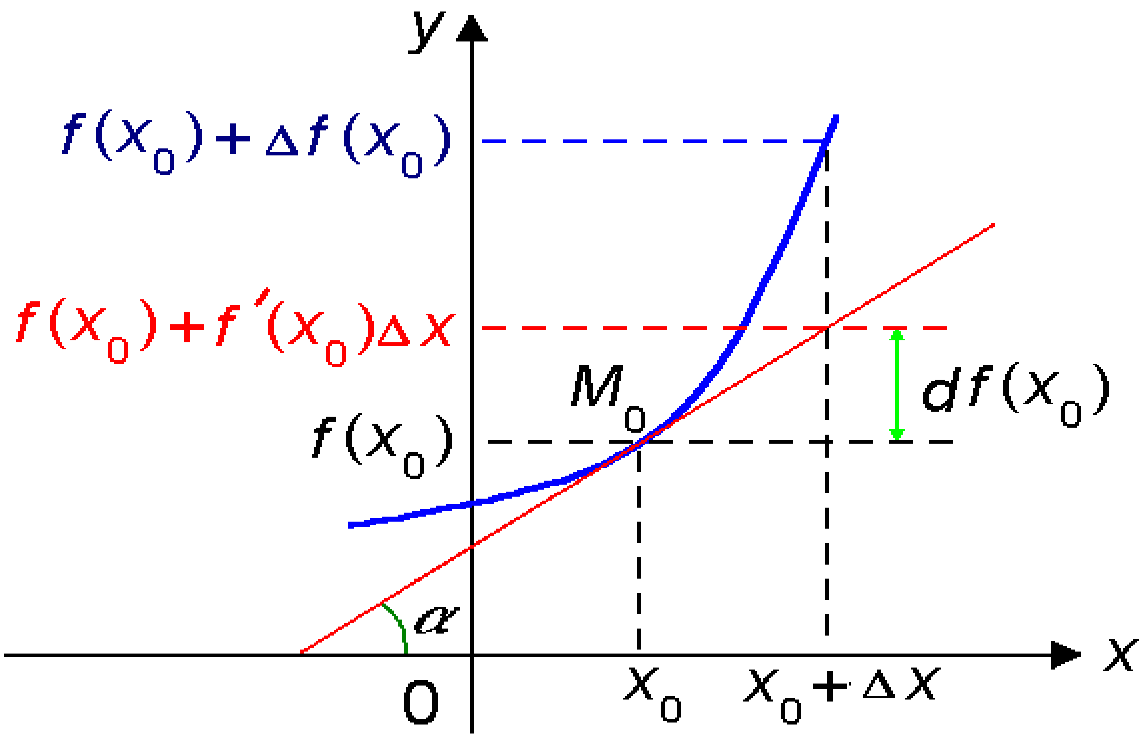


Рис. 1

Примеры получения производных

Применяя замечательные пределы и их следствия, получим

1. $$\sin' a = \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\cos\frac{x+a}{2}}{x-a} =$$
$$= \lim_{x-a\to 0}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2} = \cos a;$$

2. $$\cos' a = \lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{x-a} =$$
$$= -\lim_{x-a\to 0}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\lim_{x\to a}\sin\frac{x+a}{2} = -\sin a;$$

3. $$(e^x)'_{|a} = \lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{e^a(e^{x-a}-1)}{x-a} = e^a\lim_{x-a\to 0}\frac{(e^{x-a}-1)}{x-a} = e^a;$$

4. $\ln' a=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\dfrac{x}{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(1+\dfrac{x-a}{a})}{x-a}=$

$=\dfrac{1}{a}\lim\limits_{x-a\to 0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{x-a}{a})}{\dfrac{x-a}{a}}=\dfrac{1}{a};$

5. $(x^{\alpha})'_{|a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\alpha}-a^{\alpha}}{x-a}=a^{\alpha}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\dfrac{x}{a})^{\alpha}-1}{x-a}=a^{\alpha}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\dfrac{x-a}{a}+1)^{\alpha}-1}{x-a}=$

$=a^{\alpha-1}\lim\limits_{x-a\to 0}\dfrac{(\dfrac{x-a}{a}+1)^{\alpha}-1}{\dfrac{x-a}{a}}=\alpha a^{\alpha-1}.$

Производные и арифметические операции над функциями

Из условия дифференцируемости и из свойств пределов функций следуют свойства производных.

1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a. Тогда функция $f(x)+g(x)$ дифференцируема в точке a, причем $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$.

2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке a, $k\in\mathrm{R}$. Тогда функция $k\cdot f(x)$ дифференцируема в точке a, причем $(k\cdot f(x))'=k\cdot f'(x)$.

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a. Тогда функция $f(x)\cdot g(x)$ дифференцируема в точке a, причем $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке a, $g(a)\neq 0$. Тогда функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке a, причем $(\dfrac{f(x)}{g(x)})'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Покажем, как доказывается свойство 3. Обозначим $h(x)=f(x)\cdot g(x)$. Имеем

$$\Delta h=f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)=(f(x)-f(a))\cdot g(x)+f(a)\cdot(g(x)-g(a))=$$
$$=\Delta f\cdot g(x)+\Delta g\cdot f(a)=(f'(a)\Delta x+\alpha)\cdot g(x)+(g'(a)\Delta x+\beta)\cdot f(a)=$$
$$=(f'(a)\Delta x+\alpha)\cdot(g(a)+\Delta g)+(g'(a)\Delta x+\beta)\cdot f(a),$$

где α и β – величины более высокого порядка малости, чем Δx. Раскрывая скобки и собирая коэффициенты при Δx, получим следующее представление:

$$\Delta h = (f'(a)\cdot g(a) + g'(a)\cdot f(a))\cdot\Delta x + f'(a)\cdot\Delta x\cdot\Delta g + \alpha\cdot g(a) + \alpha\cdot\Delta g + \beta\cdot f(a) =$$
$$= (f'(a)\cdot g(a) + g'(a)\cdot f(a))\cdot\Delta x + \gamma,$$

где γ– величина более высокого порядка малости, чем Δx. В соответствии с условием дифференцируемости и выражением производной свойство 3 доказано.

Упражнение. В качестве приложения свойства 4 докажите равенства: $\mathrm{tg}'a = \dfrac{1}{\cos^2 a}$, $\mathrm{ctg}'a = -\dfrac{1}{\sin^2 a}$.

Производная сложной функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, $f(x_0) = y_0$. Пусть функция $g(y)$ дифференцируема в точке y_0. Тогда функция $h(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $h'(x_0) = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

Доказательство. Имеем

$$h(x) - h(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))\cdot(f(x) - f(x_0)) + \beta =$$
$$= g'(f(x_0))\cdot(f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \alpha) + \beta = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\cdot(x - x_0) + g'(f(x_0))\cdot\alpha +$$
$$+\beta = g'(y_0)\cdot f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \gamma,$$

где $\gamma = g'(f(x_0))\cdot\alpha + \beta$ – бесконечно малая величина высшего порядка малости по сравнению с $(x - x_0)$. Действительно, слагаемое $g'(f(x_0))\cdot\alpha$ – бесконечно малая величина высшего порядка малости по сравнению с $(x - x_0)$, так как сомножитель α обладает этим свойством. Слагаемое β – бесконечно малая величина высшего порядка малости по сравнению с $(f(x) - f(x_0))$. Поэтому

$$\lim_{x - x_0 \to 0}\frac{\beta}{(x - x_0)} = \lim_{x - x_0 \to 0}\frac{\beta}{(f(x) - f(x_0))}\cdot\frac{(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)} = 0.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Пример. Найдем производную $\ln|x| = \dfrac{1}{2}\ln x^2$. Пользуясь доказанным свойством, получим $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2}\cdot 2x = \dfrac{1}{x}$.

Производная обратной функции

Даны функция $y = f(x)$ и обратная ей функция $x = g(y)$, т.е. $x = g(f(x))$. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, тогда $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, при этом $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(g(y_0))}$.

Действительно, если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Теперь

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

Следовательно,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Пример. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Упражнение. В качестве приложения правила дифференцирования обратной функции докажите равенства

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\mathrm{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\mathrm{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Производная параметрически заданной функции

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, причем обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0 \in (t_1, t_2)$, $\varphi'(t_0) \neq 0$, $\varphi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$.

Вычислим $\dfrac{dy}{dx}$ в точке x_0.

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Итак, $y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

П р и м е р**.** Пусть $\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$, тогда $x'(t)=2(1-\cos t)$, $y'(t)=2\sin t$

и $y'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$.

Дифференцирование неявно заданных функций

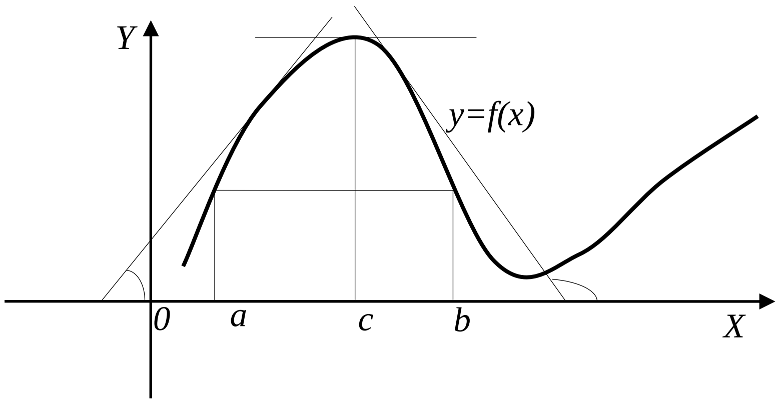
Если функция задана неявно, перед дифференцированием следует определиться, какую переменную считать аргументом. Пусть $x^2+y^2=9$. Считаем x независимой переменной, y – функцией. Можно из уравнения определить $y=-\sqrt{9-x^2}$ или $y=\sqrt{9-x^2}$ и после этого взять производную. Но переход от неявно к явно заданной функции возможен не всегда. Продифференцируем обе части уравнения $x^2+y^2=9$ по переменной x, используя при этом правило дифференцирования сложных функций $\left(x^2+y^2\right)'_x=(9)'_x \Rightarrow 2x+2y\,y'=0$, откуда следует $y'=-\dfrac{x}{y}$. Теперь можно найти производную в любой конкретной точке.

«Логарифмическое» дифференцирование

Здесь имеется ввиду дифференцирование с предварительным логарифмированием функции. Пусть $y=x^{tgx}$. При вычислении производной нет возможности использовать таблицу производных, так как эта функция не является ни степенной, ни показательной. Прологарифмируем обе части уравнения $\ln y=\ln\left(x^{\mathrm{tg}x}\right) \Rightarrow \ln y=\mathrm{tg}x\ln x$. В результате от явного задания функции перешли к неявному, при этом функция стала более удобной для дифференцирования. Учитывая, что y – функция от x, дифференцируя обе части соотношения $(\ln y)=(tgx\ln x)$, получим $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{\ln x}{\cos^2 x}+\dfrac{tgx}{x}$. В результате $y'=\left(\dfrac{\ln x}{\cos^2 x}+\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}\right)y=\left(\dfrac{\ln x}{\cos^2 x}+\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}\right)x^{\mathrm{tg}x}$.

Теоремы о дифференцируемых функциях

Терема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема внутри интервала $(a\,,b)$, непрерывна на отрезке $[a,b]$, причем $f(a) = f(b)$, тогда найдется хотя бы одна точка c внутри интервала $(a\,,b)$, в которой производная функции обращается в нуль, то есть $f'(c) = 0,\ c \in (a\,,b)$.



На рисунке приведена геометрическая иллюстрация теоремы.

Доказательство. 1. В случае, когда $f(x) \equiv f(a) = f(b)$ вывод теоремы очевиден, и в качестве точки c можно взять любую внутреннюю точку интервала $(a\,,b)$.

2. Пусть функция $f(x)$ не является постоянной на отрезке $[a,b]$. По свойству непрерывных на отрезке функций существует внутренняя точка $c \in (a,b)$, в которой функция принимает либо минимальное, либо максимальное на отрезке значение. Пусть для определенности это будет максимальное значение: $f(x) - f(c) < 0,\ \forall x \in [a,b]$. Значит, $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$, $\dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$. Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0$. Поэтому единственная возможность дифференцируемости функции в точке c: $f'(c) = 0$.

Теорема Коши. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы на интервале $(a\,,b)$ и $g(b) \neq g(a)$, то существует такая точка $c \in (a\,,b)$, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

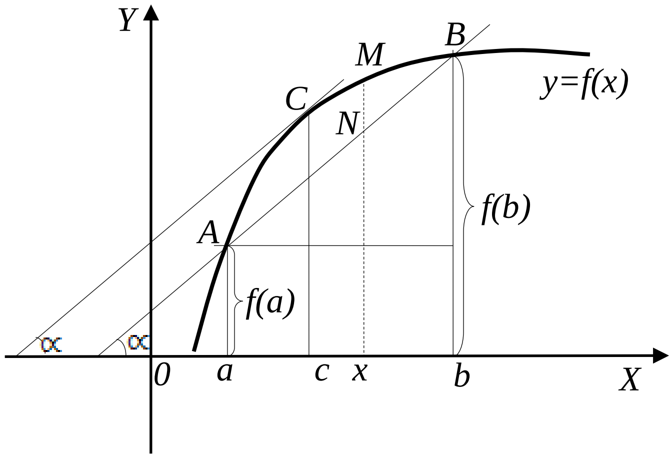
$$\Phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{[g(b) - g(a)]}[g(x) - g(a)].$$

Она дифференцируема, так как кроме функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в нее входят только постоянные, причем, $\Phi(a) = \Phi(b) = f(a)$, то есть введенная функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Тогда $\Phi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{[g(b) - g(a)]} g'(c) = 0$, теорема доказана.

Важным частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$ является

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то существует такая точка $c \in (a, b)$, для которой справедливо:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Последняя формула называется **формулой конечных приращений.** Эта формула используется для оценки приращения функции на отрезке: $| f(b) - f(a)| \le \max\limits_{c \in [a,b]} f'(c) \cdot |b - a|$.

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Правило Лопиталя

(Правило раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть требуется вычислить предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем функции в числителе и знаменателе дифференцируемы в окрестности точки a и имеет место одна из неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, тогда если существует предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, возможно, равный бесконечности, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство (для неопределенности $\frac{0}{0}$). Поскольку $f(a) = g(a) = 0$, (иначе не будет указанной неопределенности), из теоремы Коши имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Здесь использовалось, что c находится между a и x, следовательно, при $x\to a$ и $c\to a$.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-3}{2x}=\dfrac{1}{4}.$

Раньше это пример решался с помощью тождественного преобразования

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)}{(x+2)}=\frac{1}{4}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$ (первый замечательный предел).

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{2x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2}=1.$

Раньше этот пример решался сравнением степеней переменного в числителе и в знаменателе, когда мы выносили наибольшую степень из числителя и знаменателя, соответственно.

Чтобы получить предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ с помощью MAXIMы, пользуются командой **limit(f(x),x,a)**.

Теорема о возрастании (убывании) функции $y=f(x)$ на интервале

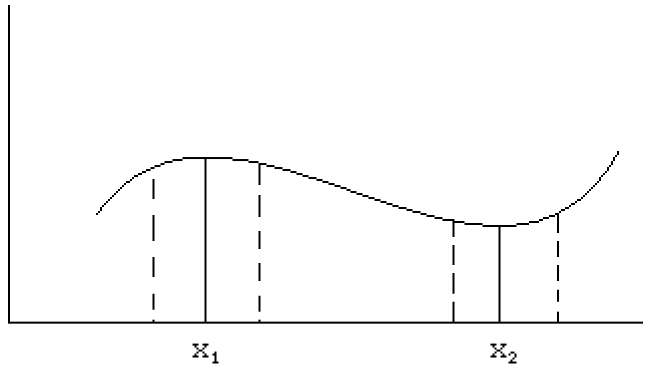
Необходимое условие возрастания (убывания) функции на интервале: Если функция $y=f(x)$, имеющая производную на интервале (a,b), возрастает (убывает) на этом интервале, то ее производная $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) на этом отрезке. Доказательство следует из формулы для производной $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, где знаки числителя и знаменателя совпадают (противоположны), а при предельном переходе знак неравенства становится нестрогим.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале: Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), причем $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $a < x < b$, то эта функция возрастает (убывает) на этом отрезке.
Доказательство легко получается применением теоремы Лагранжа.

Экстремумы.

1. Функция $y = f(x)$ в точке x_1 имеет **максимум**, если для всех x из некоторого интервала, содержащего точку x_1, выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$ при $x \neq x_1$.

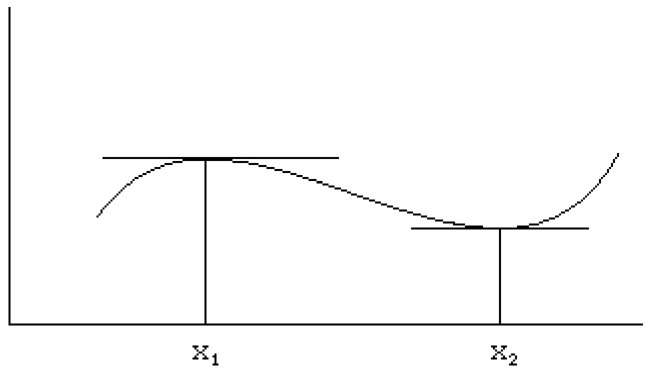
Определение 2. Функция $y = f(x)$ в точке x_2 имеет **минимум**, если для всех x из некоторого интервала, содержащего точку x_2, выполняется неравенство $f(x) > f(x_2)$ при $x \neq x_2$.



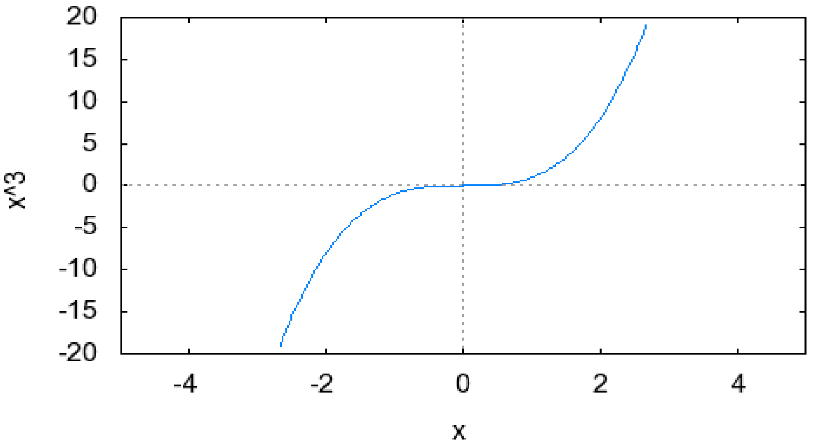
Определение 3. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Теорема о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции. Необходимым условием экстремума дифференцируемой в точке c функции является $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть точка c – точка максимума, тогда $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$ и $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$. Поскольку при вычислении производной пределы слева и справа должны совпадать, то $f'(c) = 0$.

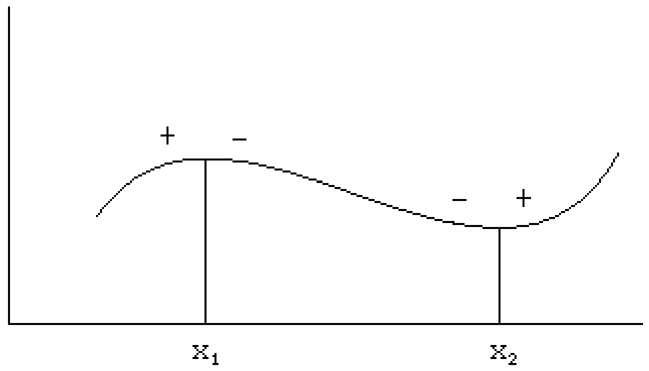


Точки, в которых производная функции обращается в ноль, называются **критическими точками**. Критические точки функции не обязательно являются точками экстремума. Например, если $f(x)=x^3$, то $f'(x)=3x^2=0$ при $x=0$, но точка $x=0$ не является точкой экстремума, что видно из рисунка.



Теорема 1 о достаточном условии существования максимума и минимума функции.

Если производная функции при переходе через точку c меняет знак с + на –, это точка максимума. Если знак производной меняется с – на +, имеем точку минимума. Доказательство следует из теоремы о возрастании (убывании) функции.



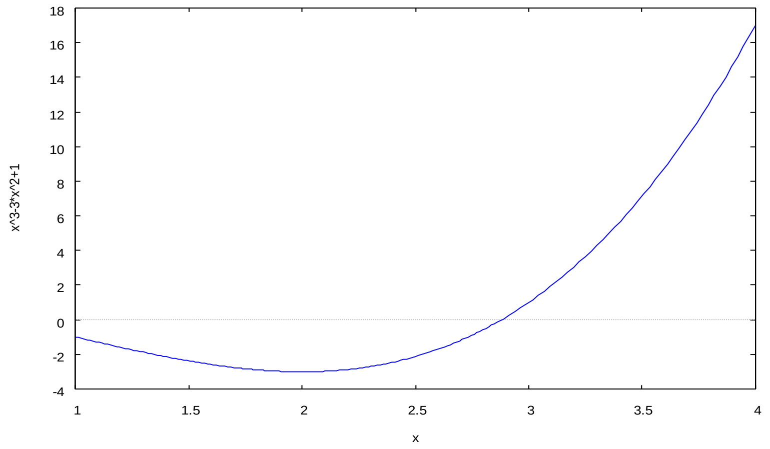
П р и м е р. $y=\frac{1}{4}x^4-x^3$. Найдем критические точки этой функции. Так как $y'=x^3-3x^2=x^2(x-3)$, то критическими точками являются $x_1=0$, $x_2=3$. Применим первую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y'(x)<0$ при $x<0$ и при $0<x<3$, следовательно, в точке 0 экстремума нет. $y'(x)>0$ при $x>3$, следовательно, в точке 3 минимум функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Следует отличать минимумы и максимумы функций от наибольшего и наименьшего ее значений на заданном отрезке. Функция может не иметь экстремумов на некотором отрезке, а наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке она имеет всегда.
Чтобы определить наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, необходимо подсчитать значения функции в точках экстремума, входящих в исследуемую область, а также в граничных ее точках и выбрать среди них наименьшее и наибольшее значения.

П р и м е р. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x^2+1$ на отрезке $[1,4]$.
1) Находим критические точки: рассмотрим уравнение $y'=0$, приводящее к уравнению $3x(x-2)=0$. Получаем две критические точки, одна из которых ($x=0$) не входит в исследуемую область.
2) Добавляем к оставшейся критической точке $x=2$ граничные точки – имеем набор точек $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$.
3) Определяем в этих точках значения функции $y_1=-1$, $y_2=-3$, $y_3=17$.
Таким образом, наименьшее в заданной области значение функции (-3) реализуется при $x=2$, наибольшее (17) при $x=4$.

Задача о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции одного вещественного переменного на отрезке с развитием компьютерных технологий перестает быть очень актуальной. С помощью программ MAXIMA мы можем легко построить график исследуемой функции и найти на нем все интересующие нас точки. Для того, чтобы построить график функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке [1,4], следует ввести команду **plot2d(x^3-3*x^2+1,[x,1,4])** и нажать Shift+Enter. Мы получим график



из которого видно, что наименьшее значение на отрезке функция принимает в точке 2. Наибольшее – в точке 4.

Приложение производных для приближенного решения уравнений

1. Для определения участков нахождения корней многочлена следует найти участки монотонности многочлена. Если на концах отрезка монотонности многочлен имеет разные по знаку значения, то на этом отрезке находится единственный корень.

П р и м е р. Найти отрезки, где находятся различные корни уравнения $x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$. Найдя производную функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, получим участки монотонности этой функции. Действительно, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. Очевидно, что функция $f(x)$ возрастает при $x \in (3, +\infty)$ и при $x \in (-\infty, 1)$. На участке $(1,3)$ функция $f(x)$ убывает. Имеем $f(1) = 1$, $f(3) = -3$, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Следовательно, один корень находится на участке $(-\infty, 1)$, второй – на участке $(1,3)$, а третий – на участке $(3, +\infty)$.

2. Определив участок, на котором находится корень многочлена, можно для нахождения приближенного значения корня воспользоваться **методом итераций**. Для применения этого метода x_0 уравнение $f(x) = 0$ заменяют на уравнение $x + cf(x) = x$ и подбирают константу c так, чтобы функция $\varphi(x) = x + cf(x)$ на выбранном участке обладала свойством $|\varphi'(x)| \le q < 1$. В соответствии с формулой конечных приращений отсюда следует, что $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < |x_1 - x_2|$ для любой пары значений x_1 и x_2 с данного участка. Таким образом, нахождение решения уравнения $f(x) = 0$ мы свели к решению уравнения $\varphi(x) = x$. Возьмем за нулевое приближение решения любое число x_0 из выбранного отрезка. Следующим приближением будет

$x_1=\varphi(x_0)$. Затем $x_2=\varphi(x_1),\ldots$. Полученную последовательность значений называют итерациями. В соответствии с условием на функцию $\varphi(x)$ итерации будут, не выходя за пределы участка, постепенно приближаться друг к другу, так как $|x_{k+1}-x_k|=|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})|<|x_k-x_{k-1}|$. Предел такой последовательности итераций (a) существует и удовлетворяет соотношению $\varphi(a)=a$.

П р и м е р. Найдем приближенное значение корня уравнения $x^3-6x^2+9x-3=0$, находящегося на интервале $(1,3)$.

Сначала подберем константу c так, чтобы функция $\varphi(x)=x+c(x^3-6x^2+9x-3)$ обладала свойством $|\varphi'(x)|\le q<1$ на отрезке $[1+\varepsilon,3-\varepsilon]$, где ε – положительная малая величина. Поскольку $-3\le(x^3-6x^2+9x-3)'<0$ на интервале $(1,3)$, то за c можно взять $1/4$. Итак, $\varphi(x)=\frac{x^3}{4}-\frac{3x^2}{2}+\frac{13}{4}x-\frac{3}{4}$. Возьмем за начальное приближение $x_0=2$. Теперь

$x_1=\varphi(x_0)=\frac{7}{4}$. Следующая итерация: $x_2=\varphi(x_1)=\frac{431}{256}$ ….

Компьютер находит корень на указанном ему отрезке значительно быстрее. Достаточно в MAXIMе набрать команду **find_root(x^3-6*x^2+9*x-3,x,1,3)** , и мгновенно получим ответ 1.65270364466614.

Производные высших порядков

Определение. Второй производной функции $y=f(x)$ (или производной второго порядка) называется производная ее первой производной $y''=(y')'$.
Если физический смысл первой производной – есть скорость изменения функции, то вторая производная определяет скорость изменения скорости изменения функции, то есть ускорение. Производные более высоких порядков определяются аналогично:

$$y'''=(y'')',\ldots,y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$$

П р и м е р ы.

1. Если $y=x^5$, то $y'=5x^4$, $y''=20x^3$, $y'''=60x^2$,…. Если $P_n(x)$ – алгебраический многочлен степени n, то $P_n^{(k)}(x)\equiv0$ при $k>n$.

2. Если $y=\sin x$, то $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$, $y'''=-\cos x$, $y^{IV}=\sin x,\ldots,$ $y^{(n)}=\sin(x+\frac{\pi}{2}n).$

3. Если $y=\cos x$, то $y^{(n)}=\cos(x+\frac{\pi}{2}n).$

4.$(\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$

Производная второго порядка функции, заданной параметрически.

Пусть $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $t\in[t_1,t_2]$. Известно, что $y'(x)=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Используя эту же формулу с заменой функции на первую производную, получим $y''(x)=\dfrac{(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})'}{\varphi'(t)}=\dfrac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi')^3}$.

Дифференциалы высших порядков

Аналогично производным определяются дифференциалы высших порядков. Дифференциал второго порядка – это дифференциал от дифференциала, т.к. $df(x)=f(x)'dx$, тогда

$d^2f(x)=d(df(x))=(df(x))'dx=(f'(x)dx)'dx$,

dx - бесконечно малое приращение, не зависящее от *x*, поэтому производная от него считается как от постоянной. Т.е.

$d^2f(x)=(f'(x))'dx^2=f''(x)\,dx^2$.

Подобным образом получим $d^nf(x)=f^{(n)}(x)\,dx^n$.

Формула Тейлора

Предположим, что функция $y=f(x)$ имеет производную первого порядка в точке a. Из определения дифференцируемости функции в точке a имеем $f(a+\Delta x)-f(a)=f'(a)\Delta x+\beta$, где β – бесконечно малая величина более высокого порядка малости по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$. Поэтому для точек x, близких к точке a справедлива формула

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),$$

обеспечивающая **первое приближение** функции. Эта формула позволяет получать очень грубые приближенные значения функций в точках, так как ее можно трактовать как замену функции $f(x)$ многочленом первой степени в окрестности той точки a, где значение функции и ее производной легко найти. Очевидно, что формула эта применима в очень малой окрестности точки a.

Пример. $\sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{16-1} = 2 \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{1}{16}} \approx 2 \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(-\frac{1}{16}\right)\right] = \frac{63}{32}$. Здесь мы использовали формулу первого приближения при $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$, $a = 0$, $x = -\frac{1}{16}$. Поэтому $f(a) = 1$, $f'(a) = \frac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{3}{4}}$ и $(x-a) = -\frac{1}{16}$.

Возникают вопросы: 1) нельзя ли использовать многочлены более высоких степеней для более точного приближения функции? 2) как оценить ошибку приближения?

Формула Тейлора дает ответы на эти вопросы.

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет все производные до $n+1$порядка в некотором промежутке, содержащем точку a. В таком случае для всех значений x из этого промежутка справедлива формула

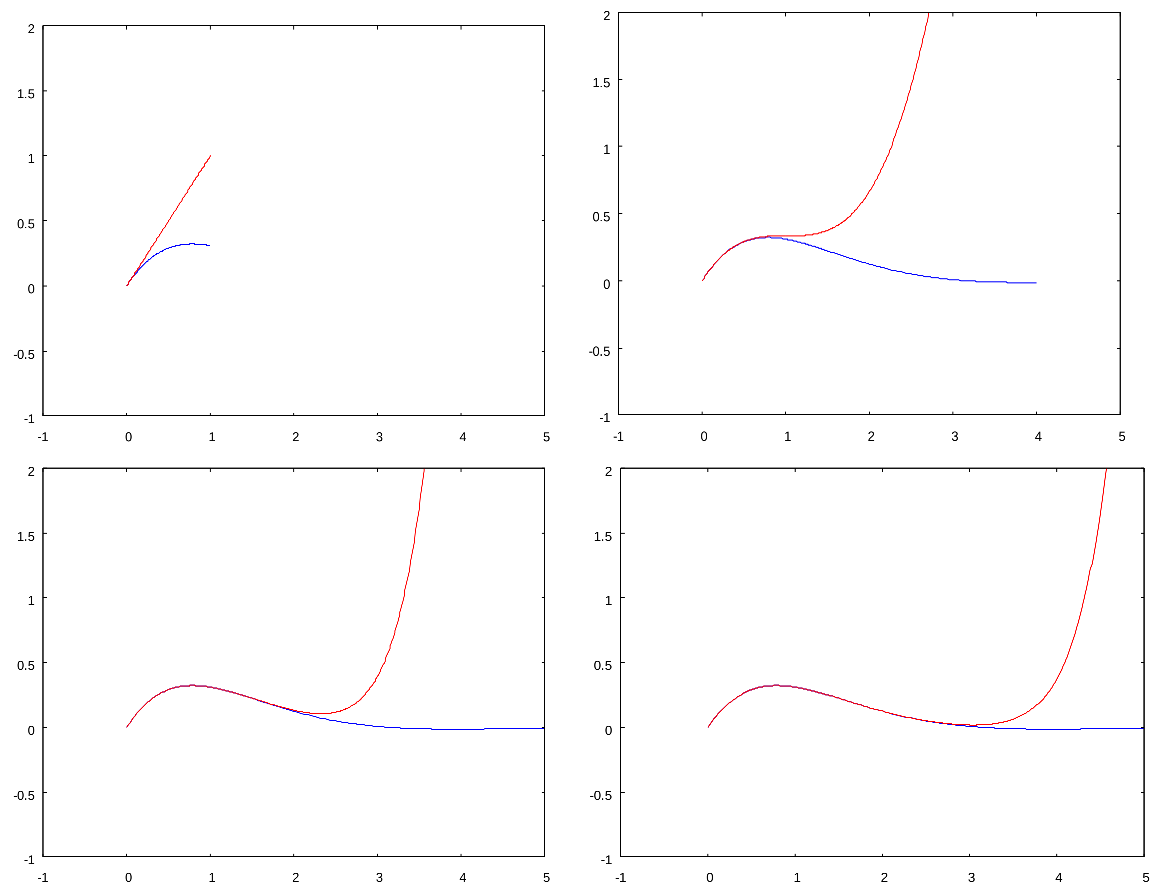
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 +$$

$$+ \frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x),$$

где остаточный член $r(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ и $\theta \in (0,1)$.

Таким образом, функция приближается многочленом, и ошибка вычислений, обусловленная заменой значения функции значением многочлена, равна остаточному члену. Поскольку точное значение $\theta \in (0,1)$ не может быть найдено, значения функций вычисляются приближенно, и остаточный член служит не для подсчета, а для оценки ошибки. Последняя формула является обобщением формулы конечных приращений Лагранжа.

Следующий пример демонстрирует, как приближается функция $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$ (голубая линия) многочленами по формуле Тейлора (красная линия) в окрестности точки $a = 0$ при увеличении степеней многочленов от первой до одиннадцатой.



Формулу Тейлора можно записать через дифференциалы:

$$f(x)=f(a)+\frac{df(a)}{1!}+\frac{d^2f(a)}{2!}+\frac{d^3f(a)}{3!}+$$

$$+\frac{d^4f(a)}{4!}+\cdots+\frac{d^nf(a)}{n!}+r_n(x).$$

Для приложений к вычислению пределов используют **локальную** формулу Тейлора, имеющую вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+$$

$$+\frac{f^{(IV)}(a)}{4!}(x-a)^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right).$$

Такое представление остаточного члена показывает, что остаточный член есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(x-a)^n$.

Локальная формула Тейлора является обобщением формулы связи приращения функции и дифференциала функции в точке.

В частности, при $a=0$ формула Тейлора называется формулой Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Примеры разложений элементарных функций по формуле Маклорена.

Пример 1. Рассмотрим функцию e^x. Нетрудно заметить, что любая производная этой функции равна самой функции, а $f^{(n)}(0)=e^0=1$. В соответствии с формулой Маклорена

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)|\le e^{\max\{x,0\}}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. В свою очередь для оценки величины $e^{\max\{x,0\}}$ можно брать 1 при $x<0$ и 3^x при $x>0$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x$. Так как $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{IV}(x)=\sin x$, $f^{V}(x)=\cos x$ и т.д., получим $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{IV}(0)=0$, $f^{V}(0)=1$ ….

Первые члены формулы Маклорена принимают вид

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

Анализируя первые члены разложения, записываем его общий член $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$. В результате

$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)|\le\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$, так как $|\sin(x+(2n+1)\frac{\pi}{2})|\le 1$.

Пример 3. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f(x)=\cos x$.

$f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, $f'''(x)=\sin x$, $f^{IV}(x)=\cos x$,

$f^{V}(x)=-\sin x$, $f^{VI}(x)=-\cos x$.

Очевидно, что

$f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$, $f'''(0)=0$,

$f^{IV}(0)=1$, $f^{V}(0)=0$, $f^{VI}(0)=-1$.

В соответствии с формулой Маклорена получаем

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$: $|r_n(x)|\le\frac{|x|^{2(n+1)}}{(2n+2)!}$, так как $|\cos(x+(2n+2)\frac{\pi}{2})|\le 1$.

Пример 4. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f\left(x\right)=\ln(1+x)$. Поскольку $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^{n}}$, $(0!=1)$, имеем $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, поэтому получим разложение

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+r_n(x).$$

Оценим $r_n(x)$. Согласно приведенной формуле остаточного члена имеем $|r_n(x)|=\dfrac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)|1+\theta x|^{(n+1)}}$. Поэтому для $x>0$ получим оценку $|r_n(x)|\leq\dfrac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)}$, но для $x<0$ использование приведенной формулы остаточного члена не годится. Для таких значений x используют другие формы остаточного члена.

Пример 5. Получим разложение по формуле Маклорена функции $f\left(x\right)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\notin\mathrm{N}$. Дифференцируя, найдем

$$\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

поэтому $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$, и имеем разложение

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Для оценки остаточного члена при n, больших или равных целой части α, приведенная форма остаточного члена годится также только для $x>0$. В этом случае оценка следующая: $|r_n(x)|\leq\dfrac{|\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n)|}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$.

Теорема 2 о достаточном условии существования максимума и минимума функции. Пусть $f'(x_0)=0$, тогда при $x=x_0$ функция имеет максимум, если $f''(x_0)<0$ и минимум, если $f''(x_0)>0$.

Доказательство.

Из формулы Тейлора в окрестности точки экстремума x_0, в которой удержано три первых члена, имеем

$$\Delta y=f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2}f''\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2+o\left(\left(x-x_0\right)^2\right).$$

Поскольку $f'(x_0)=0$, что следует из условия теоремы, а остаточный член r по определению меньше предыдущего члена формулы, знак приращения функции независимо от того, точка x находится левее, или правее x_0, определяется знаком второй производной. Когда $f''(x_0)>0$, получаем $f(x)-f(x_0)>0$, следовательно, x_0 точка минимума функции, если $f''(x_0)<0$, значит $f(x)-f(x_0)<0$, тогда x_0 - точка максимума функции.

Пример. $y=\cos^2 x$. Найдем критические точки этой функции. Так как $y'=-\sin 2x$, то критическими точками этой функции являются точки $x_k=\dfrac{\pi k}{2}$. Применим вторую теорему о достаточном условии. Очевидно, что $y''(x_k)=-2\cos \pi k$, поэтому $x_k=\dfrac{\pi k}{2}$ является точкой локального максимума при k четном и точкой локального минимума при k нечетном.

Пример применения локальной формулы Маклорена для вычисления предела

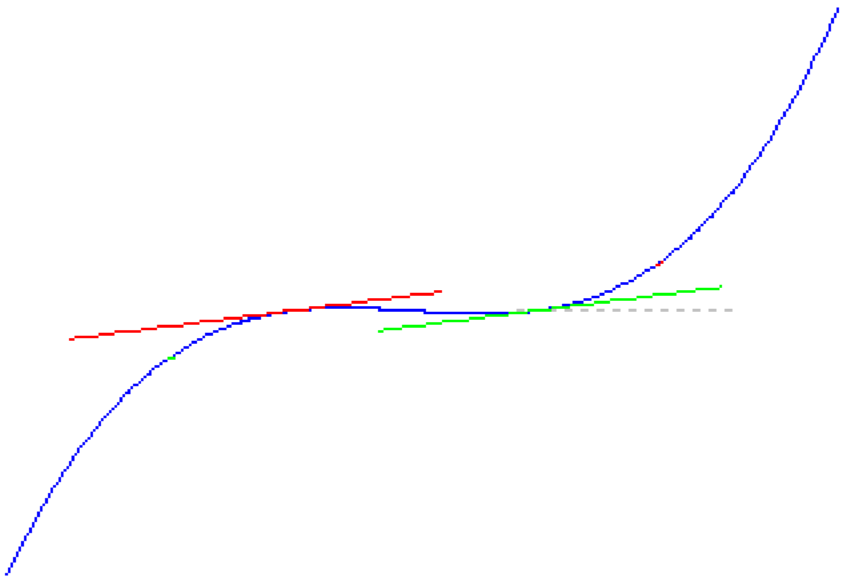
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4))}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

Выпуклость и вогнутость кривой

Определение 1. Кривая называется **выпуклой** в точке, если в некоторой окрестности данной точки график касательной к кривой в этой точке находится **выше** графика самой функции.

Определение 2. Кривая называется **вогнутой** в точке, если в некоторой окрестности данной точки график касательной к кривой в этой точке находится **ниже** графика самой функции.



Возникает вопрос: как найти точки выпуклости и вогнутости кривой?

Теорема об условии выпуклости (вогнутости) кривой в точке.

Если для кривой, задаваемой уравнением $y = f(x)$, справедливо $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), то кривая в точке x_0 выпукла (вогнута).

Доказательство. Уравнение касательной к кривой в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Рассмотрим представление заданной функции в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

В окрестности точки x_0 (то есть при малых по модулю значениях $(x - x_0)$ знак разности $Y - f(x)$ противоположен знаку $f''(x_0)$. Следовательно, если $f''(x_0) < 0$ знак $Y - f(x)$ положителен, и касательная выше кривой, если $f''(x_0) > 0$ знак $Y - f(x)$ отрицателен, и касательная ниже кривой.

В случае, если при переходе с одной стороны от точки x_0 на другую сторону знак разности $Y - f(x)$ меняет знак, такая точка называется **точкой перегиба**. В случае непрерывности второй производной в точке перегиба она обращается в ноль в этой точке.

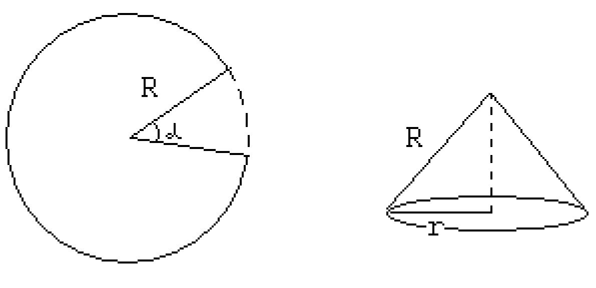
Задачи о нахождении наибольших и наименьших значений функций одного переменного

Задача 1. Владелец грузового судна должен перевезти груз по реке из одного порта в другой. Расходы этого владельца складываются из расходов на содержание экипажа и из затрат на топливо. Следует выяснить, какую скорость движения судна следует выбрать, чтобы плавание было наиболее экономичным, так как увеличение скорости ведет к большим тратам на топливо (расходы на топливо пропорциональны кубу скорости), а уменьшение скорости, а значит, увеличение времени пути приведет к большим тратам на питание команды.

Решение. Обозначим суточные расходы на топливо $k \cdot V^3$, а суточные расходы на питание команды a. Пусть S – расстояние, которое должна пройти баржа. Тогда время в пути равно $\frac{S}{V}$. Следовательно, путевые расходы составляют $F(V) = (k \cdot V^3 + a) \cdot \frac{S}{V}$.

Нам нужно найти такое положительное значение V_0, которое обеспечит минимум введенной функции. Используя теорему о необходимом условии экстремума, приравняем нулю производную введенной функции: $(2k \cdot V - \frac{a}{V^2}) \cdot S = 0$. Получим точку экстремума $V_0 = \sqrt[3]{a/(2k)}$. То, что мы получили минимум, а не максимум, следует из поведения функции $F(V)$ при значениях переменной V, близких к 0 и к бесконечности: функция $F(V)$ при таких значениях переменной стремится к положительной бесконечности. Следовательно, единственный экстремум этой функции может быть только минимумом. Таким образом, оптимальная скорость движения баржи по реке $V_0 = \sqrt[3]{a/(2k)}$.

Задача 2. Есть диск из фильтрующего материала. Какой сектор следует вырезать из этого диска, чтобы из оставшейся части диска можно было свернуть коническую воронку наибольшей вместимости?

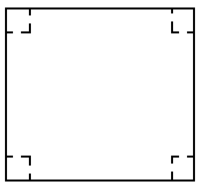


Р е ш е н и е. Очевидно, что сектор определяется углом при вершине. Обозначим этот угол α. Известно, что объем конуса (воронки) равен, в

соответствии с введенными обозначениями, $V=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$. Выразим через α радиус основания конуса r, сравнив площадь оставшейся части диска и площадь боковой поверхности конуса. Площадь оставшейся части диска равна $R^2\frac{2\pi-\alpha}{2}$. Площадь боковой поверхности конуса равна πRr. Из соотношения $R^2\frac{2\pi-\alpha}{2}=\pi Rr$ получим $r=R\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}$. Следовательно, $V(\alpha)=\frac{1}{3}\pi R^3(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi})^2\sqrt{1-(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi})^2}$.
Вследствие громоздкости полученного выражения перейдем к новой переменной $t=\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}$. Теперь $V(t)=\frac{1}{3}\pi R^3t^2\sqrt{1-t^2}$, $0\le t\le 1$. Найдем критическую точку этой функции на отрезке [0,1], именно она является точкой максимума, так как на концах отрезка функция обращается в нуль. Критической точкой является $t_0=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Следовательно, угол при вершине сектора, который нужно вырезать, равен $\alpha_0=2\pi(1-\sqrt{\frac{2}{3}})$.

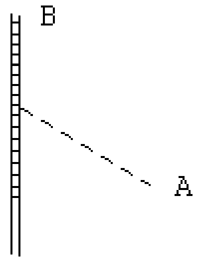
Задачи для самостоятельного решения.

1. Сеткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади.
2. Из квадратного листа картона со стороной a вырезаются по углам одинаковые квадраты, и из оставшейся части склеивается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

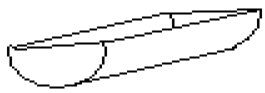


3. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом $32м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.
4. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?
5. Из круглого бревна диаметра d вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b, высота h. При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность ее пропорциональна $b\cdot h^2$?

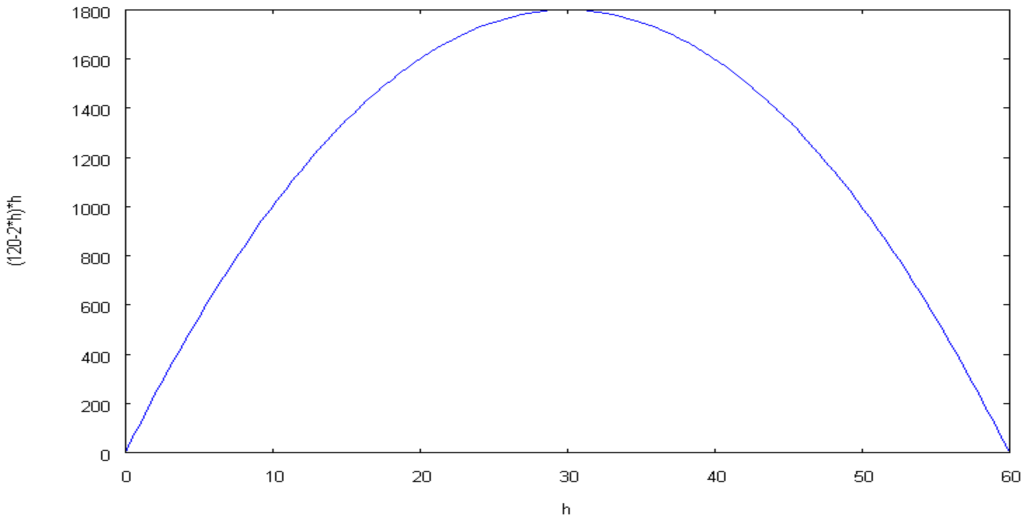
6. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город B, считая по кратчайшему расстоянию, на a км. Под каким углом к железной дороге следует построить подъездной путь от завода, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза тонны груза на расстояние 1 км составляет по подъездному пути p руб., а по железной дороге q руб. ($p > q$) и город B расположен на b км севернее завода A?



7. К каналу ширины a подходит под прямым углом канал ширины b. Бревна какой наибольшей длины можно сплавлять по этой системе каналов?
8. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна S, имеет наибольшую вместимость?



В предложенных задачах присутствуют параметры. В том случае, когда исследуемая функция не содержит параметров, легко найти наибольшие и наименьшие значения с помощью графика. В настоящее время в связи с наличием пакетов компьютерных программ нет необходимости строить графики вручную. Так, пакет программ MAXIMA мгновенно рисует графики явно заданных функций с помощью команды plot2d. Например, при решении задачи 1 для самостоятельного решения следовало найти наибольшее значение функции $S(h)=(120-2\cdot h)\cdot h$. Поскольку $0<h<60$, построим график функции $S(h)$ на отрезке $[0,60]$ с помощью команды **plot2d((120-2*h)*h,[h,0,60])**, набрав эту команду и нажав Shift+Enter. Мы получим график вида

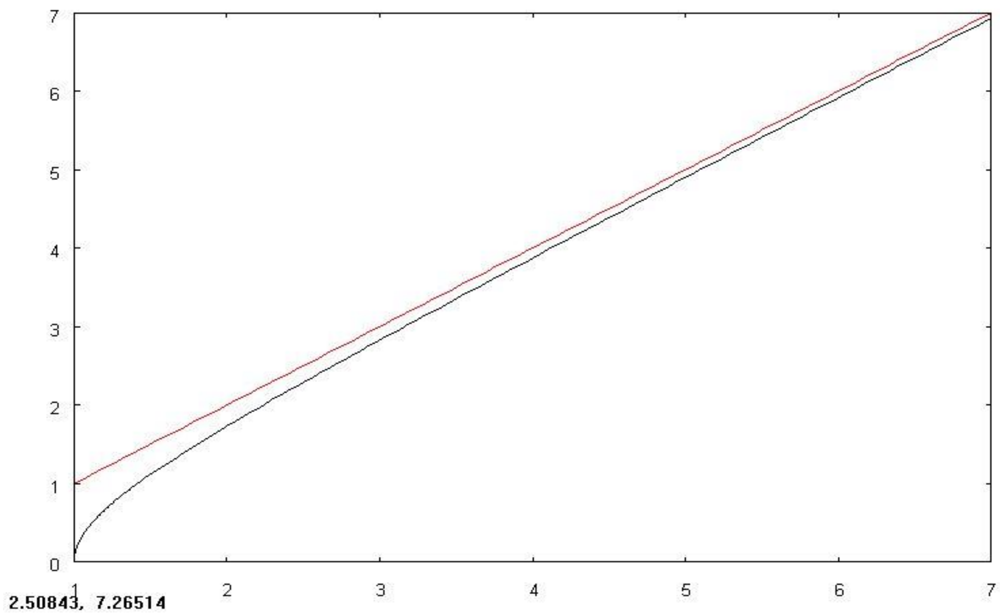


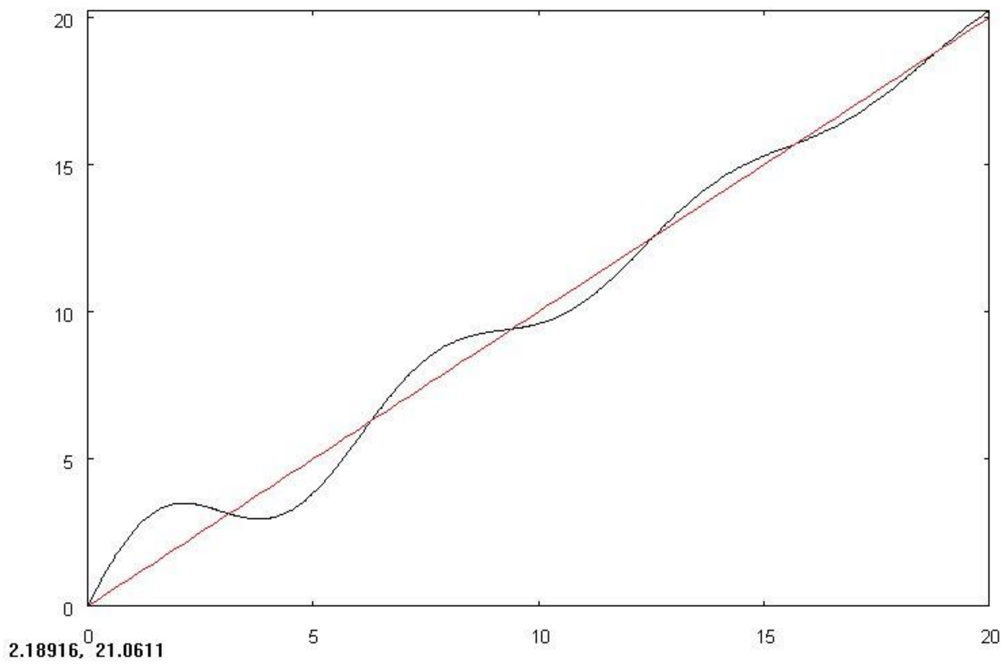
В соответствии с этим графиком максимальное значение функции достигается при $h = 30$.

Асимптоты кривой

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние δ от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю.

На двух следующих рисунках асимптоты окрашены в красный цвет





Асимптоты бывают вертикальными, они показывают поведение функции в окрестности особой точки, когда $y \to \pm\infty$, и наклонными, дающими представление о поведении функции при $x \to \pm\infty$.

Если x_0 – особая точка, то уравнение вертикальной асимптоты $x = x_0$.

Теорема. Кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту при $x \to \infty$, уравнение которой $y = kx + b$, если принимают существуют пределы: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$.

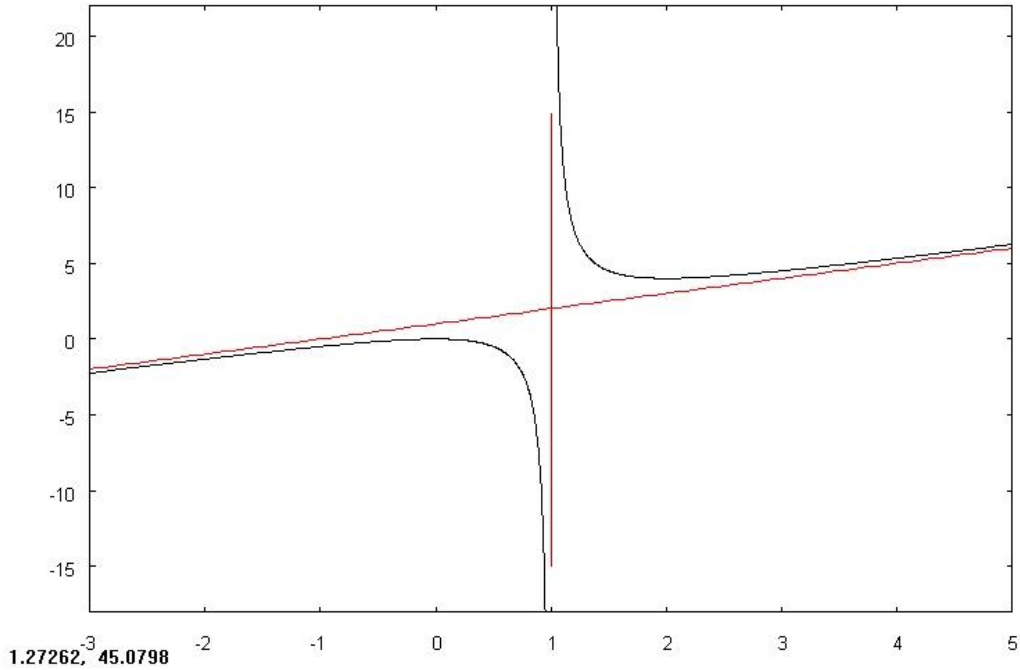
Доказательство. Из определения асимптоты следует $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to \infty$, то есть $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$. Остается определить параметры уравнения асимптоты. Для этого вычислим $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k$, $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\infty} [b + \alpha(x)] = b$. Итак, если оба предела существуют и конечны, параметры прямой k и b определены, причем точки этой прямой бесконечно сближаются с точками кривой при $x \to \infty$.

Пример. $y = \frac{x^2}{x-1}$. Ясно, что $x = 1$ – уравнение вертикальной асимптоты.

Определим $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1$,

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-1)}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=1.$$

Наклонная асимптота при $x\to\infty$ имеет уравнение $y=x+1$.



Исследование функции, построение ее графика

Алгоритм исследования.

I. Исследование самой функции. Необходимо установить

1) Область определения функции, ее особые точки, вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения кривой с осями координат

3) Функция четная, нечетная или общего вида

4) Функция периодическая или не периодическая

II. Исследование производной функции. Необходимо определить

1) Точки максимума и минимума функции

2) Интервалы возрастания и убывания функции

III. Исследование второй производной

1) Точки перегиба

2) Интервалы выпуклости и вогнутости функции

IV. Исследование поведения функции при $x \to \pm\infty$. Наклонные асимптоты.

В качестве примера рассмотрим функцию $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

I.
1. Область существования функции – вся числовая ось, то есть $(-\infty; \infty)$. Следовательно, у этой кривой нет особых точек, нет и вертикальных асимптот.
2. Кривая пересекает оси координат в начале координат. Следовательно, первая характерная точка графика $(0;0)$.
3. Кривая нечетная: $\dfrac{4(-x)}{(-x)^2+1} = -\dfrac{4x}{x^2+1}$, следовательно, она симметричная относительно начала координат.
4. Функция непериодическая.

II. 1. Определим первую производную $y' = \dfrac{4(x^2+1-2xx)}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$, приравниваем ее нулю, откуда получаем еще две характерные (критические) точки $x=-1$, $x=1$, координаты этих точек на плоскости $(-1;-1)$, $(1;1)$. Рассмотрим первую из этих точек $x=-1$, левее ее производная $y'<0$, правее $y'>0$, следовательно, это точка минимума функции. Левее точки $x=1$ производная $y'>0$ правее она отрицательна, значит это точка максимума функции.
2. Знак первой производной определяется выражением $\left(-(x^2-1)\right)$, следовательно, она положительна на интервале $(-1;1)$, в остальных областях она отрицательна. Итак, функция убывает на интервале $(-\infty;-1)$, возрастает на интервале $(-1;1)$, затем опять убывает на $(1;\infty)$.

III. 1. Определяем вторую производную функции:

$$y' = -4\frac{2x(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)^4} = -8x\frac{x^2+1-2x^2+2}{(x^2+1)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

Приравниваем производную нулю и получаем еще три характерные точки функции, одна из которых $x=0$ уже известна. Две другие $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$. На координатной плоскости они имеют координаты $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\sqrt{3})$. Знак второй производной определяется ее числителем. Левее точки $x=-\sqrt{3}$ она отрицательна, правее $y''>0$. Следовательно, это точка перегиба. Левее точки $x=0$ имеем $y''>0$, правее $y''<0$., еще одна точка перегиба. Левее точки $x=\sqrt{3}$ получаем $y''<0$, правее $y''>0$, третья точка перегиба.

2. Поскольку других точек, в которых вторая производная меняет знак у функции нет, можно утверждать, что на интервале $\left(-\infty\,;-\sqrt{3}\right)$ кривая выпуклая, на интервале $\left(-\sqrt{3}\,;0\right)$ кривая вогнутая, на интервале $\left(0\,;\sqrt{3}\right)$ кривая опять выпуклая и, наконец, на интервале $\left(\sqrt{3}\,;\infty\right)$ - вогнутая.

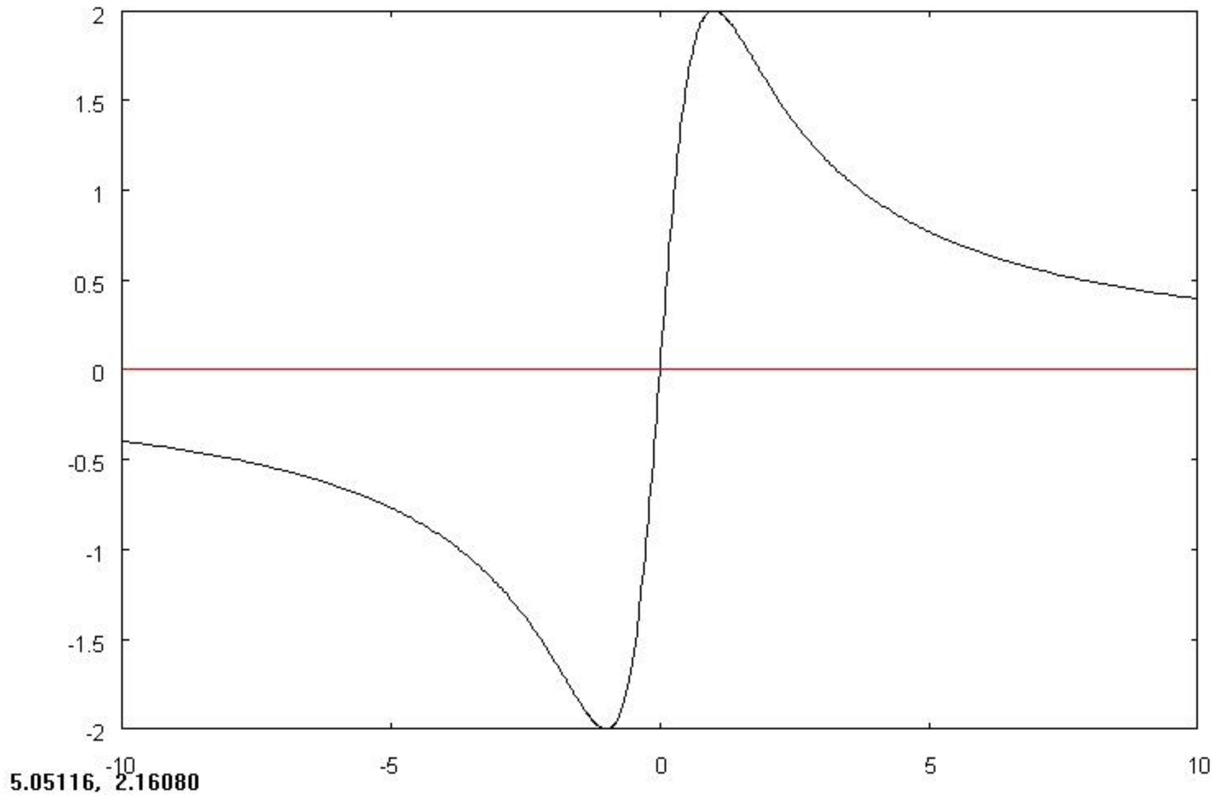
IY. Определяем наклонные асимптоты кривой, уравнение асимптоты $y = kx + b$, причем

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(x^2+1\right)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(x^2+1\right)} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\left(x^2+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0,$$

Поскольку уравнение асимптоты $y = 0$, асимптотой функции является ось OX.

В итоге график функции имеет вид



На рисунке отчетливо наблюдаются точки максимума и минимума функции и три точки перегиба. Видим также, что кривая «прижимается» к оси OX при x, стремящимся как к плюс-, так и к минус- бесконечности, следовательно, асимптота единая.

Рассмотрим **пример** при другом оформлении результата. Пусть $y = \dfrac{36x}{(x-1)^2}$. Область существования данной функции – вся числовая ось, кроме точки $x = 1$. Функция непериодическая (нет тригонометрических функций), общего вида (не четная, не нечетная).

Определим вначале все характерные точки графика, то есть точки пересечения с осями координат, особые точки, точки максимума и минимума, точки перегиба. Для этого вычислим первую и вторую производные

$$y' = 36\frac{(x-1)^2 - 2(x-1)x}{(x-1)^4} = 36\frac{(x-1) - 2x}{(x-1)^3} = -\frac{36(x+1)}{(x-1)^3},$$

$$y'' = -36\frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^6} = -36\frac{(x-1) - 3(x+1)}{(x-1)^4} = \frac{72(x+2)}{(x-1)^4}.$$

Исследуя функцию и ее производные, устанавливаем, что имеется одна особая точка $x = 1$ и еще три характерных точки $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$. Составим таблицу по результатам исследования

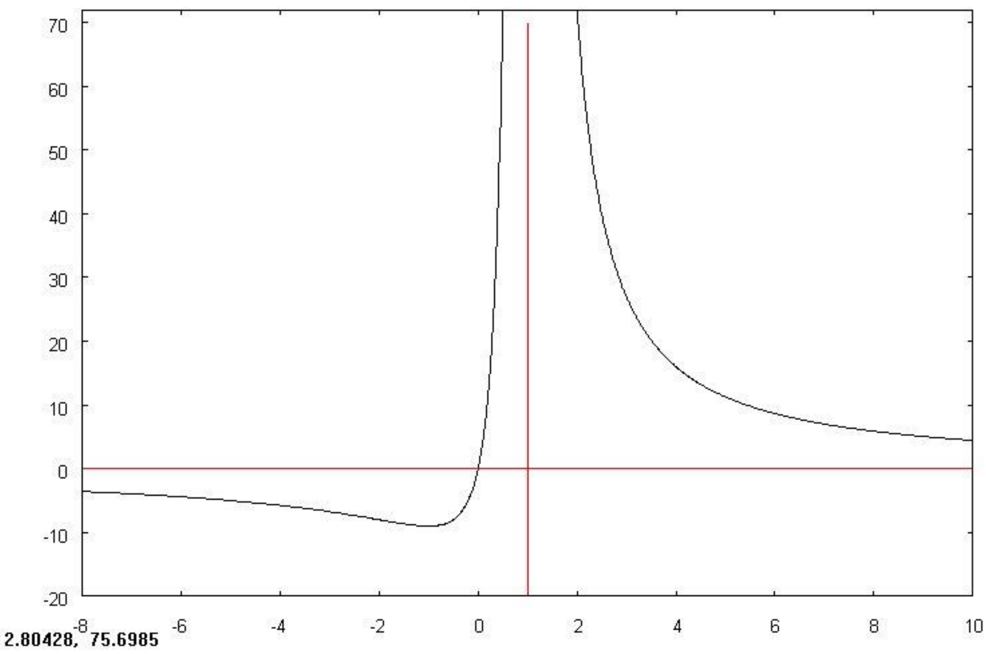
x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y	<0	-8	<0	-9	<0	0	>0	н.с.	>0
y'	<0		<0	0	>0		>0	н.с.	<0
y''	<0	0	>0	>0	>0		>0	н.с.	>0
Примеч.	$y<0$, убыв., выпукл.	Т. Пер.	$y<0$, убыв., вогн.	Min	$y<0$, возр., вогн.		$y>0$, возр., вогн.	Н.с.	$y>0$, убыв., вогн.

В таблице собрана вся информация о функции, примечания позволяют проще построить ее график.

Определим наклонную асимптоту кривой $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{36}{(x-1)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{36x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{36}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 0.$$



70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
2.80428, 75.6985