§3. Образ оператора. Ядро оператора. Ранг матрицы.

Пусть $A: \mathcal{X} \to Y$ - линейный оператор. Множество всех векторов y из пространства Y таких, что $y = Ax$ для некоторого $x \in \mathcal{X}$, называется областью значений или образом оператора и обозначается через $Im(A)$. Множество $Im(A)$ - линейное подпространство пространства Y. Размерность подпространства $Im(A)$ наз-ся рангом оператора A и обозначается через $rank(A)$.

Множество всех векторов $x \in \mathcal{X}$ таких, что $Ax = 0$, наз-ся ядром оператора A и обозначается через $Ker(A)$. Это множество - линейное подпространство пространства $\mathcal{X}$. Размерность подпространства $Ker(A)$ наз-ся дефектом оператора A и обозначается через $def(A)$.

Для любого линейного оператора $A: \mathcal{X}_n \to Y_m$

$$rank(A) + def(A) = n \qquad (1)$$

Пусть в пространстве $\mathcal{X}$ дана некоторая система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$. Будем считать, что не все векторы этой системы нулевые. Тогда указанная система обязательно содержит линейно независимую подсистему векторов. В частности она сама может быть линейно независимой.

Подсистема векторов $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r \subset \{a^i\}_{i=1}^m$, состоящая из линейно независимых векторов, наз-ся максимальной, если добавление к ней любого нового вектора из $\{a^i\}_{i=1}^m$ приводит к линейно зависимой системе.

Любые две максимальные линейно независимые подсистемы данной системы содержат одно и то же кол-во векторов. Рангом системы векторов наз-ся кол-во векторов её максимальной линейно независимой подсистемы.

Пусть $A(m,n)$ - произвольная прямоугольная матрица. Будем трактовать её столбцы как систему векторов пространства $\mathbb{C}^m$. Ранг этой системы векторов назовём рангом матрицы $A(m,n)$. Ранг матрицы A будем обозначать через $rank(A)$

Матрицу $A(m,n)$ можно трактовать и как систему строк из пространства C^n. Для любой матрицы $A(m,n)$ ранг этой системы строк равен рангу системы её столбцов.

Пусть $\mathcal{A}: X_n \to Y_m$, A_{eq} - матрица оператора $\mathcal{A}$ относительно произвол. образом фикс. базисов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset X_n$ и $\{q_k\}_{k=1}^m \subset Y_m$.

Тогда $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_{eq})$

Ранг матрицы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, выбираемых при её построении, и можно было бы дать эквивалентное определение ранга оператора как ранга его матрицы.

Упражнение 1

Показать что $\operatorname{Ker}(A)$ - линейное подпространство пространства X для любого линейного оператора $A: X \to Y$.

Согласно определению $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = \{x \in X : \mathcal{A}x = 0\}$. Пусть x, y - произвольные векторы из $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$, α, β - любые числа. Тогда $\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y = 0$, т.е. линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ принадлежит множеству $\operatorname{Ker}(\mathcal{A})$

Упражнение 2

Показать, что для любых допускающих умножение прямоугольных матриц A, B справедливо неравенство

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(\mathcal{A}), \operatorname{rank}(B)\}$$

Обозначим $C = AB$. Столбцы матрицы C линейно выражаются через столбцы матрицы A, которые в свою очередь линейно выражаются через максимальную подсистему линейно независимых столбцов матрицы A. Число столбцов в этой подсистеме равно $\operatorname{rank}(A)$. Назовем столбцы этой подсистемы базисными. Можно сказать, что столбцы матрицы C принадлежат подпространству, натянутому на базисные столбцы матрицы A. Следовательно, число линейно независимых столбцов матрицы C не может превышать $\operatorname{rank}(A)$. С другой стороны, строки матрицы C линейно выражаются через строки матрицы B. Проводя аналогичные рассуждения, заключаем, что $\operatorname{rank}(C) \le \operatorname{rank}(B)$

Упражнение 3

Найти максимальную линейно независимую подсистему след. системы векторов пространства $\mathbb{R}^3$:

$$a^1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad a^2 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \quad a^3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad a^4 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Что можно сказать о базисе подпространства, натянутого на векторы a^1, a^2, a^3, a^4?

Рассмотрим эту систему векторов. Векторы a^1, a^2 линейно независимы. Они образуют максимальную линейно независимую подсистему, т.к. определители, составленные из компонент векторов a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 соответственно равны нулю:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 2 & 1\\3 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Следовательно, векторы a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 линейно зависимы. Это не единственная максимальная линейно независимая подсистема. Таким же св-вом обладают, например, пары векторов a^1, a^3 и a^1, a^4. Любая из указанных пар линейно независимых векторов образует базис подпространства, натянутого на векторы a^1, a^2, a^3, a^4. Ранг этой системы векторов равен двум.

Упражнение 4

Пусть $A: \mathcal{X}_n \to Y_m$ - линейный оператор, $e^1, \dots e^n$ - базис пространства $\mathcal{X}_n$. Д-ть, что

$$Im(A) = L(Ae^1, \dots, Ae^n),$$

где $L(Ae^1, \dots Ae^n)$ - подпространство пространства Y_m, натянутое на векторы $Ae^1, \dots, Ae^n$.

Пусть $y \in Im(A)$. Тогда $y = Ax$ для некоторого вектора $x \in \mathcal{X}_n$, т.е.

$$y = A\left(\sum_{i=1}^{m} \xi e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) \in L(Ae^1, \dots, Ae^n)$$

С другой стороны, если $y \in L(Ae^1, \dots, Ae^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = Ax,$$

где $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т.е. $y \in Im(A)$. Значит, $Im(A) = L(Ae^1, \dots, Ae^n)$

Упражнение 5

Для след. лин. преобразований ортон. прос-ва $\mathbb{R}^3$ построить базис образа, найти ранг и дефект

а) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$

б) $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_1,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$

с) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$

а)
$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 1$$

Базис образа: $(1, 1, 1)$

$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{def}(A) = n$

$1 + \operatorname{def}(A) = 3$

$\operatorname{def}(A) = 2$

б)
$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 1 - 1 - 2 - 2 - 2 = \cancel{2}\,0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 2$$

Базис образа: $(2, 1, 1)$ $(-1, -2, 1)$

$2 + \operatorname{def}(A) = 3$

$\operatorname{def}(A) = 1$

с)
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$\Downarrow$

$\operatorname{rank}(A) = 3$

Базис образа: $(-1, 1, 1)$ $(1, -1, 1)$ $(1, 1, -1)$

$3 + \operatorname{def}(A) = 3$ $\quad \operatorname{def}(A) = 0$

Упражнение 6

Описать образ и ядро оператора дифференцирования D в пространстве P_n полиномов степени не выше n с вещ. коэф.

Каждому элементу пространства P_n оператор D ставит в соответствие полином из P_{n-1}.
Любой полином нулевой степени (вещ. число) оператор D обращает в ноль. Полиномы более высоких степеней в рез-те дифференцирования не могут обратиться в функцию тождественно равную нулю. Поэтому $Ker(D) = P_0$.
Поэтому $Im(D) = P_{n-1}$, и можно считать, что
$D : P_n \to P_{n-1}$

Упражнение 11

$rank(A) - ?$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 9 + 2 - 6 - 6 - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 2 + 1 - 2 + 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \overset{-4}{\cancel{0}} \Rightarrow \quad rank(A) = 2$$

Упражнение 12

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 35 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 91 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

1) Из второй строки матрицы вычтем первую ×2
2) Из третьей строки матрицы вычтем первую ×3
3) Из получив. строки матрицы вычтем первую ×2

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -10 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$ => Вычтем из 3 стр. 2-ую. Приб. 2 строку к 4, получим

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} > 0, \text{ а } \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ и}$$

$$\begin{vmatrix} 19 & 36 & 72 & -38 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ равны нулю

$\Downarrow$

rank = 3

$$= \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det(A^{4\times4}) = 0$, $\mathrm{rank}(A) = 3$

в)
$$\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -4 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -28 & 17 & 0 & 11 \\ 0 & -37 & 24 & 0 & 13 \\ 0 & -7 & 25 & 0 & -18 \\ 0 & 12 & 31 & 0 & -43 \\ 0 & 13 & 42 & 0 & -55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(-1) (-1) (-1) (-1) +

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 74 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & 97 & 0 & -55 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 43 & -18 \end{vmatrix} = -108 - 473 \neq 0$$

Миноры 3-го порядка $= 0$

$\mathrm{rank}(A) = 2$

Упражнение 16

а)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -1-6 \neq 0$$

$M_{33} =$

$1 -45 + 25 + 10 + 6 + 3 = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -63+20-1-3+35+12=0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 18+7-105+21+45+14=0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 1-147+36+28+3+63=-128$$

rank = 3

б) $$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -9+5=-4 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 45-2-45+9-25+18=0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -120$$

$\det(G_1^{4\times4})=0 \quad \det(G_2^{4\times4})=0 \Rightarrow \operatorname{rank}(A)=3$

Упражнение 17

Чему равен при разл. λ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 6+\lambda^2-70-1+12\lambda-10\lambda=0$$

$\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 15 = 64 = 8^2$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = -5$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & 5 \\ 10 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 50 + 12 - 20\lambda - 1 + 30\lambda$$

$\lambda^2 + 10\lambda - 39$

$D = 16^2$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -13$

При $\lambda = 3$ $\quad rank(A) = 3$

При $\lambda \neq 3$ $(-5$ или $-13)$ $\quad rank(A) = 3$

Упражнение 18

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} =$$

$(\times 3)$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -67 & 35 & 155 \\ 3 & 98 & 23 & 86 \\ 15 & -428 & 1 & 22 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -67 & 35 & 0 & 155 \\ 3 & 98 & 23 & 0 & 86 \\ 15 & -428 & 1 & 0 & 22 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -67 & 35 & 0 & 170 \\ 3 & 98 & 23 & 0 & 63 \\ 15 & -428 & 1 & 0 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow 12 \cdot 86 - 67 \cdot 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\det = 0$

$$\begin{vmatrix} 12 & -67 & 35 \\ 3 & 98 & 23 \\ 15 & -428 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad rank(A) = 3$$

Упражнение 7

Описать образ и ядро оператора отражения P прос-ва X на подпрос-во L_1 параллельно подпрос-ву L_2

$x = x^1 + x^2 \quad x^1 \in L_1 \quad x^2 \in L_2 \quad x \in X$

$P: X \to X \Rightarrow Px = x^1$

Ответ: $Im(P) = L_1 \quad Ker(P) = L_2$

Упражнение 8

Описать образ и ядро оператора отражения R пр-ва X относительно под-ва L_1 параллельно подпрос-ву L_2

$x = x^1 + x^2 \quad x^1 \in L_1 \quad x^2 \in L_2$

причём векторы x^1, x^2 однозначно опр. x

$R: X \to X, \; Rx = x^1 - x^2$

Ответ: $Im(R) = X \quad Ker(R) = \{0\}$

Упражнение 9

Найти образ и ядро лин. оператора A, действ. в геомет. пр-ве V_3 по правилу $Ax = [x, a]$, где a - фикс. ненулевой вектор

Образ плос-ть $(x, a) = 0$, ядро - прямая $[x, a] = 0$