Ф. Г. Авхадиев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Avkhadiev@kpfu.ru

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ В ОБЛАСТЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть Ω — область на расширенной плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, имеющая более двух граничных точек. В каждой такой области метрика Пуанкаре с плотностью $\lambda_\Omega(z)$ определяет гиперболическую геометрию с гауссовой кривизной, равной -4. В таких областях, т. е. в областях гиперболического типа на расширенной комплексной плоскости мы изучаем неравенства типа Харди, когда весовые функции являются степенями функции расстояния $\mathrm{dist}(z, \partial\Omega) := \inf_{\zeta\in\partial\Omega} |z - \zeta|$ или гиперболического радиуса, определяемого равенством $R(z, \Omega) = 1/\lambda_\Omega(z)$. В работе используются некоторые факты из спектральной теории оператора Лапласа- Бельтрами на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны, в частности, известные формулы Элстродта-Паттерсона-Сулливана, а также предшествующие результаты Фернандеса и Родригеса [1] и автора [2]. Опишем кратко основные результаты.

1) Доказаны следующие неравенства типа Харди:

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|\, dxdy}{\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)} \geqslant 2 \iint_\Omega \frac{|u|\, dxdy}{R^2}, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

$$\iint_\Omega \frac{|(\nabla u, \nabla R)|^p}{R^{2-p}}\, dxdy \geqslant \frac{4^p}{p^p} \iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^2}\, dxdy, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega).$$

Здесь $R = R(z, \Omega)$ – гиперболический радиус области Ω в точке $z = x + iy$, u – вещественнозначная функция, $(\nabla u, \nabla R)$ – скалярное произведение градиентов функций. Приведенные неравенства универсальны в том смысле, что они справедливы для любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ гиперболического типа при любом $p \in [1, \infty)$. С использованием этих неравенств доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ *– произвольная область гиперболического типа,* $s \in (2, \infty)$, $p \in [2, \infty)$. *Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^1(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{R^{s-p}(z,\Omega)} dxdy \geqslant \frac{4^p (s-2)^{p/2}}{p^p} \iint_\Omega \frac{|u|^p}{R^s(z,\Omega)} dxdy,$$

где $z = x + iy$. *При* $p = 2$ *и любом* $s \in (3, \infty)$ *постоянная перед интегралом в правой части является точной для любой ограниченной конечно-связной области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *с гладкой границей.*

2) Доказано следующее новое одномерное неравенство типа Харди. **Лемма 1.** *Для любой абсолютно непрерывной функции* $v : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющей условиям* $v(0) = v(\pi) = 0$, $v \not\equiv 0$, $v' \in L^2(0, \pi)$, *имеет место неравенство*

$$\int_0^\pi v'^2(\theta)\, d\theta > \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{v^2(\theta)}{\sin^2 \theta}\, d\theta + \frac{1}{4} \int_0^\pi v^2(\theta)\, d\theta.$$

Постоянные $1/4$ *при обоих интегралах в правой части являются точными в следующем смысле: если одна из них фиксирована, то другую нельзя заменить на* $(1 + \varepsilon_0)/4$ *при любом* $\varepsilon_0 > 0$.

С применением этой леммы и ряда фактов из геометрической теории функций в случае односвязных и двусвязных областей решена задача Брезиса-Маркуса об усилении неравенств типа Харди дополнительным слагаемым, подчеркивающим отсутствие экстремальных функций в исходных вариационных неравенствах с точными константами. Приведем здесь лишь один результат, относящийся к выпуклым областям.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *– выпуклая область, не совпадающая со всей плоскостью,* g *– одно из однолистных конформных отображений* Ω *на верхнюю полуплоскость. Тогда для любой вещественнозначной функции* $u \in C_0^1(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \geqslant \frac{1}{4}\iint_\Omega \frac{|u|^2}{\operatorname{dist}^2(z,\partial\Omega)} dxdy + \frac{1}{4}\iint_\Omega |u|^2 \left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|^2 dxdy,$$

где $z = x + iy$*. Обе постоянные* $1/4$ *являются точными.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00351-а).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Fernández J. L., Rodríguez J. M., *The exponent of convergence of Riemann surfaces, bass Riemann surfaces* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I. Mathematica. – 1990 –V. 15 – P. 165–182. 2. Avkhadiev F. G., *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* // Lobachevskii J. Math. – 2006 –V. 21 – P. 3–31.