

УДК 519.6

# Анализ устойчивости нелинейных солитонных моделей

© Авторы, 2015

© ЗАО «Издательство «Радиотехника», 2015

**О.В. Дружинина** – д.ф.-м.н., профессор, гл. науч. сотрудник, Институт проблем информатики РАН (Москва)  
E-mail: ovdruzh@mail.ru

**З.Л. Шулиманова** – д.ф.-м.н., зав. кафедрой, Московский государственный университет путей сообщения  
E-mail: zinaida110@yandex.ru

**В.Л. Воронцова** – к.ф.-м.н., доцент, Институт управления, экономики и финансов КФУ (г. Казань)

**Т.Ф. Климова** – к.т.н., доцент, Московский государственный университет путей сообщения

Рассмотрены вопросы устойчивости солитонных моделей. Дан сравнительный анализ понятий устойчивости солитонов и приведены модификации основных теорем об устойчивости по двум мерам. Для анализа устойчивости солитонов применен метод А.А. Шестакова математического моделирования распределенных систем с помощью абстрактных эволюционных уравнений. Исследована глобальная асимптотическая устойчивость солитонных решений на основе свойств функционалов Ляпунова.

**Ключевые слова:** солитон, устойчивость, нелинейная модель с распределенными параметрами, метод функций Ляпунова.

Questions of stability of soliton models are considered. A comparative analysis of solitons stability concepts is presented and the modifications of the stability basic theorems are given in accordance with two measures. For stability analysis method of A.A. Shestakov of mathematical modeling of distributed systems by the aid of abstract evolutional equations is used. The global asymptotic stability of soliton solutions is studied on the basis of Lyapunov functionals properties.

**Keywords:** soliton, stability, nonlinear model with distributed parameters, the method of Lyapunov functions.

Важной отличительной чертой нелинейных волновых процессов является то, что при сильном возбуждении нелинейной динамической системы в ней могут возникать локализованные структуры – солитоны. Под солитоном понимают локализованное стационарное или стационарное в среднем возмущение однородной или пространственно-периодической нелинейной среды [1–3]. Как известно, солитон обладает следующими свойствами: 1) локализован в конечной области; 2) распространяется без деформации, перенося энергию, импульс, момент импульса; 3) сохраняет свою структуру при взаимодействии с другим солитоном; 4) может образовывать связанные состояния, ансамбли. В нелинейной среде профиль солитона определяется двумя конкурирующими процессами: расплыванием волны из-за дисперсии среды и опрокидыванием нарастающего волнового фронта из-за нелинейности.

Солитоноподобные возбуждения возникают в динамических системах при достаточно сильном воздействии на них сторонних сил, а также в результате нелинейных эффектов самодействия. Действительно, при слабом воздействии на систему (равно как и при возможности пренебречь эффектами самодействия) эволюция системы хорошо описывается с помощью линейного анализа. В свою очередь, линейные уравнения допускают в качестве решения задачи Коши, отвечающей локализованному в малой области пространства регулярному начальному условию, только расплывающиеся волновые пакеты. В основе этого расплывания лежит принцип суперпозиции, характерный для линейных систем. Однако при сильном воздействии на систему или значительных эффектах самодействия этот принцип нарушается ввиду того, что дальнейшая эволюция системы подчинена существенно нелинейным законам.

В течение достаточно большого периода под солитоном понималась уединенная волна как волновой пакет неизменной формы, распространяющийся с постоянной скоростью по поверхности тяжелой жидкости конечной глубины в плазме. С учетом построения и изучения новых моделей в последние десятилетия под определение солитонов попадает множество разнообразных динамических объектов. Первая классификация солитонов может быть сделана по числу пространственных измерений, вдоль которых происходит локализация стационарного возмущения нелинейной среды. К одномерным солитонам относятся уединенные волны в жидкостях, доменные стенки в ферро- и антиферромагнетиках,  $2\pi$ -импульсы и солитоны огибающей в нелинейной оптике, локализованные моды коллективной проводимости в молекулах органических полупроводников и в одномерных металлах, солитоны (кванты магнитного потока) в джозефсоновских контактах в сверхпроводниках и т.д. К двумерным солитонам относят дислокации в кристаллической решетке, дисклинации в жидких кристаллах, вихревые структуры в тонком слое сверхтекучей жидкости, магнитные трубы (вихри Абрикосова) в сверхпроводниках второго рода, антициклональные вихри в геофизической гидродинамике, в том числе «большое красное пятно» на Юпитере, каналы самофокусировки в нелинейной оптике. К трехмерным солитонам относят тороидальные вихревые структуры в ферромагнетиках и толстом слое сверхтекучего гелия, солитонные

модели элементарных частиц, черные дыры в теории гравитации. В квантовой теории поля рассматривают инстантоны – солитоны, локализованные в четырехмерном пространстве-времени.

Как известно, математически солитоны представляют собой локализованные стационарные решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных или их обобщений (дифференциально-разностных, интегро-дифференциальных и другого типа уравнений). Различные явления описываются такими типами уравнений, как уравнение Кортевега–де Фриса, уравнение синус–Гордона, уравнение Шредингера. Линейные уравнения (кроме одномерного волнового уравнения) не имеют локализованных стационарных решений. Солитоны представляют собой существенно нелинейные объекты, поведение и свойства которых принципиально отличаются от поведения волновых пакетов малой амплитуды. Различие особенно сильно, если солитон обладает топологическим зарядом, т.е. если конфигурация волнового поля в присутствии солитона топологически отлична от конфигурации невозмущенного состояния. Значительная часть уравнений, имеющих солитонные решения, принадлежит к классу уравнений, в котором применим метод обратной задачи рассеяния. Большинство из этих уравнений сводится к интегрируемым гамильтоновым системам.

Важнейшей является проблема устойчивости солитонов, которая изучалась в [3, 4] и в других работах. Понятие устойчивости движения связано с требованием непрерывности изучаемого движения системы по отношению к каким-либо ее возмущениям, природа которых может быть неизвестной. В зависимости от типа этих возмущений используют различные понятия устойчивости, причем в литературе встречается несколько десятков определений [5–14]. Эффективным методом анализа устойчивости солитонов, в том числе плазменных солитонных решений, является метод функций Ляпунова [6–12]. В применении к солитонам этот метод известен в нескольких вариантах: энергетический метод Арнольда, функциональный метод Захарова–Кузнецова и др. Эти методы отличаются лишь способом доказательства существования минимума функционала Ляпунова. Применение теорем Ляпунова–Мовчана об устойчивости по двум метрикам и Четаева–Мовчана о неустойчивости по двум метрикам позволяет получить новые условия устойчивости солитонных решений.

В обзорах по устойчивости солитонов [3, 4] приведены основные результаты в этом направлении. Существенный вклад в данное направление внесен научной школой Ю.П. Рыбакова. В [4] приведен аналитический обзор результатов, рассмотрены вопросы устойчивости солитонных моделей, дан сравнительный анализ понятий устойчивости солитонов и приведены модификации основных теорем об устойчивости по двум мерам: теорема Ляпунова–Мовчана об устойчивости и теорема Четаева–Мовчана о неустойчивости. Сформулированы условия энергетической неустойчивости солитонов и исследован ряд вопросов устойчивости скалярных заряженных солитонов и устойчивости плазменных солитонов.

Цель работы – исследовать устойчивость солитонных решений с помощью абстрактных эволюционных уравнений и абстрактных динамических (полудинамических) систем.

Пусть  $\varphi(t, x)$  – многокомпонентная полевая функция со значениями в  $R^n$ , рассматриваемая как элемент банаухова пространства  $B$  и подчиняющаяся эволюционному уравнению типа

$$\partial_t = \hat{F}(\varphi), \quad (1)$$

где  $\hat{F}$  – нелинейный оператор.

Будем предполагать, что при заданных начальных условиях типа  $\varphi_{t=0} = \varphi_0(x)$  (1) допускает единственное решение солитонного типа

$$\varphi(t, x) = \hat{S}_t[\varphi_0], \quad (2)$$

где  $\hat{S}_t$  – эволюционный оператор с полугрупповыми свойствами, т.е.

$$\hat{S}_{t_1} [\hat{S}_{t_2} [\varphi_0]] = \hat{S}_{t_1+t_2} [\varphi_0], \quad t_i \geq 0. \quad (3)$$

Отметим, что понятие устойчивости заданного невозмущенного движения  $\varphi \equiv u = u(t, x)$  тесно связано с корректностью задачи Коши по Адамару. Чтобы определить данное понятие, введем две метрики в пространстве функций, описывающих возмущения поля

$$\xi(t, x) = \varphi(t, x) - u(t, x). \quad (4)$$

Пусть метрика  $\rho_0(\xi_0)$  задает расстояние в пространстве начальных возмущений  $\xi_0$ , а метрика  $\rho(\xi)$  – в пространстве текущих возмущений  $\xi$ . В обычных предположениях

$$\rho_0(\xi_0) \geq \rho(\xi), \quad (5)$$

т.е. метрика  $\rho_0(\xi_0)$  является более сильной, чем метрика  $\rho(\xi)$ .

Задача Коши для (1) называется корректной по Адамару, если для любого  $t \in [0, T]$ ,  $T < \infty$ , из  $\rho_0(\xi_0) \rightarrow 0$  следует  $\rho(\xi) \rightarrow 0$ . Корректность задачи Коши по Адамару соответствует устойчивости на конечном интервале времени  $T$ .

Далее зададим метрику  $\rho_f$  для возмущения  $\hat{f}(\varphi)$ , т.е.  $\rho_f = \rho_f[\hat{f}(\varphi)]$ , где  $\partial_t \varphi - \hat{F}(\varphi) = \hat{f}(\varphi)$ . Решение  $u(t, x)$  называется *устойчивым по двум метрикам*  $\rho_0, \rho_f$  при постоянно действующих возмущениях  $\hat{f}(\varphi)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $\delta_1(\varepsilon) > 0, \delta_2(\varepsilon) > 0$  такие, что из неравенств  $\rho_0(\xi_0) < \delta_1$  и  $\rho_f[\hat{f}(\varphi)] < \delta_2$  вытекает неравенство  $\rho(\xi) < \varepsilon \quad \forall t > 0$ . Решение  $u(t, x)$  асимптотически устойчиво по двум метрикам, если оно устойчиво и, кроме того,  $\rho(\xi) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

При изучении солитонных моделей используется также понятие *орбитальной устойчивости*, в основном при изучении свойств не одного солитонного решения  $u(t, x)$ , а их совокупности  $U = \{u\}$ , задаваемой с помощью групповых параметров  $\alpha$ , так что  $U = \{\hat{T}_g(\alpha)u | g \in G\}$ , где  $G$  – группа симметрии. В этом случае текущая метрика понимается как  $\inf_{u \in U} \rho(\varphi - u)$ , с учетом расстояния от поля  $\varphi$  до множества  $U$  – орбиты группы  $G$ . При этом следует различать устойчивые множества и аттракторы (притягивающие множества), для которых  $\rho(\xi) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Асимптотически устойчивое множество обладает свойствами притяжения и устойчивости одновременно. Однако можно привести примеры, когда множество является притягивающим и неустойчивым.

Солитонное решение  $u(t, x)$  называется *устойчивым в смысле Ляпунова по метрикам*  $\rho_0, \rho$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что из неравенства  $\rho_0(\xi_0) < \delta$  вытекает неравенство  $\rho(\xi) < \varepsilon$  для всех  $t > 0$ .

Основными теоремами метода функций Ляпунова, применяемыми для исследования устойчивости солитонов, являются теорема Ляпунова–Мовчана об устойчивости (теорема 1) и теорема Четаева–Мовчана о неустойчивости (теорема 2).

**Теорема 1.** Решение  $u \in U$  устойчиво по метрикам  $\rho_0, \rho$  тогда и только тогда, когда в некоторой его окрестности  $\rho_0 < \alpha$  существует функция Ляпунова  $V[\varphi]$  со следующими свойствами: 1)  $V$  положительно определена по  $\rho(\xi)$ ; 2)  $V$  непрерывна по  $\rho_0$ ; 3)  $V$  не растет со временем вдоль движения.

**Теорема 2.** Для того чтобы решение  $u \in U$  было неустойчиво по метрикам  $\rho_0, \rho$ , необходимо и достаточно, чтобы существовала функция Четаева  $W[\varphi]$  со следующими свойствами: 1)  $W[\varphi]$  непрерывна по  $\rho_0$ ; 2)  $W[\varphi]$  ограничена по  $\rho$ ; 3)  $W[\varphi]$  растет со временем в области  $W > 0$ .

Для изучения устойчивости солитонных решений необходимо изучить структуру второй вариации функции Ляпунова. При этом эффективными являются вириальные теоремы Хобарта–Деррика [4]. Пусть  $V[\varphi]$  – функция с критической точкой  $\varphi = u(x)$ , т.е.  $\delta V[u] = 0$ . Выбирая возмущение солитона в виде масштабных преобразований  $\varphi_\lambda = u(\lambda x)$ , получим

$$\delta\varphi = \xi = \delta\lambda \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=1}. \quad (6)$$

В случае представления функции  $V[\varphi]$  в виде суммы

$$V[\varphi] = \sum_{v=-n_1}^{n_2} V^{(v)}(\lambda), \quad (7)$$

где  $V^{(v)}(\lambda)$  – однородная функция масштабного параметра  $\lambda$  степени  $v$ , имеют место соотношения

$$\frac{\delta V[u]}{\delta \lambda} = \sum_{v=-n_1}^{n_2} \frac{\partial V^{(v)}}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=1} = \sum_{v=-n_1}^{n_2} v V^{(v)} \Big|_{\lambda=1} = 0. \quad (8)$$

Соотношения (8) составляют содержание первой вириальной теоремы Хобарта–Деррика [4]. С учетом (8) вычислим теперь вариацию  $\delta^2 V$ :

$$\frac{\delta^2 V[u]}{\delta \lambda^2} = \sum_{v=-n_1}^{n_2} \frac{\partial^2 V^{(v)}}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=1} = \sum_{v=-n_1}^{n_2} v(v-1) V^{(v)} \Big|_{\lambda=1} = \sum_{v=-n_1}^{n_2} v^2 V^{(v)} \Big|_{\lambda=1}. \quad (9)$$

Соотношения (9) составляют содержание второй вириальной теоремы Хобарта–Деррика [4].

Рассмотрим пример функции Ляпунова  $V[\varphi]$  в пространстве  $D$  измерений:

$$V[\varphi] = \int d^D x (\nabla \varphi)^2 + \int d^D x F(\varphi). \quad (10)$$

В соответствии с (7) получим  $V[\varphi] = V^{(2-D)}(\lambda) + V^{(-D)}(\lambda)$ , а вириальные тождества (8) и (9) примут вид  $\frac{\delta V}{\delta \lambda} = (2-D)V^{(2-D)} - DV^{(-D)} = 0$ ,  $\frac{\delta^2 V}{\delta \lambda^2} = (2-D)^2 V^{(2-D)} + D^2 V^{(-D)} = 2(2-D)V^{(2-D)}$ . Из первого равенства следует, что для  $D \geq 3$   $V^{(-D)} < 0$ , а из второго вытекает, что  $\delta^2 V < 0$  для масштабных деформаций (растяжений). Таким образом, статические солитоны в моделях с функциями типа (10) энергетически неустойчивы для  $D \geq 3$ .

Солитонное решение  $u(t, x)$  называется стационарным, если оно удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\delta V}{\delta \varphi} = 0, \quad \frac{\delta^2 V}{\delta \varphi^2} = 0, \quad (11)$$

где  $V[\varphi]$  – аддитивная функция вида (10).

В [4] показано, что нетопологические многомерные ( $D \geq 2$ ) солитоны стационарного типа энергетически неустойчивы. Следовательно, если ограничиться аддитивными функциями Ляпунова, то могут существовать только условно устойчивые многомерные стационарные солитоны, т.е. устойчивые лишь при некоторых дополнительных ограничениях на начальные возмущения  $\xi_0$ .

Рассмотрим солитонную модель, описываемую уравнением синус-Гордона:

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + d \sin u = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in R^+, \quad c > 0, \quad d \in R, \quad (12)$$

где  $u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad \forall t \in R^+$ .

Определим пространство и операторы в виде

$$\hat{W}_2^n(0, 1) := \left\{ y \in W_2^n : \partial^m y(0) = \partial^m y(1) = 0, \quad m = 0, 2, 4, \dots, n-1 \right\},$$

$$A_1 y := (v, -cv + \partial^2 u), \quad y \in \text{Dom } A := \hat{W}_2^2(0, 1) \times \hat{W}_2^1(0, 1), \quad A_2 y(x) := (0, -d \sin u(x)) \quad \text{п.в.} \quad x \in [0, 1],$$

$$y = (u, v) \in X := W_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1), \quad \|y\|^2 x := \int_0^1 [\partial u(x)]^2 + |v(x)|^2 dx, \quad A := A_1 + A_2.$$

Нетрудно показать, что для операторов, введенных для модели (12), справедливы следующие свойства [8]:

1) оператор  $-A_1$  аккретивен, а оператор  $A$  компактен;

2) оператор  $A_2 : X \rightarrow X$  есть генератор линейной динамической системы  $T_1(t) : X \rightarrow X$  такой, что

$$\|T_1(t)y\| x \leq c_1 \exp(at\|x\|_X) \quad \forall t \in R^+, \quad c_1 > 0, \quad \alpha < 0;$$

3) оператор  $A_1 + A_2$  есть генератор нелинейной динамической системы  $T(t): X \rightarrow X$  такой, что

$$\|T(t)y_1 - T(t)y_2\|_X \leq \exp(|d|t/\pi \|y_1 - y_2\|_X) \quad \forall y_1, y_2 \in X, \quad \forall t \in R^+.$$

Рассмотрим функционал  $V: X \rightarrow R$  вида  $V(y) := \|y\|_X^2 - 2d \int_0^1 \cos(u(x)) dx$ . Этот функционал дифференцируем по Фреше и имеет орбитальную производную

$$\dot{V}(y) = V'_x Ay = 2 \int_0^1 [\partial u(x) \partial \hat{u}(x) + d \hat{u}(x) \sin(u(x)) + v(x) \hat{v}(x)] dx, \quad \hat{y} = (\hat{u}, \hat{v}) \in X.$$

Поскольку оператор  $A$  замкнут, то  $\dot{V}(y) = -2c \int_0^1 |v(x)|^2 dx$ ,  $y = (u, v) \in \text{Dom } A$ , а раз  $c \geq 0$ , то  $V$  является Л-функционалом на множестве  $\text{Dom } A$ . Определим непрерывный неотрицательный функционал  $W: X \rightarrow R^+$ :  $W(y) := -2c \int_0^1 |v(x)|^2 dx$ ,  $y = (u, v) \in X$ .

По теореме 4.1.3 монографии [8]  $V$  является Л-функционалом на всем  $X$  таким, что  $\dot{V}(y) \leq -W(y)$   $\forall y \in X$  и множества  $\bar{G}_b := \{y \in X : V(y) < b\}$  положительно инвариантны для каждого  $b \in R$ . Область  $\text{Dom } A$  положительно инвариантна, и поэтому пересечения  $\bar{G}_b \cap \text{Dom } A$  и  $G_b \cap \text{Dom } A$  также положительно инвариантны для каждого  $b \in R$ . Поскольку  $V(y) \rightarrow \infty$  при  $\|y\| \rightarrow \infty$ , то каждое  $\bar{G}_b$  ограничено, и раз  $X = \bigcup_{b \in R^+} G_b$ , то все положительные траектории ограничены.

Из того, что оператор  $A$  замкнут, следует, что точка  $z \in X$  является состоянием равновесия тогда и только тогда, когда  $z \in \text{Dom } A$  и  $Az = 0$ . Следовательно, положительные траектории являются предкомпактными. Обозначим через  $\Theta$  наибольшее положительное инвариантное множество, содержащееся во множестве  $Z_1 := \{y \in X : W(y) = 0\} = \{(u, v) \in X : v = 0\}$ . Нетрудно показать, что множество  $Z_2 := \Theta \cap \text{Dom } A = \{(u, v) \in \text{Dom } A : v(x) = 0 = \partial^2 u(x) - d \sin u(x) \quad \forall x \in (0, 1)\}$  является множеством всех состояний равновесия. Очевидно, что  $\Theta = Z_2$ . Множество  $Z_2$  конечно для каждого  $d \in R$  и  $Z_2 = \{0\}$  при  $|d| < \pi^2$ . На основании теоремы 7.1.10 монографии [8] каждой точке  $y \in X$  соответствует состояние равновесия  $z \in Z_2$  такое, что  $T(t)y \rightarrow z$ ,  $t \rightarrow \infty$ . При  $|d| < \pi^2$  состояние равновесия  $z = 0$  глобально асимптотически устойчиво.

В настоящей работе устойчивость солитонов изучена методом математического моделирования систем с распределенными параметрами с помощью абстрактных эволюционных уравнений и абстрактных динамических (полудинамических) систем. Указанный метод разработан А.А. Шестаковым [8]. Таким образом, на основе применения этого метода с учетом свойств соответствующих функционалов Ляпунова исследована глобальная асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения синус-Гордона.

Метод А.А. Шестакова базируется на использовании обобщенного прямого метода Ляпунова для абстрактных слабых и сильных динамических (полудинамических) систем на пространстве сходимости. Обобщение состоит в локализации предельного множества на основе функционалов Ляпунова (Л-функционалов типа Немыцкого, Л-функционалов типа Слимрода, Л-функционалов типа Болла и др.). Результаты исследования устойчивости солитонных моделей, проведенного в настоящей работе, обобщают результаты, полученные с помощью классических теорем об устойчивости по двум метрикам.

- Проведенный сравнительный анализ понятий устойчивости солитонов и рассмотренная устойчивость некоторых классов солитонных моделей показали, что перспективным направлением исследований является анализ устойчивости солитонных моделей с помощью различных методов теории устойчивости движения [6–10] с учетом того, что ряд результатов об устойчивости общих динамических систем может быть распространен на модели динамики солитонов.

## Литература

1. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир. 1985.
2. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир. 1989.
3. Рыбаков Ю.П. Устойчивость многомерных солитонов в киральных моделях и гравитации // Итоги науки и техники. Сер. Классическая теория поля и теория гравитации. Т. 2. М.: ВИНИТИ. 1991.
4. Маханьков В.Г., Рыбаков Ю.П., Санюк В.И. Локализованные нетопологические структуры: построение решений и проблемы устойчивости // Успехи физических наук. 1994. Т. 164. № 2. С. 121–148.
5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат. 1955.
6. Зубов В.И. Методы А.М. Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во ЛГУ. 1957.
7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967.
8. Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: УРСС. 2007.
9. Kato T., Martynyuk A.A., Shestakov A.A. Stability of motion of nonautonomous systems (method of limiting equations). Amsterdam: Gordon and Breach. 1996.
10. Дружинина О.В. Устойчивость и стабилизация по Жуковскому динамических систем: Теория, методы и приложения. М.: УРСС. 2013.
11. Дружинина О.В., Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова исследования устойчивости и притяжения в общих временных системах // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 10. С. 17–48.
12. Дружинина О.В., Шестаков А.А. Взаимосвязь устойчивости по Жуковскому с понятиями устойчивости топологической динамики // Нелинейный мир. 2013. Т. 11. № 7. С. 459–467.
13. Дружинина О.В., Афанасьева В.И. Исследование устойчивости некоторых классов распределенных систем // Нелинейный мир. 2010. Т. 8. № 9. С. 554–562.
14. Дружинина О.В., Шулиманова З.Л., Масина О.Н., Садыкова О.И., Кузьмина Т.И., Ильина Т.А. Устойчивость нелинейных динамических процессов в экологии и физике. М.: РГОТУПС. 2008.

Поступила 16 июня 2015 г.

## Stability analysis of nonlinear soliton models

© Authors, 2015  
© Radiotekhnika, 2015

**O.V. Druzhinina** – Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Main Research Scientist, Institute of Informatics Problems of RAS (Moscow)

E-mail: ovdruzh@mail.ru

**Z.L. Shulimanova** – Dr. Sc. (Phys.-Math.), Head of Department, Moscow State University of Railway Engineering

E-mail: zinaida110@yandex.ru

**V.L. Vorontsova** – Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Institute of Management, Economics and Finance (Kazan')

**T.F. Klimova** – Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Moscow State University of Railway Engineering

Questions of stability of soliton models are considered. A comparative analysis of solitons stability concepts is presented and the modifications of the stability and instability basic theorems are given in accordance with two measures: Lyapunov–Movchan theorem on stability and Chetaev–Movchan theorem on instability. For stability analysis method of A.A. Shestakov of mathematical modeling of distributed systems by the aid of abstract evolutional equations is used. The global asymptotic stability of soliton solutions is investigated on the basis of Lyapunov functionals properties. Obtained results can be used in stability problems of nonlinear dynamical models.

### References

1. Kalodzhero F., Degasperis A. Spektral'nye preobrazovaniya i solitony'. M.: Mir. 1985.
2. N'ye'll A. Solitony' v matematike i fizike. M.: Mir. 1989.
3. Ry'bakov Yu.P. Ustojchivost' mnogomernyx solitonov v kiral'nyx modelyax i gravitacziy // Itogi nauki i texniki. Ser. Klassicheskaya teoriya polya i teoriya gravitacziy. T. 2. M.: VINITI. 1991.
4. Maxan'kov V.G., Ry'bakov Yu.P., Sanyuk V.I. Lokalizovanny'e netopologicheskie struktury': postroenie reshenij i problemy' ustojchivosti // Uspeni fizicheskix nauk. 1994. Т. 164. № 2. С. 121–148.
5. Lyapunov A.M. Obshchaya zadacha ob ustojchivosti dvizheniya. M.–L.: Gostexizdat. 1955.
6. Zubov V.I. Metody' A.M. Lyapunova i ix primenenie. L.: Izd-vo LGU. 1957.
7. Demidovich B.P. Lekcii po matematicheskoy teorii ustojchivosti. M.: Nauka. 1967.
8. Shestakov A.A. Obobshchennyj pryamoj metod Lyapunova dlya sistem s raspredelennymi parametrami. M.: URSS. 2007.
9. Kato T., Martynyuk A.A., Shestakov A.A. Stability of motion of nonautonomous systems (method of limiting equations). Amsterdam: Gordon and Breach. 1996.
10. Druzhinina O.V. Ustojchivost' i stabilizaciya po Zhukovskomu dinamicheskix sistem: Teoriya, metody' i prilozheniya. M.: URSS. 2013.
11. Druzhinina O.V., Shestakov A.A. Obobshchennyj pryamoj metod Lyapunova issledovaniya ustojchivosti i prityazheniya v obshhix vremenennyx sistemakh // Matem. sb. 2002. Т. 193. № 10. С. 17–48.
12. Druzhinina O.V., Shestakov A.A. Vzaimosvyaz' ustojchivosti po Zhukovskomu s ponyatiyami ustojchivosti topologicheskoy dinamiki // Nelinejn'y mir. 2013. Т. 11. № 7. С. 459–467.
13. Druzhinina O.V., Afanas'eva V.I. Issledovanie ustojchivosti nekotoryx klassov raspredelennyx sistem // Nelinejn'y mir. 2010. Т. 8. № 9. С. 554–562.
14. Druzhinina O.V., Shulimanova Z.L., Masina O.N., Sady'kova O.I., Kuz'mina T.I., Il'ina T.A. Ustojchivost' nelinejn'yx dinamicheskix processov v e'kologii i fizike. M.: RGOTUPS. 2008.