КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.Г. ЧЕБОТАРЕВА

КАЗАНСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

УДК 517.958 : 535.4

Е. К. Липачёв

# Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в областях с бесконечной липшицевой границей

Препринт ПМФ–04–02

Казань — 2004

Печатается по решению Редакционно–издательского совета Казанского математического общества

Научный редактор — проф., д.ф.–м.н. Н. Б. Плещинский

Исследованы задачи дифракции электромагнитных волн на полуплоскости, имеющей конечное включение в виде липшицевой кривой. Краевые задачи, моделирующие физический процесс, построены в виде уравнения Гельмгольца, краевых условий на границе, сформулированных в терминах следов и условия излучения на бесконечности. Исследования проводятся в обобщенных соболевских пространствах. Доказана разрешимость краевых задач Дирихле и Неймана, получено представление решения в виде функций, которые по своим свойствам являются аналогами классических потенциалов простого и двойного слоев. Краевые задачи сведены к интегральным уравнениям второго рода, проведено исследование этих уравнений и доказана теорема эквивалентности краевых задач и полученных интегральных уравнений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03–01–96184).

# Введение

Исследуются краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца $\left(\Delta + k^2\right) u = 0$, $\operatorname{Im} k \geq 0$. Эти задачи используются в качестве математической модели для вычисления электромагнитного поля, возникающего в результате дифракции плоской электромагнитной волны на областях с бесконечной неровной границей.

В случае, когда граница области принадлежит классу $C^2$ или $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, эллиптические краевые задачи, а к их числу относятся и краевые задачи для уравнения Гельмгольца, можно свести к эквивалентным им граничным интегральным уравнениям первого и второго родов. Для этого применяется хорошо известная техника теории потенциалов (см., напр., [13, 18]). Классические результаты теории потенциалов относятся к задачам на ограниченных областях или на областях, являющихся дополнением к ограниченным. В случае областей с бесконечной границей методика применения потенциалов требует уточнений и дополнительных рассуждений в каждом конкретном случае. К числу таких задач относятся, в частности, задачи на периодических структурах и задачи на полуплоскости с конечным включением.

В работах [15, 16, 17] нами рассмотрены краевые задачи для уравнения Гельмгольца в областях с неровной гладкой границей. Исследования основаны на использовании обобщенных потенциалов простого и двойного слоев. В отличие от классических потенциалов, определенных на замкнутых областях, обобщенные потенциалы рассматриваются на разомкнутых кривых и на областях с бесконечной границей. В настоящей работе эта техника распространена случай полуплоскости с липшицевым включением ограниченного размера. Следует заметить, что краевые задачи на липшицевых областях активно исследуются в последние годы. Отметим в связи с этим работы М.С. Аграновича [3, 5], M. Costabel [26], Jerison, Kenig [31, 32, 33], Mitrea, Taylor [37, 38], в которых приводится обширная библиография по данному кругу вопросов и приведены наиболее важные результаты.

При исследовании разрешимости краевых задач вводятся операторы, которые принято называть (см., напр., [5]) операторами типа потенциала. Эти операторы обладают свойствами, близкими к свойствам классических потенциалов простого и двойного слоев, что позволяет применить, после необходимых уточнений, примерно такую же методику рассуждений, что и в классическом случае.

## 1. Предварительные сведения и обозначения

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Функция $\varphi : D \to \mathbb{C}$ называется *липшицевой*, если существует такая константа $c > 0$, что

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < c \cdot |x - y| \tag{1.1}$$

для любых $x, y \in D$. Класс липшицевых функций на $D$ обозначается Lip $D$. Константу $c = \|\varphi'\|_\infty$ называют постоянной Липшица. Норма в пространстве Lip $D$ определяется соотношением

$$\|\varphi\|_{Lip} = \sup_{x \in D} |\varphi(x)| + \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|}. \tag{1.2}$$

**Определение 1.1.** *Область $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ называется* ***специальной липшицевой областью****, если существует такая липшицева функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что*

$$D_\varphi \equiv D = \{(x, y) : y > \varphi(x)\} \text{ и } \partial D = \{(x, y) : y = \varphi(x)\}.$$

**Определение 1.2.** *Область $\Omega$ из $\mathbb{R}^{n+1}$ называется* ***липшицевой****, если каждая точка $x \in \partial\Omega$ обладает такой окрестностью $V$, что пересечение $V \cap \Omega$ является специальной липшицевой областью после подходящего выбора декартовой системы координат.*

В работе [27] предложено обозначать специальные липшицевы области через $D$, а ограниченные липшицевы области — через $\Omega$.

Функция, удовлетворяющая условию Липшица, почти всюду дифференцируема и имеет ограниченный градиент (см., напр., [23]), поэтому на границе липшицевой области естественно вводится мера Лебега, индуцированная мерой объемлющего пространства.

В данной работе проводится исследование краевых задач на специальных липшицевых областях вида

$$D_h = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > h(x)\right\}, \tag{1.3}$$

где $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая условию Липшица и имеющая конечный носитель supp $h \subset [-d, d]$, $d \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что непрерывная функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ продолжается по непрерывности на замыкание $\overline{\Omega}$, если существует непрерывная функция $\Phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ на $\overline{\Omega}$, сужение которой на $\Omega$ совпадает с $\varphi(x)$.

Для целого $m \geq 0$ обозначим через $C^m(\Omega)$ пространство $m$ раз непрерывно дифференцируемых комплекснозначных функций на $\Omega$. Через $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$ будем обозначать пространство всех функций $\varphi(x)$ из $C^m(\Omega)$, для которых все производные $D^\alpha\varphi(x)$, $|\alpha| \leq m$, допускают непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$. В этом пространстве введем норму

$$\|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha\varphi(x)| \,. \tag{1.4}$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = i^{-|\alpha|} \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$, $n = 0, 1, \ldots$.

При исследовании краевых задач рассматривают пространство $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (или $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$) и функции из этого пространства, удовлетворяющие условию задачи, называют ***классическими решениями*** краевой задачи (см., напр., [12, 13, 18]).

Для целого $m \geq 0$ и $0 < \mu \leq 1$ обозначим через $C^{m+\mu}\left(\overline{\Omega}\right) \equiv C^{m,\mu}\left(\overline{\Omega}\right)$ пространство функций из $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$, для которых конечна норма

$$|f|_{m,\mu} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)| + \sum_{\alpha=m} \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\mu}. \tag{1.5}$$

Согласно этому определению пространство липшицевых функций $\mathrm{Lip}\,\Omega$ совпадает с $C^{0,1}(\Omega)$.

Функция $\varphi(x)$ называется ***финитной*** в $\Omega$, если существует такая область $Q$, что $\overline{Q} \subset \Omega$ и $\varphi(x) = 0$ в $\Omega \setminus Q$; замыкание множества точек, в которых $\varphi$ не обращается в нуль, называется ***носителем*** функции $f$ и обозначается $\mathrm{supp}\,\varphi$. Обозначим через $\dot{C}^m(\Omega)$ множество всех финитных функций из $C^m(\Omega)$, а замыкание множества $\dot{C}^m\left(\overline{\Omega}\right)$ по норме (1.4) обозначим как $\overset{\circ}{C}{}^m(\Omega)$. Отметим, что

$$\overset{\circ}{C}{}^m(\Omega) = \left\{\varphi \in C^m\left(\overline{\Omega}\right) : D^\alpha\varphi\,|_{\partial\Omega} = 0,\ |\alpha| \leq m\right\}.$$

Если $k > m$, то множество $\overset{\circ}{C}{}^k(\Omega)$ плотно в $\overset{\circ}{C}{}^m(\Omega)$.

Через $C^\infty(\Omega)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых в $\Omega$ функций с топологией, определяемой полунормами (см., напр., [21])

$$p_{m,K}(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |D^\alpha\varphi(x)| \,, \quad \varphi \in C^\infty(\Omega), \tag{1.6}$$

где $K \subset \Omega$ компактное множество, $\alpha$ — произвольный мультииндекс и $m \geq 0$ — целое число.

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто, то пространство $C^\infty(\Omega)$ ненормируемо (см., напр., [21], стр. 44).

**Определение 1.3.** (см., напр., [4], [5]). *Липшицева область $\Omega$ называется* ***почти гладкой****, если ее граница $\partial\Omega$ принадлежит $C^\infty$ вне замкнутого подмножества нулевой меры Лебега.*

Обозначим через $\dot{C}^\infty(\Omega)$ пространство бесконечно дифференцируемых в $\Omega$ функций, имеющих компактный носитель, и снабженное топологией индуктивного предела

$$\dot{C}^\infty(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \dot{C}^\infty\left(K_i\right), \tag{1.7}$$

где $K_i$ — компактные подмножества в $\Omega$. Топология на $\dot{C}^\infty(\Omega)$ является самой сильной локально выпуклой топологией, в которой каждое вложение

$$\dot{C}^\infty\left(K_i\right) \to \dot{C}^\infty(\Omega)$$

непрерывно. Отметим также, что система $(\dot{C}^m\left(\overline{\Omega}\right), \pi_m^k)$, где $\pi_m^k$ — вложения

$$\pi_m^k : C^k(\Omega) \hookrightarrow C^m(\Omega),$$

образует проективную систему, а пространство $\dot{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ является проективным пределом этой системы (см., напр., [20]).

Пространство $\dot{C}^\infty(\Omega)$ обозначают также через $C_0^\infty(\Omega)$.

Отметим, что пространство $\dot{C}^\infty(\Omega)$ *неметризуемо* и, следовательно, топология в нем не определяется однозначно заданием сходимости (см., напр., [21]).

Пространство $\mathcal{D}(\Omega) \equiv \dot{C}^\infty(\Omega)$ используется в качестве пространства пробных функций, а для элементов из сопряженного пространства $\mathcal{D}'(\Omega)$ используется термин ***распределения***.

Мы будем различать термины распределение и обобщенная функция, оставляя последний термин для элементов пространства Коломбо (см., напр., [11], [25]).

**Определение 1.4.** *Последовательность $\{\varphi_i\}$ сходится в $\mathcal{D}(\Omega)$ к функции $\varphi$ тогда и только тогда, когда существует такое компактное подмножество $K$ в $\Omega$, что $\varphi_i \in \dot{C}^\infty(K)$ (т.е. $\varphi_i(x) = 0$ для $x \in \Omega \setminus K$) и, кроме того, для каждого мультииндекса $\alpha$ последовательность $D^\alpha\varphi_i(x)$ сходится к $D^\alpha\varphi(x)$ равномерно в $\Omega$.*

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ произвольный мультииндекс. ***(Обобщенная) производная*** $D^\alpha T$ распределения $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ определяется как функционал

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.8}$$

Операция $T \to D^\alpha T$ действует непрерывно из $\mathcal{D}'(\Omega)$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Через $\mathcal{E}'(\Omega)$ обозначим множество линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{E}(\Omega) \equiv C^\infty(\Omega)$. Поскольку справедливо утверждение

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) : \operatorname{supp} T\text{— компактен}\}, \tag{1.9}$$

распределения из $\mathcal{E}'(\Omega)$ называют ***финитными***.

Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ обозначим ***пространство Шварца***, состоящее из функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ***быстро убывающих на бесконечности***, что, по определению, означает

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[ |x|^k \, |D^\alpha \varphi(x)| \right] < \infty, \tag{1.10}$$

для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $k \in \mathbb{N}$. Топология в пространстве $\mathcal{S}$ определяется системой полунорм

$$p_k(\varphi) = \sup_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[ |x|^k \, |D^\alpha \varphi(x)| \right]. \tag{1.11}$$

Последовательность $\varphi_j \in \mathcal{S}$ сходится к 0 при $j \to \infty$, если выполнены условия:

1) для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $k \in \mathbb{N}$ существует такая константа $C_{\alpha,k}$, что

$$|x|^k \, |D^\alpha \varphi_j(x)| \le C_{\alpha,k};$$

2) $D^\alpha \varphi_j(x) \to 0$ равномерно для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Элементы из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ называют ***распределениями медленного (умеренного) роста.***

***Слабая топология*** в пространствах распределений определяется полунормами

$$p_\varphi(T) = |T(\varphi)|, \quad \varphi \in E, \; T \in E',$$

где $E = \mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а $E'$ — соответствующее пространство распределений. ***Слабая сходимость*** означает, что последовательность распределений $\{T_j\}$ из $E'$ сходится к $T$, если $T_j(\varphi) \to T(\varphi)$ для любой пробной функции $\varphi$ из $E$.

Отметим, что $\mathcal{D}'(\Omega)$ слабо полно, пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ также слабо полно, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (см., напр., [7]).

Через $L_p(\Omega)$ $(1 \le p \le \infty)$ будем обозначать пространство классов эквивалентности измеримых по Лебегу функций на $\Omega$ с интегрируемой $p$–ой степенью модуля.

Если $\Omega$ — непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то в пространстве $L_p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ существует базис Шаудера (безусловный при $p > 1$). В пространстве $L_p(0,1)$ базисом Шаудера является, например, ортогональная система Хаара (см., напр., [8]).

Обозначим через $L_{p,loc}(\Omega)$ пространство *локально–*$L_p$– функций на $\Omega$, т.е. таких функций $f : \Omega \to \mathbb{C}$, что для любого компакта $K \subset \Omega$ сужение функции $f$ на $K$ принадлежит $L_p(K)$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $l \ge 0$, $1 \le p < \infty$ — целые числа. Пространство Соболева $W_p^{(l)}(\Omega)$ состоит из функций $\varphi \in L_p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $D^\alpha \varphi$ порядка $|\alpha| \le l$ и для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{p,l} \equiv \|\varphi\|_{W_p^{(l)}} := \|\varphi\|_{L_p} + \|\varphi\|_{w_p^{(l)}}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{1.12}$$

где

$$\|\varphi\|_{L_p} = \left(\int_G |\varphi(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\varphi\|_{w_p^{(l)}} := \sum_{|\alpha|=l} \|D^{(\alpha)}\varphi\|_{L_p}, \tag{1.13}$$

$$\|\varphi\|_{\infty,l} = \max_{|\alpha|\le l} \|D^\alpha \varphi\|_{L_\infty}.$$

Справедливы утверждения (см., напр., [40])

$$\mathrm{Lip}\ (\mathbb{R}^n) = W_\infty^{(1)}(\mathbb{R}^n), \quad \mathrm{Lip}\ (\Omega) \subset W_\infty^{(1)}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.14}$$

Пространства Соболева вещественного порядка (обобщенные соболевские пространства) определяют либо с помощью полунорм Слободецкого, либо на основе потенциалов Бесселя (см., напр., [6, 14, 22]).

Полунорма Слободецкого определяется соотношением

$$|u|_{\mu,p,\Omega} = \left(\int\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\mu}}\,dx\,dy\right)^{1/p}. \tag{1.15}$$

Здесь $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $1 \le p < \infty$ — целое число и $0 < \mu < 1$.

Определим пространства Соболева порядка $t = [t] + \mu$, $0 < \mu < 1$, как множество

$$W_p^{(t)}(\Omega) = \left\{u \in W_p^{[t]}(\Omega) : |D^\alpha u|_{\mu,p,\Omega} < \infty, |\alpha| = r\right\} \tag{1.16}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_p^t(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{W_p^{[t]}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[t]} |D^\alpha u|_{\mu,p,\Omega}\right).$$

Соболевские пространства отрицательного порядка $W_p^{(-r)}$ определяются как двойственные к $W_p^{(r)}$ и состоят из распределений $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ вида

$$u = \sum_{|\alpha| \leq r} D^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in L_p(\Omega).$$

При $p = 2$ используется обозначение $H^t(\Omega) = W_2^{(t)}(\Omega)$.

Второе определение обобщенных соболевских пространств использует потенциалы Бесселя

$$\mathcal{J}^t u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{t/2} \hat{u}(\xi) e^{i2\pi\xi\cdot x}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.17}$$

где $\hat{u}$ — преобразование Фурье функции $u$.

Пространство Соболева при $t \in \mathbb{R}$ определяется соотношением

$$H^t(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{J}^t u \in L_2(\mathbb{R}^n) \right\}, \tag{1.18}$$

$$(u, v)_{H^t(\mathbb{R}^n)} = \left( \mathcal{J}^t u, \mathcal{J}^t v \right).$$

Пусть $F \subseteq \mathbb{R}^n$ замкнутое множество и $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ открытое множество. Обозначим

$$H_F^t = \left\{ u \in H^t(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} u \subseteq F \right\},$$

$$H^t(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : u = U|_\Omega, U \in H^t(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Через $\widetilde{H}^t(\Omega)$ обозначим пополнение $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^t(\mathbb{R}^n)$, а через $H_0^t(\Omega)$ — пополнение $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^t(\Omega)$.

В случае липшицевой области $\Omega$ справедливы утверждения (см., напр., [26], [27], [33]):

$$H^t(\Omega) = W_2^{(t)}(\Omega) \quad \text{для вещественных } t \geq 0 \text{ и целых } t < 0;$$

$$H^t(\Omega)' = \widetilde{H}^{-t}(\Omega), \quad \widetilde{H}^t(\Omega)' = H^{-t}(\Omega), \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\widetilde{H}^t(\Omega) = H_0^t(\Omega), \quad t \geq 0, \quad t \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots;$$

$$\widetilde{H}^t(\Omega) = H_{\overline{\Omega}}^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ открытое множество с липшицевой границей, то

$$H^{1/2}(\Omega) \subset L_q(\Omega), \quad 1 \leq q < 4;$$

$$H^1(\Omega) \subset L_q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty.$$

Ограниченная область $\Omega$ является липшицевой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ***равномерному условию конуса***: каждая точка $P \in \partial\Omega$ является вершиной двух таких замкнутых конусов $Q^{\pm}(P)$ с общей осью, что они конгруэнтны фиксированному конусу $Q_0$ и $Q^{+}(P) \setminus \{P\} \subset \Omega^{+}$, $Q^{-}(P) \setminus \{P\} \subset \Omega^{-}$. Здесь, как обычно, $\Omega^{+} = \Omega$, а $\Omega^{-}$ — внешняя для $\Omega$ область.

Определим ***некасательный максимальный оператор*** $(\cdot)_{*}$, действующий на функциях $u : \Omega^{\pm} \to \mathbb{R}$, следующим образом:

$$u_{*}^{\pm}(P) = \sup\left\{|u(x)| : x \in Q^{\pm}(P)\right\}, \quad P \in \partial\Omega. \tag{1.19}$$

***Некасательный граничный предел (след)*** функции $u$, заданной в липшицевой области $\Omega$, определяется соотношением

$$u(P) = \lim_{\substack{x \to P \\ x \in Q^{+}(P)}} u(x), \quad P \in \partial\Omega. \tag{1.20}$$

Аналогично определяется некасательный граничный предел функции, заданной в области $\Omega^{-}$.

Следовательно, граничное условие

$$u(P) = 0, \quad P \in \partial\Omega$$

можно понимать в смысле некасательной сходимости почти всюду.

Оператор следа можно определить с помощью продолжения по непрерывности.

***Оператор следа*** на $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\gamma : \mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right) \to \mathcal{D}(\partial\Omega) \tag{1.21}$$

определяется как оператор сужения

$$\gamma u = u|_{\partial\Omega}.$$

Если область $\Omega$ принадлежит классу $C^{k-1,1}$ при $k \geq 0$, то оператор следа имеет единственное расширение до линейного ограниченного оператора

$$\gamma : H^{t}(\Omega) \to H^{t-1/2}(\partial\Omega), \quad \frac{1}{2} < t \leq k. \tag{1.22}$$

Более того, этот оператор имеет непрерывный правый обратный.

Если $\Omega \in C^{k-1,1}$ и $0 \leq t \leq k$, то (см., напр., [33])

$$H_0^{t}(\Omega) = \left\{u \in H^{t}(\Omega) : \gamma\left(D^{\alpha}u\right) = 0, |\alpha| < t - \frac{1}{2}\right\}.$$

В частности, $H_0^t(\Omega) = H^t(\Omega)$ при $0 \le t \le \frac{1}{2}$.

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с липшицевой границей, то справедливы следующие утверждения (см., напр., [2, 3, 28]).

1. При $\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2}$ оператор следа

$$\gamma : H^t(\Omega) \to H^{t-1/2}(\partial\Omega),$$

$$\gamma u = u|_{\partial\Omega}$$

является линейным ограниченным оператором.

2. Существует единственное линейное непрерывное отображение

$$\eta : H^{t-1/2}(\partial\Omega) \to H^t(\Omega),$$

такое, что для всех $\varphi \in H^{t-1/2}(\partial\Omega)$

$$\gamma\eta\varphi = \varphi,$$

т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & H^t(\Omega) & & \\ & \eta \nearrow & & \searrow \gamma & \\ H^{t-1/2}(\partial\Omega) & & = & & H^{t-1/2}(\partial\Omega). \end{array}$$

Следовательно, граничное условие

$$u(P) = 0, \quad P \in \partial\Omega$$

можно интерпретировать как $\gamma u = 0$.

Приведенные определения следа совпадают для функций из $H^1\,(\partial\Omega)$ с квадратично интегрируемой максимальной функцией (см., напр., [2]). Первое определение следа обычно называют некасательным граничным значением, а второе — граничным значением в смысле соболевских пространств.

## 2. Постановка краевых задач

Рассматривается следующая краевая задача. Пусть

$$D = \Big\{(x, y) : y > 0 \text{ при } \ x \notin [-d, d];$$

$$y > h(x) \text{ при } \ x \in [-d, d]\Big\}$$

и $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ — граница области $D$ с

$$\Gamma_1 = \{(x, 0) : x \notin [-d, d]\}, \quad \Gamma_2 = \{(x, h(x)) : x \in [-d, d]\}.$$

Предполагаем, что функция $h(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $h(-d) = h(d) = 0$. Для таких областей можем использовать термин область с неровной границей, или область с неровным участком, поскольку только на ограниченном участке $\Gamma_2$ граница не совпадает с прямой.

Через $\vec{\nu}(P)$ обозначим вектор единичной нормали в точке $P \in \partial\Omega$, направленный в полуплоскость $y > 0$. Тогда

$$\vec{\nu}_x\left(x, h(x)\right) = \frac{-h'(x)}{\sqrt{1 + |h'(x)|^2}}, \quad \vec{\nu}_y\left(x, h(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + |h'(x)|^2}}$$

и производная по нормали в точке $P = (x, h(x))$ вычисляется по формуле

$$\partial_{\vec{\nu}(P)} f(P) \equiv \frac{\partial f(P)}{\partial \vec{\nu}(P)} = \frac{\partial f}{\partial x}\nu_x(P) + \frac{\partial f}{\partial y}\nu_y(P).$$

Обозначим через

$$\gamma' u = \gamma \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}(P)}$$

след производной по нормали.

Поскольку граница области $D$ липшицева, то вектор нормали существует лишь почти всюду относительно меры Лебега на $\partial D$.

Сформулируем краевые задачи Дирихле и Неймана в специальной липшицевой области $D$ с неровным участком.

*Требуется найти $u(x, y) \in H^1(D)$, удовлетворяющую в области $D$ уравнению Гельмгольца*

$$\Delta u(M) + k^2 u(M) = 0, \quad M \in D \tag{2.1}$$

*и одному из граничных условий*

$$\gamma u(P) = f(P), \quad P \in \partial D \tag{2.2}$$

*(задача Дирихле) или*

$$\gamma' u(P) = g(P), \quad P \in \partial D \tag{2.3}$$

*(задача Неймана). Кроме того, должны быть выполнены условия излучения на бесконечности*

$$\begin{aligned} u^* \; &= \; e^{ikr}\, O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \\ \frac{\partial u^*}{\partial r} - iku^* &= e^{ikr} o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \to \infty, \end{aligned} \tag{2.4}$$

*где* $u^*(M) = u(M) - \widetilde{u}(M)$, $M = (x,y) \in D$ *и* $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Здесь $f \in H^{1/2}(\partial D)$, $g \in H^{-1/2}(\partial D)$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Im} k \geq 0$, а через $\widetilde{u}(M)$ обозначено решение вспомогательной краевой задачи для уравнения Гельмгольца на полуплоскости (см., напр., [19]).

В случае

$$f(x,y) = e^{ik(x sin\theta + y cos\theta)} \quad \text{и} \quad g(x,y) = \partial_\nu f(x,y) \tag{2.5}$$

имеем дело с дифракцией плоской электромагнитной волны, падающей под углом $\theta$ на границу раздела сред (см., напр., [41]). Случай $TE$–поляризованной электромагнитной волны соответствует задаче Дирихле, а рассеяние $TM$–волн моделируется краевой задачей Неймана.

## 3. Краевые задачи в гладком случае

В работах [15]–[17], [35], [36] краевые задачи (2.1)–(2.4) исследованы для случая границ из класса $C^2$.

Решение краевой задачи (2.1), (2.2), (2.4), принадлежащее классу $C^2(D) \cap C(\overline{D})$, называем классическим. В случае задачи Неймана в определение классического решения дополнительно включено требование существования на границе $\partial D$ правильной нормальной производной (см., напр., [18]).

Рассмотрим

$$G_m(k; M, P) = \frac{\pi i}{2} \left\{ H_0^{(1)}(k\, r) + (-1)^m H_0^{(1)}(kr^*) \right\}, \quad m = 1, 2. \tag{3.1}$$

Через $H_0^{(1)}$ обозначена функция Ганкеля первого рода нулевого порядка (см., напр., [1]),

$$M = (x,y)\,, \quad P = (\tau, \zeta)\,,$$

$$r = \sqrt{(x-\tau)^2 + (y-\zeta)^2}, \quad r^* = \sqrt{(x-\tau)^2 + (y+\zeta)^2}.$$

В гладком случае для краевых задач Дирихле и Неймана справедливы теоремы единственности и существования классических решений, а также теоремы о эквивалентности краевых задач и интегральных уравнений второго рода в следующих формулировках (см. [16, 17]).

**Теорема 3.1.** *Если* $\operatorname{Im} k \geq 0$ *и* $\partial D \in C^{1,\mu}$, $0 < \mu \leq 1$, *то краевая задача (2.1), (2.2), (2.4) имеет не более одного классического решения.*

*Если* $\operatorname{Im} k \geq 0$, $\operatorname{Re} k \neq 0$, *то краевая задача (2.1), (2.3), (2.4) имеет не более одного классического решения.*

**Теорема 3.2.** *Если* $\operatorname{Im} k \geq 0$ *и* $\partial D \in C^2$*, то существует решение задачи (2.1), (2.2), (2.4), принадлежащее классу функций* $C^2(D) \cap C(\overline{D})$.

**Теорема 3.3.** *В условиях теоремы 3.2, справедливы следующие утверждения.*

*Всякое решение* $u(M)$ *краевой задачи (2.1), (2.2), (2.4) допускает интегральное представление*

$$u(M) = \widetilde{u}(M) + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial G_1(k; M, P)}{\partial \vec{\nu}(P)} \psi(\tau)\, d\ell_P, \quad M \in D, \qquad (3.2)$$

*плотность которого* $\psi(x)$ *является решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода*

$$-\pi\psi(x) + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial G_1(k; M, P)}{\partial \vec{\nu}(P)} \psi(\tau)\, d\ell_P = \chi(M), \quad M \in \Gamma_2, \qquad (3.3)$$

*где* $\chi(M) = -f(M) + \widetilde{u}(M)$, $M = (x, h(x))$, $P = (\tau, h(\tau)) \in \Gamma_2$, *а функция* $\widetilde{u}$ *является решением вспомогательной задачи Дирихле на полуплоскости.*

*С другой стороны, если* $\psi(x)$ *— решение интегрального уравнения (3.3), то функция* $u(M)$, *построенная по формуле (3.2) с плотностью* $\psi(x)$, *является решением краевой задачи (2.1), (2.2), (2.4).*

**Теорема 3.4**. *При условиях* $\operatorname{Im} k \geq 0$, $\operatorname{Re} k \neq 0$ *и* $\partial D \in C^2$ *существует классическое решение краевой задачи Неймана (2.1), (2.3), (2.4).*

**Теорема 3.5.** *В условиях теоремы 3.4, справедливы следующие утверждения.*

*Всякое решение* $v(M)$ *краевой задачи (2.1), (2.3), (2.4) допускает интегральное представление*

$$v(M) = \widetilde{v}(M) + \int\limits_{\Gamma_2} G_2(k; M, P) \varphi(\tau)\, d\ell_P, \quad M \in D, \qquad (3.4)$$

*плотность которого* $\varphi(x)$ *является решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода*

$$-\pi\varphi(x) + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial G_2(k; M, P)}{\partial \vec{\nu}(M)} \varphi(\tau)\, d\ell_P = \rho(M), \quad M \in \Gamma_2, \qquad (3.5)$$

*где* $\rho(M) = -g(M) + \partial_{\nu(M)}\widetilde{v}$, $M = (x, h(x))$, $P = (\tau, h(\tau)) \in \Gamma_2$, *и* $\widetilde{v}$ *— решение вспомогательной задачи Неймана на полуплоскости.*

*С другой стороны, если* $\varphi(x)$ *— решение интегрального уравнения (3.5), то функция* $v(M)$, *построенная по формуле (3.4) с плотностью* $\varphi(x)$, *является решением краевой задачи Неймана (2.1), (2.3), (2.4).*

## 4. Аппроксимация липшицевых областей гладкими областями

Один из приемов исследования краевых задач на областях с липшицевой границей основан на аппроксимации липшицевой области последовательностью областей с гладкими границами (см., напр., [9, 10, 18, 34, 42]).

Пусть $\alpha > 0$ и $P \in \partial\Omega$. Множество

$$Q_\alpha(P) = \Big\{\zeta \in \Omega : |\zeta - P| < (1+\alpha)\text{dist }(\zeta, \partial\Omega)\Big\}, \quad P \in \partial\Omega$$

называют сектором Лузина или нетангенциальной приближающей областью (см., напр., [10]).

Справедлива следующая теорема [42] (см., также [5, 34]).

**Теорема 4.1.** *Пусть* $\Omega$ *липшицева ограниченная область. Тогда существует семейство* $C^\infty$ *областей* $\Omega_j \subset \Omega$, *аппроксимирующих область* $\Omega$ *в следующем смысле.*

1. *Существует последовательность таких липшицевых диффеоморфизмов*

$$\Lambda_j : \partial\Omega \to \partial\Omega_j, \tag{4.1}$$

*что*

$$\sup\{|\Lambda_j(P) - P| : P \in \partial\Omega\} \le \frac{C}{j}, \quad j \to \infty. \tag{4.2}$$

*Более того,* $\Lambda_j(P) \in Q_\alpha(P)$ *для всех* $j$ *и всех* $P \in \partial\Omega$, *при этом* $\Lambda_j(P) \to P$ *равномерно по* $P \in \partial\Omega$.

2. *Существует покрытие* $\partial\Omega$ *конечным множеством прямоугольников, которые также образуют покрытие для* $\partial\Omega_j$ *для каждого* $j$.

*Более того, если обозначить через* $h$ *и* $h_j$ *липшицевы функции, графики которых описывают границы областей* $\Omega$ *и* $\Omega_j$ *соответственно, то для каждого прямоугольника* $R$ *из такого покрытия имеем*

$$\left\|h_j'\right\|_\infty \le \|h'\|_\infty, \tag{4.3}$$

$$h_j' \to h' \tag{4.4}$$

*почти всюду в каждом* $L_q\left(R \cap \mathbb{R}\right)$, $1 \le q < \infty$.

3. *Существуют положительные функции* $w_j : \partial\Omega \to R_+$, *ограниченные всюду, кроме нуля и бесконечности, однородные для каждого* $j$ *и такие, что для любого измеримого множества* $F \subset \partial\Omega$ *имеем*

$$\int_F w_j \, d\sigma = \int_{\Lambda_j(F)} d\sigma_j, \tag{4.5}$$

*где* $d\sigma_j$ *дуговая мера в* $\partial\Omega_j$.

*Имеет место следующее соотношение:*

$$\int_{\partial\Omega} f_j\left(\Lambda_j(P)\right) w_j(P)\, d\sigma(P) = \int_{\partial\Omega_j} f_j\left(P_j\right)\, d\sigma_j(P_j), \tag{4.6}$$

*где через* $P_j$ *обозначена произвольная точка из* $\partial\Omega_j$, *а* $f_j$ *— любая измеримая функция на* $\partial\Omega_j$. *Кроме того,* $w_j \to 1$ *почти всюду на* $\partial\Omega$ *и для каждого* $L_q(\partial\Omega)$, $1 \le q < \infty$.

4. *Если* $\partial\Omega$ *локально задана как график липшицевой функции* $h(x)$, *а* $\partial\Omega_j$ *— как график бесконечно гладкой функции* $h_j(x)$ *для тех же* $x$, *то градиенты* $\nabla h_j(x)$ *равномерно по* $j$ *и* $x$ *ограничены и сходятся к* $\nabla h(x)$ *почти всюду в* $L_2$.

5. *Единичные векторы* $\nu\left(\Lambda_j(P)\right)$ *внешних нормалей к* $\partial\Omega_j$ *сходятся к* $\nu(P)$ *почти всюду на* $\partial\Omega$ *и в* $L_2\left(\partial\Omega\right)$.

Приведенная теорема имеет обобщение на случай липшицевых областей в гладком компактном ориентируемом вещественном многообразии (см., напр., [37]).

**Определение 4.1.** Пусть $\Omega$ — липшицева область и $\left\{\Omega_j\right\}_j$ — последовательность подобластей класса $C^\infty$. Будем писать $\Omega_j \nearrow \Omega$, если выполнены условия теоремы 4.1.

## 5. Единственность решения краевых задач

Краевые задачи (2.1) – (2.4) сформулированы для областей

$$D = \left\{(x,y) : y > 0, x \in \mathbb{R} \setminus [-d,d]\, ; y > h(x), x \in [-d,d]\right\} \tag{5.1}$$

с границей $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,

$$\Gamma_1 = \left\{(x,0) : x \notin [-d,d]\right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{(x,h(x)) : x \in [-d,d]\right\}. \tag{5.2}$$

где $h$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица.

Для липшицевой области $D$ можем построить последовательность вложенных областей $\{D_j\}$ со следующими свойствами:

$$\ldots \subset D_j \subset D_{j+1} \subset \ldots \subset D, \tag{5.3}$$

$$D = \bigcup_{j=0}^{\infty} D_j, \tag{5.4}$$

$$\partial D_j \in C^{(2)}, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{5.5}$$

$$\Gamma_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R} \setminus [-d,d]\} \subset \partial D_j \cap \partial D, \tag{5.6}$$

$$\gamma_{D_j} u \to \gamma_D u, \quad {\gamma'}_{D_j} u \to {\gamma'}_D u, \quad u \in H^1(D), \tag{5.7}$$

где через $\gamma_D \equiv \gamma$, ${\gamma'}_D \equiv \gamma'$ обозначены операторы следа и следа нормальной производной на границе липшицевой области $D$. Значения на границах гладких областей $D_j$, $j \in \mathbb{N}$ будем также обозначать через $\gamma_{D_j}$ и ${\gamma'}_{D_j}$:

$$\gamma_{D_j} u = u|_{\partial D_j}, \tag{5.8}$$

$$ {\gamma'}_{D_j} u = \partial_\nu u|_{\partial D_j}. \tag{5.9}$$

Возможность построения последовательности гладких областей, аппроксимирующих липшицеву область $D$, следует из [42] (см. также [30]).

**Теорема 5.1.** *При условии* $\operatorname{Im} k \geq 0$ *( и, дополнительно,* $\operatorname{Re} k \neq 0$ *в случае задачи Неймана) краевые задачи (2.1) – (2.4) имеют не более одного решения.*

**Доказательство**. Предполагаем от противного, что краевая задача имеет два решения $u$ и $v$.

Рассмотрим семейство аппроксимирующих областей

$$\ldots \subset D_j \subset D_{j+1} \subset \ldots \subset D,$$

для которого выполнены условия (5.3) – (5.7).

На участке границы $\Gamma_1$, поскольку $\Gamma_1 \subset \partial D \cap \partial D_j$, имеем

$$\gamma_D|_{\Gamma_1} w = \gamma_{D_j}\big|_{\Gamma_1} w = w|_{\Gamma_1} = 0, \tag{5.10}$$

$$ {\gamma'}_D|_{\Gamma_1} w = {\gamma'}_{D_j}\Big|_{\Gamma_1} w = \partial_\nu w|_{\Gamma_1} = 0. \tag{5.11}$$

Далее, поскольку

$$\gamma_{D_j} u \to \gamma_D u, \quad \gamma_{D_j} v \to \gamma_D v,$$

имеем
$$w|_{\partial D_j} \equiv \gamma_{D_j} w = \gamma_{D_j}(u-v) \to 0, \quad j \to \infty. \tag{5.12}$$

Аналогично,
$$\partial_\nu w|_{\partial D_j} \equiv {\gamma'}_{D_j} w = {\gamma'}_{D_j}(u-v) \to 0, \quad j \to \infty. \tag{5.13}$$

Рассмотрим функции $w_s \in \dot{C}^\infty$, такие, что $w_s \to w$, $s \to \infty$.

Пусть $R > d$ — вещественное число и $S_R$ — круг радиуса $R$. В ограниченной области $D_{j,R} = D_j \cap S_R$ применим вторую формулу Грина к функциям $w_s$ и $\overline{w}_s$
$$\int\limits_{D_{j,R}} (w_s \cdot \Delta \overline{w}_s + \overline{w}_s \cdot \Delta w_s)\, d\sigma = \int\limits_{\partial D_{j,R}} (w_s \cdot \partial_\nu \overline{w}_s - \overline{w}_s \cdot \partial_\nu w_s)\, d\ell_P.$$

Переходя к пределу по $R \to \infty$, получаем
$$\int\limits_{D_j} (w_s \cdot \Delta \overline{w}_s + \overline{w}_s \cdot \Delta w_s)\, d\sigma = \int\limits_{\partial D_j} (w_s \cdot \partial_\nu \overline{w}_s - \overline{w}_s \cdot \partial_\nu w_s)\, d\ell_P. \tag{5.14}$$

Далее, в последней формуле перейдем к пределу по $s \to \infty$, учитывая предельные соотношения
$$w_s(P) \to w(P), \quad \overline{w}_s(P) \to \overline{w}(P), \quad P \in D_j, \tag{5.15}$$
$$w_s|_{\partial D_j} \to w|_{\partial D_j}, \quad \overline{w}_s|_{\partial D_j} \to \overline{w}|_{\partial D_j}, \tag{5.16}$$
$$\partial_\nu w_s|_{\partial D_j} \to \partial_\nu w|_{\partial D_j}, \quad \partial_\nu \overline{w}_s|_{\partial D_j} \to \partial_\nu \overline{w}|_{\partial D_j}. \tag{5.17}$$

В результате получаем
$$\int\limits_{D_j} (w \cdot \Delta \overline{w} + \overline{w} \cdot \Delta w)\, d\sigma = \int\limits_{\partial D_j} (w \cdot \partial_\nu \overline{w} - \overline{w} \cdot \partial_\nu w)\, d\ell_P. \tag{5.18}$$

Теперь перейдем к пределу по $j \to \infty$, учитывая, что
$$\ldots \subset D_j \subset D_{j+1} \subset \ldots \subset D,$$

а также, что при $j \to \infty$
$$D_j \to D, \quad \partial D_j \to \partial D$$
$$w|_{\partial D_j} \to \gamma_D w, \quad \partial_\nu w|_{\partial D_j} \to {\gamma'}_D w.$$

Тогда
$$\int\limits_{D} (w \cdot \Delta\overline{w} + \overline{w} \cdot \Delta w)\ d\sigma \ = \int\limits_{\partial D} (\gamma_D w \ \cdot \gamma'{}_D \overline{w} - \gamma_D \overline{w} \ \cdot \gamma'{}_D w)\ d\ell_P. \quad (5.19)$$

Поскольку
$$\Delta w = -k^2 w, \quad \Delta\overline{w} = -\overline{k}^2 \overline{w},$$
то левая часть равенства (5.19) принимает вид
$$i4\mathrm{Re}\ k\,\mathrm{Im}\ k \int_D |w|^2\ \partial\sigma. \quad (5.20)$$

Правая часть равенства (5.19), вследствие граничных условий краевой задачи, равна 0.

В предположениях теоремы Re k $\neq 0$, Im k $\geq 0$, следовательно
$$\int_D |w|^2\ d\sigma = 0. \quad (5.21)$$

Из последнего соотношения заключаем, что $w \equiv 0$ в области $D$, завершая, тем самым, доказательство от противного.

## 6. Операторы типа потенциала

Существование и единственность решения краевых задач в случае гладкой границы доказываются с использованием техники теории потенциалов (см. раздел 3). В случае задачи Дирихле решение представлено в виде потенциала двойного слоя (3.2), а в случае задачи Неймана — в виде потенциала простого слоя (3.4). Отметим, что интегрирование в (3.2) и (3.4) производится только по неровному участку границы специальной липшицевой области $D$ (см. (5.1)), а плотности потенциалов принадлежат пространству $\dot{C}[-d,d]$, поэтому эти потенциалы называют обобщенными.

Рассмотрим операторы
$$(\mathcal{V}(k)\varphi)\,(M) = \int\limits_{\Gamma_2} G_2(k;M,P)\varphi(\tau)\,d\ell_P, \quad M \in D, \quad (6.1)$$
$$(\mathcal{W}(k)\psi)\,(M) = \int\limits_{\Gamma_2} \partial_{\nu(P)} G_1(k;M,P)\psi(\tau)\,d\ell_P, \quad M \notin \partial D. \quad (6.2)$$

Интегрирование в (6.1) и (6.2) ведется по неровному участку $\Gamma_2 = \{(x,h(x)) : x \in [-d,d]\}$ и $P = (\tau, h(\tau))$ — точка, принадлежащая $\Gamma_2$. Здесь $\nu(P)$ — единичный вектор нормали в точке $P$, направленный в область $y > 0$. Этот вектор определен почти для всех $P \in \partial D$.

При $M = (x,h(x)) \in \partial D$ положим

$$V(k)\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|M-P|>\varepsilon} G_2(k;M,P)\varphi(\tau)\,d\ell_P. \tag{6.3}$$

Из результатов работы [42] (см. также [18]) следуют утверждения.

**Теорема 6.1.** *Если $\varphi \in L_p(\partial D)$, $1 < p < \infty$, то существует прямое значение нормальной производной оператора (6.1)*

$$\begin{aligned} V'(k)\varphi(x) &\equiv \left[\partial_{\nu(M)}\left(\mathcal{V}(k)\varphi\right)\right](x) = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|M-P|>\varepsilon} \partial_{\nu(M)} G_2(k;M,P)\varphi(\tau)\,d\ell_P. \end{aligned} \tag{6.4}$$

*Здесь предел понимается в смысле сходимости в $L_p(\partial D)$ или поточечной сходимости для почти всех $M \in \partial D$.*

*Нормальная производная $\partial_{\nu(M)}\left(\mathcal{V}(k)\varphi\right)$ при почти всех $M \in \partial D$ имеет некасательные пределы $\partial_{\nu(M)}\left(\mathcal{V}(k)\varphi\right)_\pm$ со стороны $D^\pm$, которые выражаются формулами*

$$\partial_{\nu(M)}\left(\mathcal{V}(k)\varphi\right)_\pm = \pm\frac{1}{2}\varphi + V'(k)\varphi. \tag{6.5}$$

**Теорема 6.2.** *Если $\psi \in L_p(\partial D)$, $1 < p < \infty$, то почти всюду на $\partial D$ существует предел*

$$W(k)\psi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|M-P|>\varepsilon} \partial_{\nu(P)} G_1(k;M,P)\psi(\tau)\,d\ell_P. \tag{6.6}$$

Этот предел называют прямым значением оператора $\mathcal{W}(k)\psi$.

**Теорема 6.3.** *Если $\psi \in L_p(\partial D)$, $1 < p < \infty$, то почти всюду на границе $\partial D$ оператор $\mathcal{W}(k)\psi$ имеет некасательные пределы $\left(\mathcal{W}(k)\psi\right)_\pm$ со стороны $D^\pm$, причем справедливы равенства*

$$\left(\mathcal{W}(k)\psi\right)_\pm \psi = \mp\frac{1}{2}\psi + W(k)\psi. \tag{6.7}$$

Поскольку для операторов (6.1), (6.2) выполнены основные соотношения потенциалов, можем считать их аналогами потенциалов простого и двойного слоя. Для обозначения этих операторов используется термин операторы типа потенциала (см., напр., [2, 3, 5]).

Справедливы соотношения (см., напр., [26], [27], [33], [37])

$$\mathcal{V}(k) : H^{t-1/2}(\partial D) \to H^{t+1/2}(\partial D), \quad -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}, \tag{6.8}$$

$$\mathcal{W}(k) : H^{t+1/2}(\partial D) \to H^{t+1/2}(\partial D), \quad -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}, \tag{6.9}$$

в частности,

$$\mathcal{V}(k) : L_2(\partial D) \to H^1(\partial D), \tag{6.10}$$

$$\mathcal{W}(k) : H^1(\partial D) \to H^1(\partial D). \tag{6.11}$$

## 7. Существование решения краевых задач

Как и при доказательстве единственности решения краевых задач, рассмотрим последовательность областей

$$\ldots \subset D_j \subset D_{j+1} \subset \ldots \subset D, \quad D = \bigcup_{j=0}^{\infty} D_j. \tag{7.1}$$

Относительно границы областей предполагаем, что

$$\partial D_j \in C^2, \quad \Gamma_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R} \setminus [-d,d]\} \subset \partial D_j. \tag{7.2}$$

Согласно результатам о разрешимости краевых задач (2.1) – (2.4) в случае, когда граница области $D_j$ принадлежит классу $C^2$, существует единственное решение $u_j(x,y)$. Если $f,g \in C(\partial D)$, то $u_j(x,y) \in C^2(D_j) \cap C\left(\overline{D}_j\right)$ (в случае задачи Неймана выполнено также условие существования правильной нормальной производной на границе области), т.е. полученные решения являются классическими.

Теоремы 3.3 и 3.5 утверждают, что в случае гладкой границы решение краевой задачи Дирихле записывается в виде обобщенного потенциала двойного слоя

$$u_j(M) = \int\limits_{\partial D_j \setminus \Gamma_1} \partial_{\nu(P)} G_1(k;M,P)\varphi_j(\tau)\, d\ell_P + \widetilde{u}(M) \tag{7.3}$$

и обобщенного потенциала простого слоя

$$u_j(M) = \int\limits_{\partial D_j \setminus \Gamma_1} G_2(k; M, P)\varphi_j(\tau)\, d\ell_P + \widetilde{v}(M), \tag{7.4}$$

в случае задачи Неймана. Плотности $\varphi_j$ потенциалов определяются как решения интегральных уравнений (3.3) и (3.5), в которых интегрирование ведется по неровному участку границы $\partial D_j$. Через $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ обозначены решения вспомогательных краевых задач на полуплоскости.

Таким образом, решения краевых задач в областях $D_j$ можно записать в виде последовательности функций $u_0(x,y), u_1(x,y), \ldots$.

Аппроксимирующие области выбраны таким образом, что $\Gamma_1 \subset \partial D_j$. На этом участке выполнены граничные условия, следовательно

$$u_j|_{\Gamma_1} = u_{j+1}|_{\Gamma_1} \tag{7.5}$$

или

$$\partial_\nu u_j|_{\Gamma_1} = \partial_\nu u_{j+1}|_{\Gamma_1} \tag{7.6}$$

в зависимости от рассматриваемой краевой задачи.

Последовательность $u_0, u_1, \ldots$ можно подправить так, чтобы выполнялись соотношения

$$u_j(x,y) = u_k(x,y), \quad (x,y) \in D_k \quad \text{при } k \le j. \tag{7.7}$$

Для этого при фиксированном $j$ рассмотрим в области $D_j$ краевую задачу

$$\Delta u(M) + k^2 u(M) = 0, \quad M \in D_j, \tag{7.8}$$

$$u|_{\partial D_j} = u_{j+1}|_{\partial D_j} \tag{7.9}$$

и, кроме того, потребуем чтобы функция $u$ удовлетворяла условиям излучения (2.4). В случае краевой задачи Неймана вместо условия (7.9) используется условие

$$\partial_\nu u|_{\partial D_j} = \partial_\nu u_{j+1}|_{\partial D_j}\,. \tag{7.10}$$

Отметим, что значение функции $u_{j+1}$ на $\partial D_j$ определено в силу того, что $D_j \subset D_{j+1}$.

Для данной краевой задачи выполнены условия разрешимости для случая гладкой границы, сформулированные в разделе 3, поэтому для каждого $j$ существует классическое решение $\dot{u}_j$ задачи (7.8), (7.9), (2.4).

Но, поскольку функция $u_{j+1}$ в области $D_j$ также удовлетворяет условиям этой краевой задачи, то, в силу единственности, получаем

$$\dot{u}_j = u_{j+1}|_{D_j}\,, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{7.11}$$

Отметим также, что на общем участке границы областей $D_j$ и $D_{j+1}$ имеем

$$\dot{u}_j|_{\partial D_j \cap \partial D_{j+1}} = u_{j+1}|_{\partial D_j \cap \partial D_{j+1}} = f|_{\partial D_j \cap \partial D_{j+1}} \tag{7.12}$$

в случае задачи Дирихле и

$$\partial_\nu \dot{u}_j|_{\partial D_j \cap \partial D_{j+1}} = \partial_\nu u_{j+1}|_{\partial D_j \cap \partial D_{j+1}} = g|_{\partial D_j \cap \partial D_{j+1}} \tag{7.13}$$

в случае задачи Неймана.

Для каждого конечного набора $\{u_0, u_1, \ldots, u_j\}$ решений краевых задач в областях $D_0, D_1, \ldots, D_j$ можем выполнить подобную корректировку, начиная со значения $j$ и уменьшая индекс до 0.

В результате, рассуждая по индукции, получаем последовательность функций $u_0(x, y), u_1(x, y), \ldots$, удовлетворяющую условиям.

1. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ функция $u_j(x, y)$ во всех точках области $D_j$ является решением уравнения Гельмгольца.

2. Если $k \leq j$, то $u_k(x, y) = u_j(x, y)$, $(x, y) \in D_k$.

3. В случае задачи Дирихле выполнено равенство

$$u_j|_{\partial D_j \cap \partial D_{j+1}} = f|_{\partial D_j \cap \partial D_{j+1}}\,,$$

а в случае задачи Неймана

$$\partial_\nu u_j|_{\partial D_j \cap \partial D_{j+1}} = g|_{\partial D_j \cap \partial D_{j+1}}\,.$$

4. В области $D_j$ функция $u_j$ представима в виде обобщенного потенциала вида (7.3) или (7.4) с плотностью, найденной как решение интегрального уравнения (3.3) или (3.5).

Последовательность решений

$$u_0(x, y), u_1(x, y), \ldots \tag{7.14}$$

в силу указанных свойств определяет последовательность функций

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \tag{7.15}$$

являющихся решениями интегральных уравнений (3.3), (3.5), в которых $\Gamma_2$ заменено на неровный участок границы $\partial D_j$, $j = 0, 1, \ldots$.

Покажем, что в $L_2\,[-d, d]$ последовательность $\varphi_j(x)$ фундаментальна.

Пусть $R > d$ — вещественное число, определим область

$$S_R = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \geq R^2, \quad y > 0\right\}. \tag{7.16}$$

Рассмотрим в области $S_R$ две функции $u_i$, $u_j$ из последовательности (7.14). Для определенности будем считать, что $i > j$.

Как было показано, функции $u_i$ и $u_j$ совпадают в области $D_j$, следовательно в области $S_{R,i} = S_R \cap D_i$

$$u_i(x, y) - u_j(x, y) = 0, \quad i > j. \tag{7.17}$$

Запишем последнее соотношение, используя представление решений краевых задач в виде потенциалов (см. теоремы 3.3 и 3.5).

В случае задачи Дирихле имеем

$$\begin{aligned}(u_i \ - \ u_j)\big|_{S_{R,i}} = &\int\limits_{\partial D_i \setminus \Gamma_1} \partial_{\nu(P)} G_1(k; M, P) \varphi_i(\tau)\, d\ell_P - \\ &- \int\limits_{\partial D_j \setminus \Gamma_1} \partial_{\nu(P)} G_1(k; M, P) \varphi_j(\tau)\, d\ell_P.\end{aligned} \tag{7.18}$$

В случае задачи Неймана имеем

$$\begin{aligned}(u_i \ - \ u_j)\big|_{S_{R,i}} = &\int\limits_{\partial D_i \setminus \Gamma_1} G_2(k; M, P) \varphi_i(\tau)\, d\ell_P - \\ &- \int\limits_{\partial D_j \setminus \Gamma_1} G_2(k; M, P) \varphi_j(\tau)\, d\ell_P.\end{aligned} \tag{7.19}$$

Поскольку функция $\varphi_i$ определена как в области $D_i$, так и в области $D_j$ ($D_j \subset D_i$ при $j < i$), то можем рассмотреть потенциал по границе $\partial D_j$ с плотностью $\varphi_i$. Справедливы соотношения

$$\int\limits_{\partial D_i \setminus \Gamma_1} \partial_{\nu(P)} G_1(k; M, P) \varphi_i(\tau)\, d\ell_P - \int\limits_{\partial D_j \setminus \Gamma_1} \partial_{\nu(P)} G_1(k; M, P) \varphi_j(\tau)\, d\ell_P =$$

$$= \int\limits_{\partial D_i \setminus \Gamma_1} \partial_{\nu(P)} G_1(k; M, P) \varphi_i(\tau)\, d\ell_P - \int\limits_{\partial D_j \setminus \Gamma_1} \partial_{\nu(P)} G_1(k; M, P) \varphi_i(\tau)\, d\ell_P +$$

$$+ \int\limits_{\partial D_j \setminus \Gamma_1} \partial_{\nu(P)} G_1(k; M, P) \left(\varphi_i(\tau) - \varphi_j(\tau)\right)\, d\ell_P.$$

Следовательно, из последнего соотношения и из (7.17) получаем

$$\int\limits_{\partial D_j \setminus \Gamma_1} \partial_{\nu(P)} G_1(k; M, P) \left(\varphi_i(\tau) - \varphi_j(\tau)\right)\, d\ell_P \ = \tag{7.20}$$

$$= \int\limits_{\partial D_j \setminus \Gamma_1} \partial_{\nu(P)} G_1(k; M, P) \varphi_i(\tau)\, d\ell_P - \int\limits_{\partial D_i \setminus \Gamma_1} \partial_{\nu(P)} G_1(k; M, P) \varphi_i(\tau)\, d\ell_P.$$

Аналогично, в случае задачи Неймана имеем

$$\begin{gathered} \int\limits_{\partial D_j \setminus \Gamma_1} G_2(k; M, P) \left(\varphi_i(\tau) - \varphi_j(\tau)\right)\, d\ell_P \ = \\ = \int\limits_{\partial D_j \setminus \Gamma_1} G_2(k; M, P) \varphi_i(\tau)\, d\ell_P - \int\limits_{\partial D_i \setminus \Gamma_1} G_2(k; M, P) \varphi_i(\tau)\, d\ell_P. \end{gathered} \tag{7.21}$$

Правые части соотношений (7.20) и (7.21) при $j \to \infty$ стремятся к 0, так как $\partial D_j$, $\partial D_i$ приближаются к $\partial D$.

Из (7.20), (7.21) и теоремы об аппроксимации гладкими областями следуют сходимость последовательности функций $\{\varphi_i\}$. Обозначим через $\psi^*$, $\varphi^*$ пределы последовательности плотностей в случае задачи Дирихле и Неймана соответственно.

Функции

$$u^* = \mathcal{W}(k)\psi^* + \widetilde{u}, \tag{7.22}$$

$$v^* = \mathcal{V}(k)\varphi^* + \widetilde{v} \tag{7.23}$$

удовлетворяют условиям краевой задачи, что вытекает из следующих рассуждений.

Применение оператора следа $\gamma$ к функции $u^*$ и оператора $\gamma'$ к функции $v^*$ приводит в силу теорем 6.1 и 6.3 к соотношениям

$$\gamma u^* = -\frac{1}{2}\psi + W(k)\psi + \widetilde{u}|_{\partial D}\,, \tag{7.24}$$

$$\gamma' u^* = \frac{1}{2}\varphi + V'(k)\varphi + \widetilde{v}|_{\partial D}\,. \tag{7.25}$$

Поскольку соотношения (7.24), (7.25) понимаются в смысле некасательного предела от функций, значения которых на $\partial D$ имеют те же значения, что и $f$ и $g$ (в зависимости от краевого условия), то приходим к заключению, что на $\partial D$ выполнены соотношения

$$\gamma u^*(x, y) \ = \ f(x, y), \quad (x, y) \in \partial D, \tag{7.26}$$

$$\gamma' v^*(x, y) \ = \ g(x, y), \quad (x, y) \in \partial D. \tag{7.27}$$

В результате, заключаем, что справедливы следующие утверждения.

**Теорема 7.1.** *При условии* $\operatorname{Im} k \geq 0$ *последовательность* $\{\psi_j(x)\}_1^\infty$ *решений интегральных уравнений (3.3) сходится в пространстве* $L_2[-d,d]$ *к такой функции* $\psi(x)$, *что функция*

$$u(M) = \widetilde{u}\,(M) + (\mathcal{W}(k)\psi)\,(M) \tag{7.28}$$

*является решением краевой задачи (2.1) – (2.4) с условием Дирихле на границе. Через* $\widetilde{u}$ *обозначено решение вспомогательной краевой задачи Дирихле на полуплоскости, а* $\mathcal{W}(k)\psi$ *— оператор типа потенциала, определяемый соотношением (6.2).*

**Теорема 7.2.** *При условиях* $\operatorname{Im} k \geq 0$ *и* $\operatorname{Re} k \neq 0$ *последовательность* $\{\varphi_j(x)\}_1^\infty$ *решений интегральных уравнений (3.5) сходится в пространстве* $L_2[-d,d]$ *к такой функции* $\varphi(x)$, *что функция*

$$u\,(M) = \widetilde{v}\,(M) + (\mathcal{V}(k)\varphi)\,(M) \tag{7.29}$$

*является решением краевой задачи (2.1) – (2.4) с условием Неймана на границе. Через* $\widetilde{v}$ *обозначено решение краевой задачи Неймана на полуплоскости, а* $\mathcal{V}(k)\varphi$ *— оператор типа потенциала, определяемый соотношением (6.1).*

**Теорема 7.3.** *Существует единственное решение* $u(x,y)$ *рассматриваемых краевых задач, и справедливы представления*

$$u = \widetilde{u} + \mathcal{W}(k)\left[(I - W(k))^{-1} f\right] \quad \text{в случае задачи Дирихле,} \tag{7.30}$$

$$u = \widetilde{v} + \mathcal{V}(k)\left[(I - V'(k))^{-1} g\right] \quad \text{в случае задачи Неймана.} \tag{7.31}$$

Функции $\varphi^*$, $\psi^*$, как и функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, финитны и их носители содержатся в $[-d,d]$. Это позволяет рассматривать интегралы (3.2) – (3.5), (6.1), (6.2) не как интегралы по участку границы $\Gamma_2$, но как интегралы по замкнутому контуру, содержащему $\Gamma_2$. Следовательно, для (3.2), (3.4) и (6.1), (6.2) справедливы утверждения, полученные для потенциалов и операторов типа потенциала в ограниченных областях.

## 8. Приближенное решение краевых задач

Алгоритм приближенного решения краевой задачи (2.1) – (2.4) основан на приближенном решении интегральных уравнений

$$(I - W(k))\,\sigma(x) = f\,(x, h(x)) - \widetilde{u}\,(x, h(x))\,, \quad x \in [-d,d], \tag{8.1}$$

$$(I - V'(k))\,\sigma(x) = g\,(x, h(x)) - \partial_{\nu(x,h(x))}\widetilde{v}\,(x, h(x))\,, \quad x \in [-d, d], \quad (8.2)$$

которым удовлетворяют плотности $\sigma(x)$ операторов типа потенциала (6.1) и (6.2). С помощью функции $\sigma(x)$ по формулам (7.28), (7.29) строится решение краевой задачи.

Рассмотрим $B$–сплайн первого порядка

$$\varphi(x) \equiv S_2(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 2 - x, & x \in [1, 2], \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (8.3)$$

Пусть $p$ — целое число. Определим функции

$$\varphi_{pq}(x) = \sqrt{2^p}\varphi\,(2^p x - q)\,, \quad q \in \mathbb{Z} \quad (8.4)$$

и пространство $V_p$, порожденное этими функциями. Семейство $\{\varphi_{pq}\}_{q\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса пространства $V_p$ ($p \in \mathbb{Z}$) (см., напр., [8, 39]). Ортонормированный базис пространства $V_p$ строится с помощью процедуры, известной как ортогонализационный прием, согласно которому вместо функции $\varphi$, порождающей весь базис, рассматривается функция

$$\varphi^* = F^{-1}\left[\hat{\varphi}^*(\omega)\right], \quad (8.5)$$

где $F^{-1}[\cdot]$ — обратное преобразование Фурье и

$$\hat{\varphi}^*(\omega) = \frac{4\sqrt{3}\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2\sqrt{1 + 2\cos^2\frac{\omega}{2}}}. \quad (8.6)$$

При вычислении функции $\varphi^*$ используют разложение

$$\varphi^*(x) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} c_q \varphi(x - q).$$

Коэффициенты этого разложения известны и в рассматриваемом случае равны

$$c_0 = 1.2917, \quad c_{-1} = c_1 = -0.1747, \quad c_{-2} = c_2 = 0.0352,$$

$$c_{-3} = c_3 = -0.0079, \quad c_{-4} = c_4 = 0.0018, \quad c_{-5} = c_5 = -0.0004.$$

Семейство функций

$$\left\{\varphi^*{}_{pq} \equiv \sqrt{2^p}\varphi^*\,(2^p x - q)\right\}_{q\in\mathbb{Z}}$$

образует ортонормированный базис пространства $V_p$ ($p \in \mathbb{Z}$) (см., напр., [8]).

Всплеск $\psi^*$, соответствующий функции $\varphi^*$ (эту функцию называют превсплеском или скалетом), вычисляют по формуле

$$\psi^*(x) = 2\sum_q c_q \varphi(2x - q), \tag{8.7}$$

где используются те же значения коэффициентов разложения, что и ранее. Отметим также, что справедливо соотношение

$$\hat{\psi}^*(\omega) = \sqrt{3}e^{i\frac{\omega}{2}} \sin^2 \frac{\omega}{4} \sqrt{\frac{1 + 2\sin^2 \frac{\omega}{4}}{\left(1 + 2\cos^2 \frac{\omega}{2}\right)\left(1 + 2\cos^2 \frac{\omega}{4}\right)}} \cdot \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \tag{8.8}$$

Далее, рассмотрим ортогональное дополнение $W_p$ пространства $V_p$ до пространства $V_{p+1}$. Функции $\left\{\psi^*_{pq}\right\}$ $(q \in \mathbb{Z})$ образуют ортонормированный базис пространства $W_p$. Таким образом, имеет кратномасштабный анализ пространства $L^2(\mathbb{R})$ (см., напр., [8, 39]). Пространства $V_p$, $W_p$ бесконечномерные, и для построения аппроксимирующих пространств строятся новые пространства, для чего применяется процедура периодизации.

Рассмотрим функции

$$\widetilde{\varphi}_{pq} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi^*_{pq}(x + l), \quad \text{для} \;\; 0 \le q \le 2^p, \; p \ge 0, \tag{8.9}$$

$$\widetilde{\psi}_{pq} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi^*_{pq}(x + l), \quad \text{для} \;\; 0 \le q \le 2^p, \; p \ge 0. \tag{8.10}$$

Каждое из этих семейств образует базис пространства $L^2(0, d)$ (см., напр., [39]).

Рассмотрим пространства $\widetilde{V}_i$ и $\widetilde{W}_i$, порожденные функциями $\widetilde{\varphi}_{ij}$ $(j \in \mathbb{Z})$ и $\widetilde{\psi}_{ij}$ $(j \in \mathbb{Z})$, соответственно.

Имеем

$$\ldots \subset \widetilde{V}_1 \subset \ldots \subset \widetilde{V}_i \subset \ldots,$$
$$\dim \widetilde{V}_i = 2^i, \quad i \in \mathbb{Z},$$
$$\widetilde{V}_{i+1} = \widetilde{V}_i \oplus \widetilde{W}_i.$$

Предложена следующая вычислительная схема решения краевой задачи. Поскольку решение краевой задачи представлено в виде потенциала, плотность которого определяется из интегрального уравнения, достаточно указать шаги, связанные с приближенным решением интегрального уравнения.

В качестве аппроксимирующих пространств выбираются пространства

$$\widetilde{V}_n = \widetilde{V}_0 \oplus \widetilde{W}_0 \oplus \widetilde{W}_1 \oplus \ldots \oplus \widetilde{W}_n,$$

и приближенное решение интегрального уравнения ищется в виде

$$\varrho_n(x) = a_0 \widetilde{\varphi}_{00}(x) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{q=0}^{2^i-1} b_{iq} \widetilde{\psi}_{iq}(x), \tag{8.11}$$

где коэффициенты $a_0$, $b_{iq}(i = 0, \ldots, n,\ q = 0, \ldots, 2^{i-1})$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений метода Галёркина.

**Теорема 7.3.** *Приближенное решение $\varrho_n(x)$ при $n \to \infty$ сходится к точному решению $\sigma(x)$, и погрешность приближенного решения может быть оценена соотношением*

$$\|\sigma - \varrho_n\|_2 \leq C \frac{1}{2^n} \left( \|\sigma\|_2 + \|\chi\|_{H^1} \right), \tag{8.12}$$

*где $C$ — константа, не зависящая от $n$, а $\chi(x) = f(x, h(x)) - \widetilde{u}(x, h(x))$ в случае уравнения (8.1) и $\chi(x) = g(x, h(x)) - \partial_{\nu(x,h(x))} \widetilde{v}(x, h(x))$ в случае уравнения (8.2).*

**Доказательство.** Доказательство проведено по схеме, предложенной в [29]. Обозначим через $P_n$ проекционный оператор, действующий из $L_2$ на $\widetilde{V}_n$. Если записать уравнения (8.1), (8.2) в виде

$$(I - K)\, \sigma = \chi, \tag{8.13}$$

то приближенное уравнение можно записать как

$$(I - K_n)\, \varrho = P_n \chi, \tag{8.14}$$

где $K_n = P_n K$.

Имеем (см., напр., [29, 39])

$$\|w - P_n w\| \leq C 2^{-n} \|w\|_{H^1}. \tag{8.15}$$

Поскольку оператор $K$ компактный, то

$$\|K w\|_{H^1} \leq C \|w\|. \tag{8.16}$$

Тогда

$$\|(K - K_n)\, w\| = \|(I - P_n)\, K w\| \leq C 2^{-n} \|w\|. \tag{8.17}$$

Следовательно,
$$\|K - K_n\| \le C 2^{-n}. \tag{8.18}$$

Покажем, что
$$\|w\| \le C \left\|(I - K)\, w\right\|. \tag{8.19}$$

Действительно, из (8.13) следует, что
$$\sigma = (I - K)^{-1} \chi.$$

Поэтому
$$\|\sigma\| \le \|\, (I - K)^{-1} \,\| \cdot \|\chi\|. \tag{8.20}$$

Рассмотрим функцию $\chi = (I - K)\, w$. Подстановка в (8.13) приводит к соотношению $(I - K)\,\sigma = (I - K)\, w$. Из последнего соотношения и (8.20) получаем
$$\|w\| \le \|\, (I - K)^{-1} \,\| \cdot \|(I - K)\, w\| \le C \left\|(I - K)\, w\right\|.$$

Из соотношений (8.19), (8.18) следует
$$\|w\| \le C_1 \left\|(I - K)\, w\right\| \le C_1 \left(\|(I - K_n)\, w\| + \|(K - K_n)\, w\|\right) \le$$
$$\le C_1 \left\|(I - K_n)\, w\right\| + C_2 2^{-n} \|w\|.$$

Из последнего соотношения получаем оценку
$$\|w\| \le \frac{C_1}{1 - C_2 \cdot 2^{-n}} \|\, (I - K_n)\, w\| \le C \|\, (I - K_n)\, w\|. \tag{8.21}$$

Из (8.13) и (8.14) имеем
$$(I - K_n)\,(\sigma - \varrho) = (I - K_n)\,\sigma - (I - K_n)\,\varrho = (I - K_n) - P_n\chi - \chi + \chi =$$
$$= (I - K_n)\,\sigma - P_n\chi - (I - K)\,\sigma + \chi = (I - K_n)\,\sigma - (I - K)\,\sigma + (I - P_n)\,\chi.$$

Следовательно,
$$(I - K_n)\,(\sigma - \varrho) = (K - K_n)\,\sigma + (I - P_n)\,\chi. \tag{8.22}$$

Из (8.19) получаем
$$\|\sigma - \varrho\| \le C \|\, (I - K_n)\,(\sigma - \varrho)\| \le C\,(\|\, (K_n - K)\,\sigma\|) + \|\, (I - P_n)\,\chi\|.$$

Таким образом, имеем
$$\|\sigma - \varrho\| \le C 2^{-n} \left(\|\sigma\| + \|\chi\|_{H^1}\right).$$

## Литература


[1] Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям.* — М.: Наука, 1979. — 832 с.

[2] Агранович М. С. *Спектральные свойства операторов типа потенциала для некоторого класса сильно эллиптических систем на гладких и липшицевых поверхностях* // Труды Моск. матем. общества. — 2001. — Т. 62. — С. 3–53.

[3] Агранович М. С. *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей* // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57, № 5. — С. 3–78.

[4] Агранович М. С., Амосов Б. А. *Оценки $s$–чисел и спектральные асимптотики для интегральных операторов типа потенциала на негладких поверхностях* // Функц. анализ и его прилож. — 1996. — Т. 30, № 2. — С. 1–18.

[5] Агранович М. С., Менникен Р. *Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности* // Матем. сб. — 1999. — Т. 190, № 1. — С. 29–68.

[6] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения* — М.: Наука, 1975. — 480 с.

[7] Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* — М.: Наука, 1967. — 436 с.

[8] Добечи И. *Десять лекций по вейвлетам.* — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. — 464 с.

[9] Дынькин Е. М. *Методы теории сингулярных интегралов. (Преобразование Гильберта и теория Кальдерона–Зигмунда)* // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. — Т. 15. — М.: ВИНИТИ, 1986. — С. 197–292.

[10] Дынькин Е. М. *Методы теории сингулярных интегралов. II. Теория Литлвуда – Пэли и ее приложения* // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. — Т. 42. — М.: ВИНИТИ, 1989. — С. 105–198.

[11] Егоров Ю. В. *К теории обобщенных функций* // Успехи матем. наук. — 1990. — Т. 45, № 5. — С. 3–40.

[12] Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. *Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции).* — М.: ИПРЖР, 1996. — 176 с.

[13] Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* — М.: Мир, 1987. — 311 с.

[14] Кудрявцев Л. Д., Никольский С. М. *Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения* // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. — Т. 26. — М.: ВИНИТИ, 1988. — С. 5–157.

[15] Липачёв Е. К. *О разрешимости задачи рассеяния на бесконечной решетке с конечной нарезкой* // Материалы конф. "Алгебра и анализ", Казань, 16–22 июня 1997. — Казань: Казан. матем. общество. – 1997. – С. 135–136.

[16] Липачёв Е. К. *К приближенному решению краевой задачи дифракции волн на областях с бесконечной границей* // Изв. Вузов. Математика, 2001. — № 4 (467). — С. 69 – 72.

[17] Липачёв Е.К. *О краевых задачах для уравнения Гельмгольца в областях с неровной границей* // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. общество. – 2002. – Т. 17. – С. 79–89.

[18] Мазья В. Г. *Граничные интегральные уравнения* // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. — Т. 27. — М.: ВИНИТИ, 1988. — С. 131 – 228.

[19] Плещинский Н. Б. *Метод преобразования Фурье в задачах сопряжения электромагнитных полей* // Тр. Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 6. Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. — Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. — С. 153 – 185.

[20] Ремпель Ш., Шульце Б.–В. *Теория индекса эллиптических краевых задач.* — М.: Мир, 1986. — 576 с.

[21] Рудин У. *Функциональный анализ.* — М.: Мир, 1975. — 443 с.

[22] Слободецкий Л. Н. *Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных* // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин–та им. А. И. Герцена. 1958. — Т. 197. — С. 54–112.

[23] Стейн И. М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* — М.: Мир, 1973. — 342 с.

[24] Coifman A.P., McIntosh A., Meyer Y. *L'intégrale de Cauchy définit un opérator borné sur $L^2$ pour les courbes lipschitiziennes* // Ann. of Math.(2), 1982. — V. 116. — P. 361–387.

[25] Colombeau J. F. *Elementary introduction to new generalization functions.* — Elsevier Sci. Publ., 1985. — 281 p.

[26] Costabel M. *Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results* // SIAM J. Math. Anal. 1988. — V. 19. — P. 613–626.

[27] Dahlberg B. E. J., Kenig C. E. *Harmonic Analysis and Partial Differential Equations.* — Göteborg, Dept. of Math. Chalmers University of Technology and the University of Göteborg, 1985/1996.

[28] Ding Z. *A proof of the trace theorem of Sobolev spaces on Lipschitz domains* // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. — V. 124. — P. 591–600.

[29] Dorobantu M. *Potential Integral Equations for the 2D Laplace Operator in Wavelet Basis*// NADA Tech. Report TRITA–NA–9401, April 1994. — 32 p.

[30] Escauriaza L., Fabes E.B., Verchota G. *On a regularity Theorem for weak solutions to transmission problems with internal lipschitz boundaries* // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. — V. 115., No. 4. — P. 1069–1076.

[31] Jerison D., Kenig C. *The Neumann problem on Lipschitz domains* // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. — V. 4. — P. 203–207.

[32] Jerison D., Kenig C. *The Dirichlet problem in non–smooth domains* // Ann. of Math. 1981. — V. 113. — P. 367–382.

[33] Jerison D., Kenig C. *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains* // J. Funct. Anal. 1995. — V. 130. — P. 161–219.

[34] Lanzani L. *Szegő Projection versus potential theory for non–smooth planar domains* // Indiana Univ. Math. J. 1999. – V. 48, No. 2. — P. 537–555.

[35] Lipachev E. K. *Approximate methods for solving the problem of scattering by the gratings wiht a groove structure of a finite size* //

Труды VII Междун. симпозиума “Методы дискретных особенностей в задачах матем. физики”, Феодосия, 26–29 июня 1997. — Херсонский гос. техн. ун–т, 1997. — С. 203–205.

[36] Lipachev E. K. *Diffraction of electromagnetic waves by grating with piecewise smooth boundaries* // Conf. Proceedings “Math. Methods in Electromagnetic Theory”. — Kharkov, 1998. — C. 174–176.

[37] Mitrea M., Taylor M. *Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds* // J. Funct. Anal. 1999. — V. 163. — P. 181–251.

[38] Mitrea M., Taylor M. *Potential theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev–Besov space results and the Poisson problem* // J. Funct. Anal. 2000. — V. 176. — P. 1–79.

[39] Pan G. W. *Wavelets in Electromagnetics and Device Modeling.* — New York: Wiley–Interscience, 2003. — 532 p.

[40] Tartar L. C. *An Introduction to Sobolev spaces and Interpolation Spaces* // CNA Summer School Lectures Notes, 2001.

[41] Tsang L., Ding K. H., Ao C.A. *Scattering of Electromagnetic waves. Numerical Simulations.* — New York: Wiley–Interscience, 2001. — 705 p.

[42] Verchota G. *Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains* // J. Funct. Anal. 1984. — V. 59. — P. 572–611.