ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2017, № 4, с. 1–15

УДК 532.517.2

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ГЛАДКИХ ТРУБАХ-ЗМЕЕВИКАХ

© 2017 г. А.Г. Багоутдинова*, [a], Е.К. Вачагина, [b], Я.Д. Золотоносов*, [c]**

**Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань*
***Казанский научный центр РАН, Казань*

e-mail: [a] bagoutdinova@rambler.ru, [b] vachaginae@mail.ru, [c] zolotonosov@mail.ru

Поступила в редакцию 01.07.2016 г.

Предложена математическая модель и представлены результаты численной реализации задачи ламинарного течения несжимаемой вязкой жидкости в гладких трубах-змеевиках в неортогональной винтовой системе координат. Такая система не имеет особенностей в области определения неизвестных функций: давления и компонент скорости, что позволяет уточнить существующие распределения осевой компоненты и вторичных поперечных потоков, полученные с использованием известной ортогональной системы координат с особенностью в центре змеевикового канала. Уравнение переноса количества движения записывалось в проекциях на оси естественного базиса системы координат, что позволило разделить систему уравнений на две подсистемы, решаемые попеременно. Представлены профили осевой и двух поперечных составляющих, из которых видно, что поперечные составляющие в центре труб-змеевиков соизмеримы по величине с осевой скоростью (величина поперечных составляющих скорости может достигать половины значения среднерасходной скорости, а в центре канала – ее трети).

Ключевые слова: теплообмен, гидродинамика, математическая модель, винтовая спираль, змеевики, винтовая координатная система, метрический тензор.

DOI: ...

Традиционно изогнутые трубы-змеевики применяются в качестве эффективных элементов современного теплообменного оборудования [1–11].

Широкое применение в промышленности нашли трубы-змеевики [1–4, 12–15] с постоянным радиусом изгиба винтовой спирали, погруженные в сосуд с жидкой средой. Методика их инженерного расчета описана в отечественной [16] и зарубежной [12–15, 17–19] литературе. В этой связи, весьма актуальными являются детальные теоретические и экспериментальные исследования гидродинамических и теплообменных процессов, протекающих в проточной части изогнутых труб-змеевиков.

Основой для разработки математической модели течения вязких жидкостей можно считать работы [20–23], в которых исследовались потоки в каналах со слабо искривленной осью. Для описания таких течений использовались упрощенные уравнения Навье–Стокса для изогнутых труб с малой кривизной оси. Позднее указанный подход был применен для случая ламинарного течения жидкостей в змеевиках[24, 25].

Для ламинарных течений жидкостей в трубах-змеевиках с произвольными значениями кривизны и кручения центральной винтовой линии, как и при течениях в поворотах (торах), характерны вторичные потоки [7]. Именно поперечная циркуляция жидкости в проточной части рассматриваемых криволинейных каналов является основной причиной интенсификации теплообменных процессов [5–10]. Для таких течений естественны предположения о значимости величины вторичных потоков в центре змеевиковой трубы, и о несимметричном распределении поперечных компонент скорости в сечении относительно прямой с направляющим вектором, совпадающим с вектором главной нормали к центральной винтовой линии. Таким образом, поперечные компоненты в ортогональной системе координат [24, 25] в центре сечения не определены, в его окрестности сильно меняются и могут быть оценены с большой погрешностью. В этом случае прибегают к различным упрощениям и приближениям, которые, однако, не позволяют в полной мере оценить распределения полей скоростей в центральной области канала [26]. Использование предложенной ниже неортогональной системы позволяет получить более точную картину распределения скоростных полей в этой области.

Известны работы, например [12, 19], использующие численные методы для решения задачи течения вязких жидкостей в змеевиках, записанной в декартовой системе координат в трехмерной постановке. В этом случае не учитывается винтовая симметрия, и необходимый объем численных расчетов становится неоправданно большим. В литературе также хорошо известны и достаточно полно описаны специальные винтовые системы координат [24, 25, 27–30], позволяющие свести решение трехмерных задач к двумерным. В [24, 25] предложены ортогональная и неортогональная системы координат. Однако ортогональная система имеет недостаток: сдвиг по винтовой линии не является сдвигом по одной из независимых переменных, поэтому после записи основной системы уравнений в ортогональной системе неизбежен обратный переход к переменным неортогональной системы.

В [31] предложен метод дробных шагов для анализа процессов теплообмена при ламинарных течениях с полностью сформировавшимися профилями скорости и давления в изогнутых тороидальных трубах при использовании тороидальной системы координат. В этом случае решение поставленной задачи зависит только от двух переменных, определенных в поперечном сечении изогнутой трубы. Учитывая, что в центре поперечного сечения тороидальной трубы расположена особая точка этой координатной системы (якобиан равен нулю), в [31] предложено использовать симметрию рассматриваемых течений относительно прямой, проходящей через вектор главной нормали к осевой линии трубы, и искать неизвестные распределения полей скоростей и давлений только в одной половине поперечного сечения. Этот прием позволяет обойти особую точку системы. В нашем случае, когда необходимо учитывать кручение осевой линии, условие симметрии нарушается, и рассмотрение течения только в одной половине поперечного сечения неправомерно. Однако подход [31] может быть использован для случая течения в трубах-змеевиках, когда радиус изгиба значительно больше диаметра его проточной части [32–34].

В [7] показано, что эффект теплообмена существенно выше в змеевиковых аппаратах с малым радиусом изгиба змеевиковых труб, поскольку в проточной части таких труб наиболее ярко проявляется эффект образования тороидальных вихрей и перемешивания. Особенность течения в таких трубах отличается от гидродинамических условий течения в тороидальных трубах, ранее обстоятельно рассмотренных в [31]. Из-за нарушения симметрии течения в трубах, анализ потоков только в одной половине некорректен.

Основная цель настоящей работы — получение и анализ распределения гидродинамических характеристик в широких диапазонах изменения геометрических и режимных параметров во всей области течения жидкости, в том числе и в центральной части исследуемых труб змеевиков. Поскольку поперечные потоки являются причиной интенсификации теплообменных процессов в трубах-змеевиках, возникает необходимость получения профилей поперечных компонент скорости для оценки их величин по сравнению с осевыми потоками.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Поскольку геометрическая форма змеевиковых каналов, а также система уравнений движения и неразрывности инвариантны относительно сдвигов по винтовой спирали, отметим факт существования и единственности решения этой системы при некоторых ограничениях на число Рейнольдса [35]. При использовании обычной декартовой системы координат численное решение будет существенно зависеть от трех пространственных координат, что значительно усложняет расчеты, снижает их точность, а также последующую обработку и представление полученных результатов.

Считаем, что движение несжимаемой жидкости имеет стационарный, изотермический и ламинарный характер. Плотность ρ при движении жидкости в змеевиковых каналах меняется незначительно.

С целью использования геометрической симметрии змеевиковых каналов используем винтовую систему координат, связанную с переменными декартовой системы следующими соотношениями

$$\begin{cases} x = \dfrac{d}{2}\kappa\cos\left(\xi^3\right) + \dfrac{d}{2}\left(-\xi^1\cos\left(\xi^3\right) + \xi^2\dfrac{w\sin\left(\xi^3\right)}{\sqrt{1+w^2}}\right) \\ y = \dfrac{d}{2}\kappa\sin\left(\xi^3\right) + \dfrac{d}{2}\left(-\xi^1\sin\left(\xi^3\right) - \xi^2\dfrac{w\cos\left(\xi^3\right)}{\sqrt{1+w^2}}\right) \\ z = \dfrac{d}{2}\kappa w\xi^3 + \dfrac{d}{2}\left(\dfrac{\xi^2}{\sqrt{1+w^2}}\right) \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\kappa = 2R/d$ и $w = S/(2\pi R)$ – параметры центральной винтовой линии; S – шаг винтового канала; $d/2$ – радиус трубы-змеевика; R – радиус изгиба центральной винтовой линии трубы-змеевика.

Любая кривая традиционно характеризуется двумя параметрами: кривизной k и кручением τ [24, 25, 29]. В частности для винтовой линии имеем

$$k = \frac{R}{R^2 + \left(S\ /\ (2\pi)\right)^2}, \quad \tau = \frac{S\ /\ (2\pi)}{R^2 + \left(S\ /\ (2\pi)\right)^2}$$

Следует ожидать зависимость решения задачи от значений кривизны, кручения и числа Рейнольдса. Как показано в [25], для винтовой осевой линии решение задачи зависит от отношения $\lambda = \tau/\ k = S/(2\pi R) = w$ и числа Рейнольса. В нашем случае решение определяется двумя геометрическими симплексами κ и $\sigma = w/\sqrt{1+w^2}$. Параметр σ является функцией λ, а параметр κ отвечает за отношение радиуса изгиба центральной винтовой линии и радиуса трубы-змеевика.

Для корректности перехода от декартовой к винтовой системе координат необходимо обеспечить условие неравенства нулю соответствующего якобиана перехода

$$J = \left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\left(\kappa\left(1+w^2\right) - \xi^1\right) \neq 0$$

Отсюда следует, что взаимно однозначное соответствие между декартовыми x, y, z и винтовыми ξ^1, ξ^2, ξ^3 координатами справедливо при $\xi^1 \neq \kappa\left(1+w^2\right)$ или $\kappa\left(1+w^2\right) > 1$. Это условие выполняется всегда, поскольку $\kappa > 1$.

В [30] для решения подобной задачи использована система координат, параметры которой зависят от кривизны и кручения. Уравнения Навье–Стокса записывались в проекциях на два вектора естественного базиса и на один вектор дуального базиса, направленный перпендикулярно плоскости двух первых векторов. В результате неизвестная функция безразмерного давления присутствовала в трех уравнениях, что существенно усложняло расчеты и снижало точность их решения.

В нашем случае система координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 имеет следующие характеристики.

Ковариантные компоненты метрического тензора, отнесенные к $(d/2)^2$, имеют вид

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = 1,\ g_{33} = \left(\left(\xi^1 - \kappa\right)^2 + \sigma^2\left(\xi^2\right)^2 + w^2\kappa^2\right)$$
$$g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{13} = g_{31} = -\sigma\xi^2,\ g_{23} = g_{32} = \sigma\xi^1$$

Контравариантные компоненты метрического тензора, отнесенные к $1/(d/2)^2$

$$g^{11} = \frac{\left(\left(1+w^2\right)\kappa - \xi^1\right)^2 + w^2\left(\xi^2\right)^2}{\left(\left(1+w^2\right)\kappa - \xi^1\right)^2}, \quad g^{22} = \frac{\left(\left(1+w^2\right)\kappa - \xi^1\right)^2 + w^2\left(\xi^1\right)^2}{\left(\left(1+w^2\right)\kappa - \xi^1\right)^2}$$

$$g^{33} = \frac{\left(1 + w^2\right)}{\left(\left(1 + w^2\right)\kappa - \xi^1\right)^2}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{w^2\xi^1\xi^2}{\left(\left(1 + w^2\right)\kappa - \xi^1\right)^2}$$

$$g^{13} = g^{31} = \frac{w\sqrt{1 + w^2}\xi^2}{\left(\left(1 + w^2\right)\kappa - \xi^1\right)^2}, \quad g^{23} = g^{32} = -\frac{w\sqrt{1 + w^2}\xi^1}{\left(\left(1 + w^2\right)\kappa - \xi^1\right)^2}$$

Нормированные на $d/2$ ненулевые символы Кристоффеля первого рода

$$\Gamma_{31,2} = \Gamma_{13,2} = \sigma, \quad \Gamma_{32,1} = \Gamma_{23,1} = -\sigma, \quad \Gamma_{32,3} = \Gamma_{23,3} = \sigma^2\xi^2, \quad \Gamma_{33,2} = -\sigma^2\xi^2$$

$$\Gamma_{31,3} = \Gamma_{13,3} = \left(\xi^1 - \kappa\right), \quad \Gamma_{33,1} = -\left(\xi^1 - \kappa\right)$$

и второго рода

$$\Gamma^1_{33} = g^{11}\Gamma_{33,1} + g^{12}\Gamma_{33,2}, \; \Gamma^2_{33} = g^{21}\Gamma_{33,1} + g^{22}\Gamma_{33,2}, \; \Gamma^3_{33} = g^{31}\Gamma_{33,1} + g^{32}\Gamma_{33,2}$$

$$\Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{13} = g^{12}\Gamma_{13,2} + g^{13}\Gamma_{13,3}, \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{13} = g^{22}\Gamma_{13,2} + g^{23}\Gamma_{13,3}$$

$$\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = g^{32}\Gamma_{13,2} + g^{33}\Gamma_{13,3}, \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{23} = g^{11}\Gamma_{23,1} + g^{13}\Gamma_{23,3}$$

Видно, что в отличие от ортогональной системы координат общего вида дополнительно отличны от нуля следующие символы Кристоффеля: два первого рода $\Gamma_{31,2} = \Gamma_{13,2} = \sigma, \Gamma_{32,1} = \Gamma_{23,1} = -\sigma$ и два второго рода $\Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{13} = g^{22}\Gamma_{13,2} + g^{23}\Gamma_{13,3}$, $\Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{23} = g^{11}\Gamma_{23,1} + g^{13}\Gamma_{23,3}$.

В выбранной системе координат (1.1) в проекциях на естественные оси, система уравнений движения и неразрывности примет вид

$$\mathrm{Re}_*\left(g_{11}V^1\frac{\partial V^1}{\partial\xi^1} + g_{11}V^2\frac{\partial V^1}{\partial\xi^2} + g_{13}V^1\frac{\partial V^3}{\partial\xi^1} + g_{13}V^2\frac{\partial V^3}{\partial\xi^2} + \right.$$

$$\left. +2\left(g_{11}\Gamma^1_{13} + g_{13}\Gamma^3_{13}\right)V^1V^3 + 2g_{11}\Gamma^1_{23}V^2V^3 + \left(g_{11}\Gamma^1_{33} + g_{13}\Gamma^3_{33}\right)V^3V^3\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial\xi^1} + \left(\frac{\partial B_1{}^1}{\partial\xi^1} + \frac{\partial B_1{}^2}{\partial\xi^2} - \Gamma^1_{13}B_1{}^3 - \Gamma^2_{13}B_2{}^3 - \Gamma^3_{13}B_3{}^3 + \Gamma^3_{31}B_1{}^1\right) \tag{1.2}$$

$$\mathrm{Re}_*\left(g_{22}V^1\frac{\partial V^2}{\partial\xi^1} + g_{22}V^2\frac{\partial V^2}{\partial\xi^2} + g_{23}V^1\frac{\partial V^3}{\partial\xi^1} + g_{23}V^2\frac{\partial V^3}{\partial\xi^2} + \right.$$

$$\left. +2\left(g_{22}\Gamma^2_{13} + g_{23}\Gamma^3_{13}\right)V^1V^3 + \left(g_{22}\Gamma^2_{33} + g_{23}\Gamma^3_{33}\right)V^3V^3\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial\xi^2} + \left(\frac{\partial B_2{}^1}{\partial\xi^1} + \frac{\partial B_2{}^2}{\partial\xi^2} - \Gamma^1_{23}B_1{}^3 + \Gamma^3_{31}B_2{}^1\right) \tag{1.3}$$

$$\mathrm{Re}_*\left(g_{31}V^1\frac{\partial V^1}{\partial\xi^1} + g_{31}V^2\frac{\partial V^1}{\partial\xi^2} + g_{32}V^1\frac{\partial V^2}{\partial\xi^1} + g_{32}V^2\frac{\partial V^2}{\partial\xi^2} + g_{33}V^1\frac{\partial V^3}{\partial\xi^1} + g_{33}V^2\frac{\partial V^3}{\partial\xi^2} + \right.$$

$$\left. + 2\left(g_{31}\Gamma^1_{13} + g_{32}\Gamma^2_{13} + g_{33}\Gamma^3_{13}\right)V^1V^3 + 2g_{31}\Gamma^1_{23}V^2V^3 + \left(g_{31}\Gamma^1_{33} + g_{32}\Gamma^2_{33} + g_{33}\Gamma^3_{33}\right)V^3V^3\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial \xi^3} + \left(\frac{\partial B_3^{\ 1}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial B_3^{\ 2}}{\partial \xi^2} - \Gamma_{31}^1 B_1^{\ 1} - \Gamma_{32}^1 B_1^{\ 2} - \Gamma_{33}^1 B_1^{\ 3} - \Gamma_{31}^2 B_2^{\ 1} - \Gamma_{33}^2 B_2^{\ 3} - \Gamma_{33}^3 B_3^{\ 3} \right) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial V^1}{\partial \xi^1} + \frac{\partial V^2}{\partial \xi^2} + \Gamma_{31}^3 V^1 = 0 \tag{1.5}$$

где $\mathrm{Re}_* = V_a d\rho / (2\mu)$ – модифицированное число Рейнольдса; $p = dP / (2\mu V_a)$ – безразмерное давление; V_a – характерная скорость; ρ – плотность; μ – динамическая вязкость.

Безразмерные компоненты тензора Уайта–Метцнера $B = 2D$ имеют вид

$$B^{11} = 2g^{11}\left(\frac{\partial V^1}{\partial \xi^1}\right) + 2g^{12}\left(\frac{\partial V^1}{\partial \xi^2}\right) + 2g^{13}\Gamma_{13}^1 V^1 + 2g^{13}\Gamma_{23}^1 V^2$$

$$B^{22} = 2g^{21}\left(\frac{\partial V^2}{\partial \xi^1}\right) + 2g^{22}\left(\frac{\partial V^2}{\partial \xi^2}\right) + 2g^{23}\Gamma_{13}^2 V^1$$

$$B^{33} = 2g^{31}\left(\frac{\partial V^3}{\partial \xi^1}\right) + 2g^{32}\left(\frac{\partial V^3}{\partial \xi^2}\right) + 2g^{33}\Gamma_{13}^3 V^1$$

$$B_1^{\ 1} = g_{1k}B^{k1} = g_{11}B^{11} + g_{13}B^{31} = b^2\left(B^{11} - \sigma\xi^2 B^{31}\right)$$

$$B_1^{\ 2} = g_{1k}B^{k2} = g_{11}B^{12} + g_{13}B^{32} = b^2\left(B^{12} - \sigma\xi^2 B^{32}\right)$$

$$B_1^{\ 3} = g_{1k}B^{k3} = g_{11}B^{13} + g_{13}B^{33} = b^2\left(B^{13} - \sigma\xi^2 B^{33}\right)$$

$$B_2^{\ 1} = g_{2k}B^{k1} = g_{22}B^{21} + g_{23}B^{31} = b^2\left(B^{21} + \sigma\xi^1 B^{31}\right)$$

$$B_2^{\ 2} = g_{2k}B^{k2} = g_{22}B^{22} + g_{23}B^{32} = b^2\left(B^{22} + \sigma\xi^1 B^{32}\right)$$

$$B_2^{\ 3} = g_{2k}B^{k3} = g_{22}B^{23} + g_{23}B^{33} = b^2\left(B^{23} + \sigma\xi^1 B^{33}\right)$$

$$B_3^{\ 1} = g_{3k}B^{k1} = g_{31}B^{11} + g_{32}B^{21} + g_{33}B^{31} = b^2\left(-\sigma\xi^2 B^{11} + \sigma\xi^1 B^{21} + \phi B^{31}\right)$$

$$B_3^{\ 2} = g_{3k}B^{k2} = g_{31}B^{12} + g_{32}B^{22} + g_{33}B^{32} = b^2\left(-\sigma\xi^2 B^{12} + \sigma\xi^1 B^{22} + \phi B^{32}\right)$$

$$B_3^{\ 3} = g_{3k}B^{k3} = g_{31}B^{13} + g_{32}B^{23} + g_{33}B^{33} = b^2\left(-\sigma\xi^2 B^{13} + \sigma\xi^1 B^{23} + \phi B^{33}\right)$$

где $\phi = \left(\left(\xi^1 - \kappa\right)^2 + \sigma^2\left(\xi^2\right)^2 + w^2\kappa^2\right)$, $D = \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}\,\mathbf{V} + \mathrm{grad}\,\mathbf{V}^T\right)$ – тензор скоростей деформаций.

Геометрическая область, в которой выполняется система уравнений (1.2)–1.5), представляет собой поперечное сечение трубы-змеевика: круг единичного радиуса в плоскости переменных ξ^1, ξ^2.

К представленной системе уравнений необходимо добавить условия однозначности: задание расхода Q через поперечное сечение канала и условия прилипания жидкости на внутренней стенке канала.

Уравнения (1.2)–(1.5) записаны в проекциях на естественные оси координат, где используются контравариантные компоненты скорости, а член, содержащий $\mathrm{div}(\mu B)$, не преобразован к виду $\mu\mathrm{grad}\mathbf{V}$ или $\mu\mathrm{rotrot}\mathbf{V}$, что позволяет в дальнейшем использовать полученную систему гидродинамических уравнений для случая, когда вязкость жидкости является функцией либо температуры, либо второго инварианта тензора скоростей деформаций. Вместо тензора Уайта–Метцнера в случае изотермических течений можно использовать и тензор градиента скорости grad **V**. Для сравнения проведены расчеты в случаях, когда grad **V** используется в качестве тензора B. Погрешность вычислений компонент скорости при этом не превышала 1%.

Для исследования решений системы (1.2)–(1.5) необходимо перейти к безразмерным переменным, что позволит постулировать зависимость решения от трех комплексов: числа Рейнольдса и двух геометрических симплексов κ и w. Первый геометрический симплекс отражает зависимость решения от кривизны канала, второй – от шага винтовой линии.

В общем случае при ламинарных течениях решение задачи зависит от трех параметров: Re, κ, w.

Решение системы уравнений (1.2)–(1.5) совместно с условиями однозначности проводилось методом конечных элементов.

Поскольку основными переменными в уравнениях движения являются безразмерные контравариантные компоненты скорости V^1, V^2, V^3, переход к безразмерным ковариантным компонентам осуществлялся по формулам

$$V_1 = V^1 - \sigma\xi^2 V^3, V_2 = V^2 + \sigma\xi^1 V^3$$

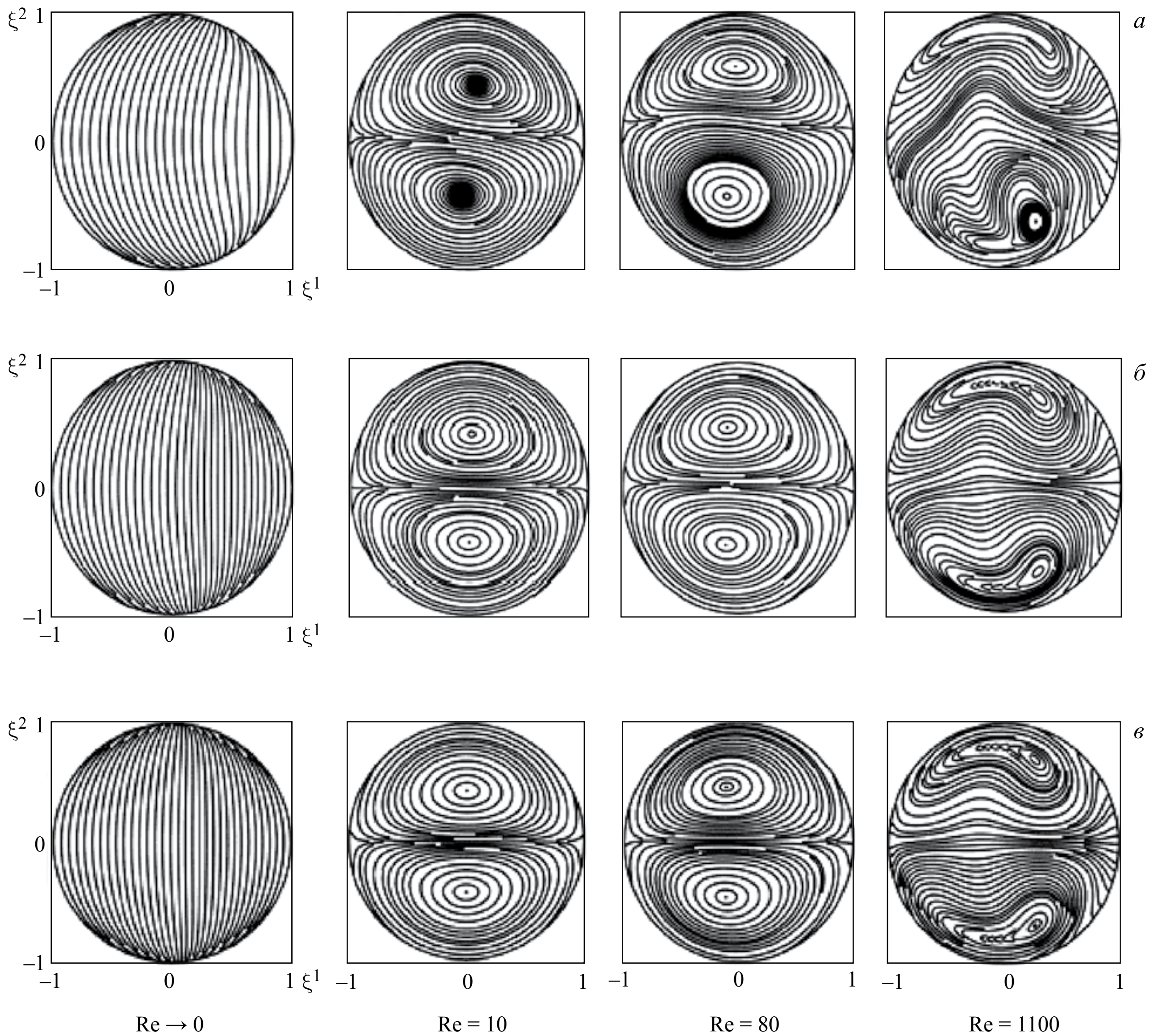
$$V_3 = -\sigma\xi^2 V^1 + \sigma\xi^1 V^2 + \left(\left(\xi^1 - \kappa\right)^2 + \sigma w \left(\xi^2\right)^2 + w^2\kappa^2\right) V^3$$

В общем случае винтовых каналов возможно использование различных компонент скорости и их проекций на различные направления осей. Для анализа полученных результатов численных расчетов удобнее разделить вектор скорости на две части: $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$, где $\mathbf{U} = \mathbf{V} - (V^3/g^{33})\mathbf{e}^3 = (V_1/g_{11})\mathbf{e}_1 + (V_2/g_{22})\mathbf{e}_2$ – вектор в плоскости, перпендикулярной центральной винтовой линии, $\mathbf{W} = (V^3/g^{33})\mathbf{e}^3$ – вектор, касательный к центральной винтовой линии **U** и перпендикулярный плоскости поперечного сечения. Здесь $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – векторы естественного базиса, определяемые как $\mathbf{e}_i = \partial\mathbf{r}/\partial\xi^i$, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор произвольной точки пространства, $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ – векторы дуального базиса. Если система векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ является ортогональной, то система координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 ортогональной не является, так как под ортогональностью системы координат понимается такая система, когда ковариантные $g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$ и контравариантные $g^{ij} = (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j)$ компоненты метрического тензора образуют диагональную матрицу.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На фиг. 1–7 представлены результаты численного исследования течений вязкой жидкости в изогнутых трубах-змеевиках. Число Рейнольдса принималось равным $\mathrm{Re} = 0, 10, 80, 1100$, относительный радиус кривизны изменялся в интервале $2 < R / d < 10$, относительный шаг змеевика – $S / d = 1.5$ – значение, наиболее часто встречающееся на практике.

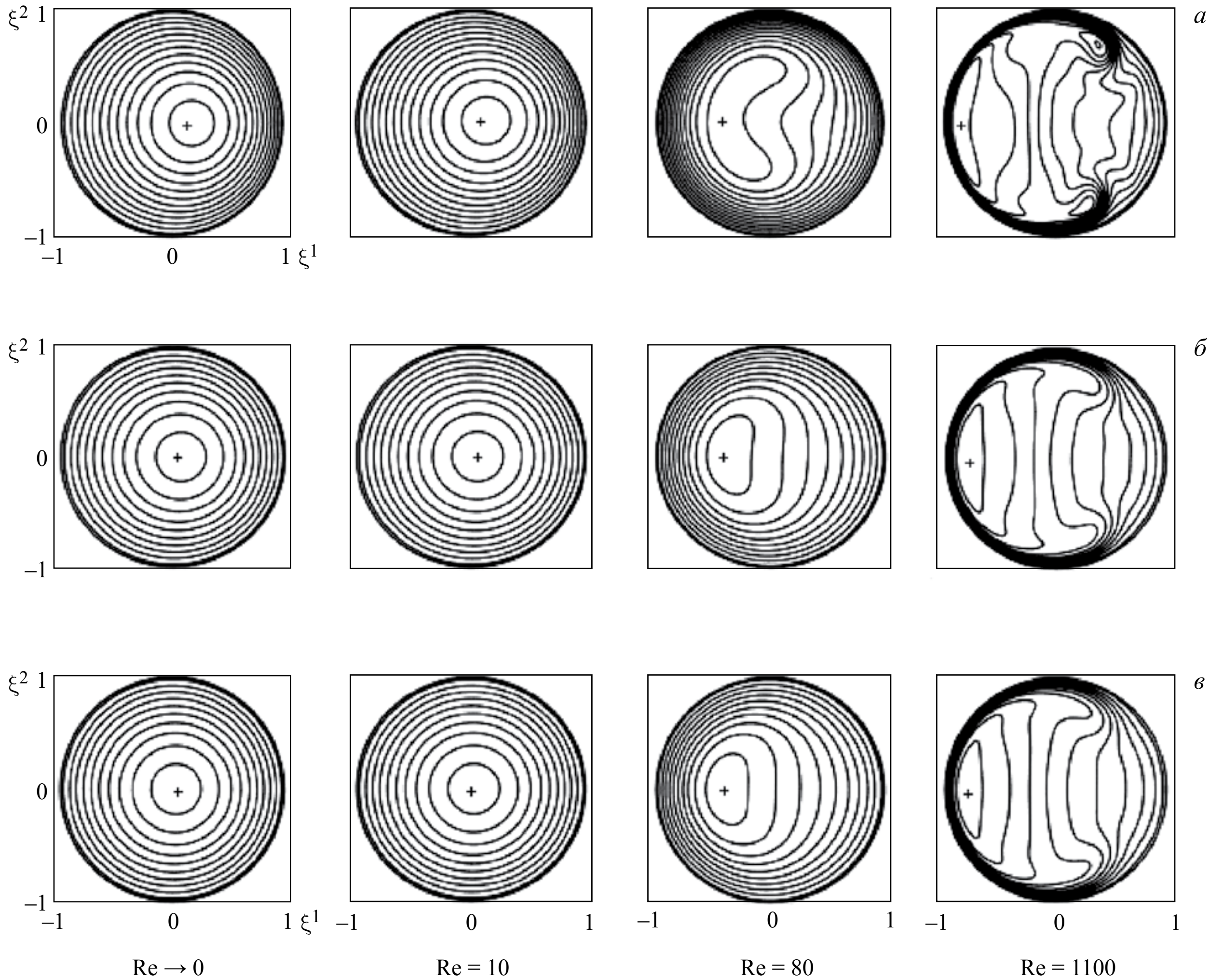
На фиг. 1 представлены линии тока поперечных потоков, т.е. линии, касательные к которым совпадают с направлением составляющей **U** вектора скорости, лежащей в поперечном сечении. Как следует из расчетов ($\mathrm{Re} \to 0$) “линии тока” поперечной составляющей скорости направлены параллельно вектору $\mathbf{e}_2$. Абсолютные величины физических компонент поперечных скоростей $V_1 / \sqrt{g_{11}}; V_2 / \sqrt{g_{22}}$ можно считать пренебрежимо малыми (приблизительно в 100 и более раз меньше третьей составляющей $V^3/\sqrt{g^{33}}$ на фиг. 7. С ростом числа Рейнольдса $(\mathrm{Re} = 10 \div 100)$ происходит перестройка поля скоростей, линии тока в верхней правой и нижней левой пристеночных областях образуют парные вихри, которые в последующем увеличиваются в размерах. Когда величина кривизны центральной винтовой линии достаточно велика $2R/d = 1$ размеры верхней вихревой области существенно меньше размеров нижней. При дальнейшим увеличении числа Рейнольдса $(\mathrm{Re} = 100 \div 1000)$ меняется характер течения жидкости в трубе-змеевике, что и отражается на характере деформаций линий тока и смещении центров вихреобразования к периферийным стенкам трубы. В змеевиках с параметрами $2R/d = 2.5$ и 5 характер течения жидкости приближается к потоку в тороидальных трубах, а вихревые области стновятся симметричными относительно горизонтальной оси ξ^1. С ростом значений параметра $R/2$ процесс формирования парных вихрей завершается при меньших значениях чисел Re, величина поперечной циркуляционной составляющей скорости становится пренебрежимо малой, а характер движения жидкости приближается



Фиг. 1. Линии тока поперечных потоков при ламинарном течении в змеевиках с относительным шагом $S/D = 1.5$ для различных значений Re: *а*–*в* – $R/d = 1$, 2.5, 5

к течению в прямой круглой трубе. Качественная картина распределения линий тока поперечной циркуляции совпадает с данными работ [24, 25, 30].

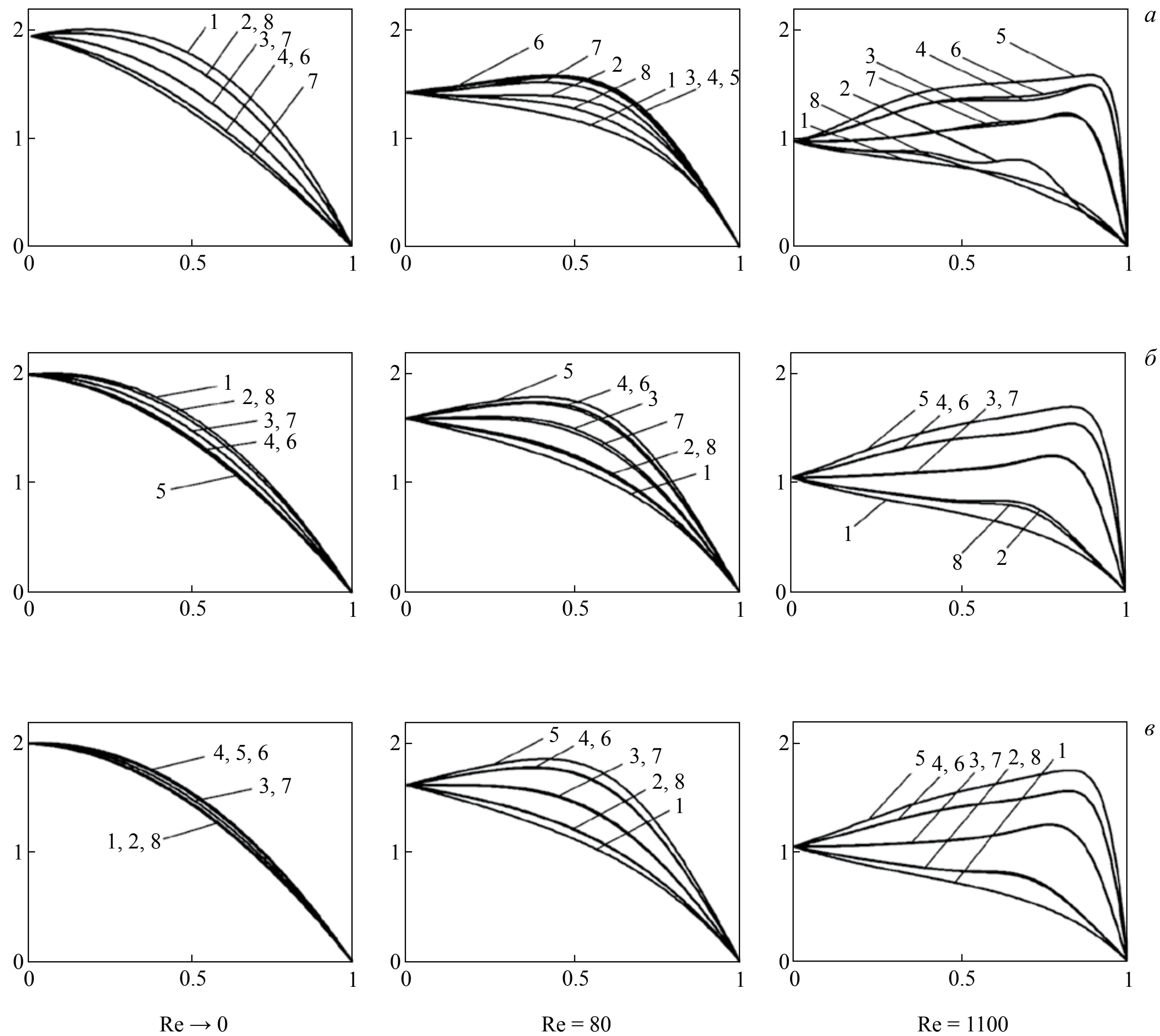
На фиг. 2 представлены линии уровня безразмерной контравариантной компоненты вектора скорости $V^3/\sqrt{g^{33}}$, принимающей только положительные значения. Эта компонента имеет единственный максимум, который при медленных течениях (в приближении Стокса при $\mathrm{Re} \to 0$) сдвинут вправо к центру кривизны винтовой линии, что особенно ярко проявляется при условии $R/d = 1$. С ростом числа $\mathrm{Re} = 10 \div 80$ и возрастанием центробежной силы этот максимум смещается влево. Одновременно с ростом Re происходит изменение картины течения жидкости в трубе, а линии уровня, ранее имевшие форму окружностей, деформируются и вытягиваются вдоль вертикальной оси. Развитие течения $(\mathrm{Re} = 80 \div 1000)$ вызывает дальнейшую деформацию линий уровня, оттеснение жидкости к левому краю поперечного сечения трубы с образованием двух добавочных локальных максимумов в верхней и нижней пристеночных областях. В трубе-змеевике при $2R/d = 1$ имеет место несимметричность распределения контравариантной составляющей $V^3/\sqrt{g^{33}}$ в результате влияния стенки канала происходит поворот линий уровня вправо по ходу часовой стрелки. С ростом $2R/d = 2.5;\ 5$ и $\mathrm{Re} \to 0$ смещения максимума становится менее заметным, а распределение линий уровня приближается к симметричному относительно горизонтальной оси.



Фиг. 2. Линии равных значений безразмерной контравариантной составляющей вектора скорости $V^3/\sqrt{g^{33}}$, направленной перпендикулярно поперечному сечению (контравариантная составляющая) с относительным шагом $S/D = 1.5$ для различных значений Re. Знаком "+" на рисунках отмечены области положительных значений представленных величин, а знаком "–" – области отрицательных значений. Остальные обозначения согласно фиг. 1

На фиг. 3 представлены профили ковариантной составляющей $V_3/\sqrt{g_{33}}$ вектора скорости в восьми радиальных сечениях $\xi^2 = 0, 0 \le \xi^1 \le 1$; $\xi^2 = \xi^1; 0 \le \xi^1 \le \sqrt{2}\,/\,2$; $\xi^1 = 0, 0 \le \xi^2 \le 1$; $\xi^2 = -\xi^1, -\sqrt{2}\,/\,2 \le \xi^1 \le 0$; $\xi^2 = 0, -1 \le \xi^1 \le 0$; $\xi^2 = \xi^1, -\sqrt{2}\,/\,2 \le \xi^1 \le 0$; $\xi^1 = 0, -1 \le \xi^2 \le 0$; $\xi^2 = -\xi^1, 0 \le \xi^1 \le \sqrt{2}/2$. Как показали расчеты, распределения контравариантной $V^3/\sqrt{g^{33}}$ и ковариантной $V_3/\sqrt{g_{33}}$ составляющих при $S/d = 1.5$ различаются не более чем на 2%, и тем больше это различие, чем меньше число Рейнольдса, что качественно совпадает с ранее полученными результатами [24, 25].

На фиг. 4 представлены линии равных значений распределения составляющей $p^*\left(\xi^1, \xi^2\right)$ безразмерного давления $p(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = C_0\xi^3 + p^*(\xi^1, \xi^2)$. В случае $\mathrm{Re} \to 0$ для всех значений R/d линии безразмерного давления горизонтально ориентированы, причем давление возрастает по направлению снизу вверх. По мере увеличения $\mathrm{Re} = 10 \div 80$ и влияния массовых сил происходит поворот линии уровня против часовой стрелки. В результате области с наиболее высоким значением безразмерного давления располагаются на наружной стороне закругления – в правой части сечения

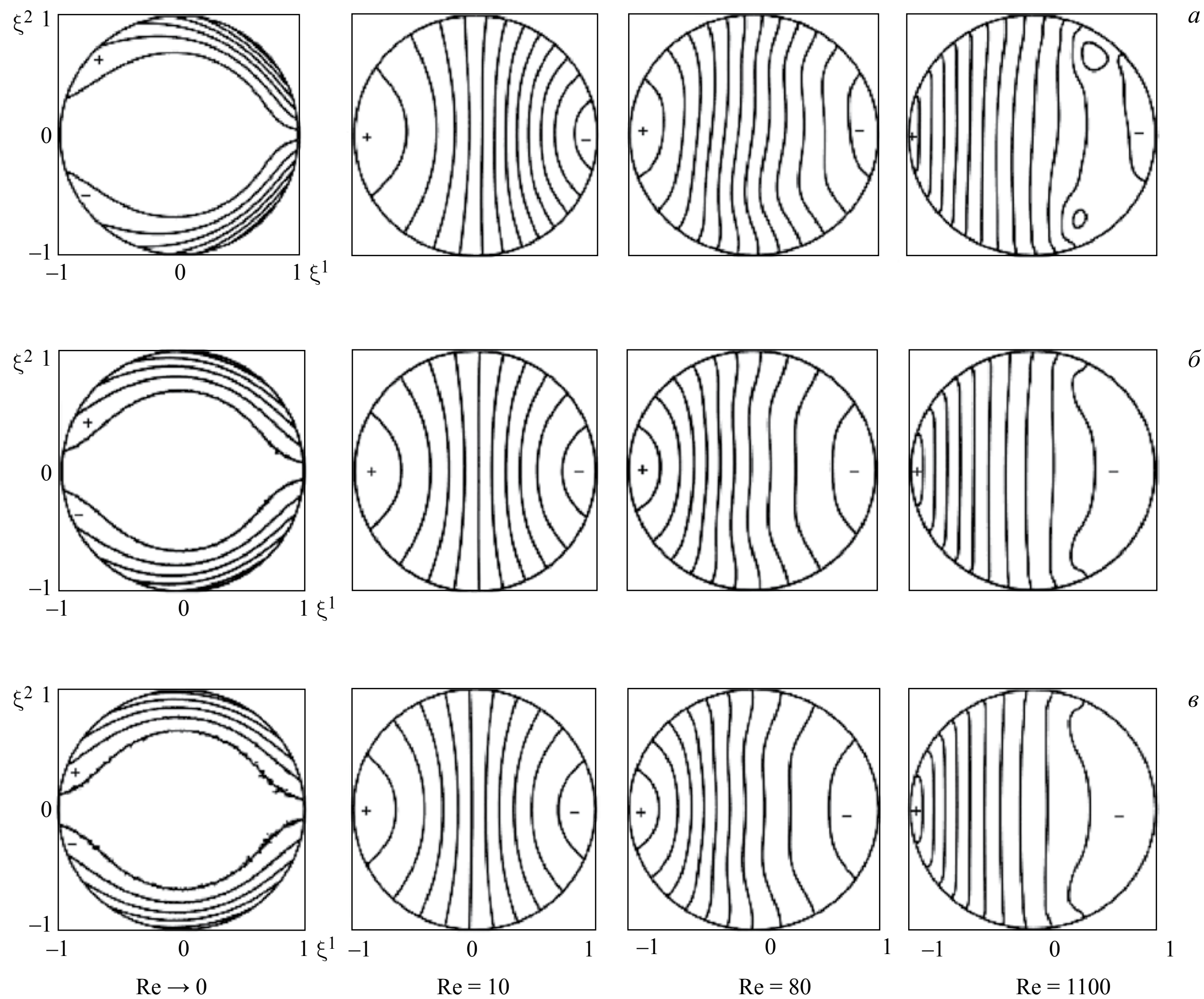


Фиг. 3. Профили ковариантной физической составляющей $V_3/\sqrt{g_{33}}$ вектора скорости для различных значений чисел Re с относительным шагом $S/D = 1.5$ вдоль прямых: 1 – $\xi^2 = 0,\ 0 \le \xi^1 \le 1$; 2 – $\xi^2 = \xi^1;\ 0 \le \xi^1 \le \sqrt{2}/2$; 3 – $\xi^1 = 0, 0 \le \xi^2 \le 1$; 4 – $\xi^2 = -\xi^1,\ -\sqrt{2}/2 \le \xi^1 \le 0$; 5 – $\xi^2 = 0, -1 \le \xi^1 \le 0$; 6 – $\xi^2 = \xi^1, -\sqrt{2}/2 \le \xi^1 \le 0$; 7 – $\xi^1 = 0,\ -1 \le \xi^2 \le 0$; 8 – $\xi^2 = -\xi^1,\ 0 \le \xi^1 \le \sqrt{2}/2$. Остальные обозначения согласно фиг. 1

трубы-змеевика. Дальнейший рост числа $\mathrm{Re} = 80 \div 1000$ вызывает в верхней и нижней областях изогнутой трубы образование локальных зон с минимумами давления.

Наиболее важным для понимания и анализа процессов теплообмена в изогнутых трубах-змеевиках является исследование и оценка величины поперечных составляющих вектора скорости – фиг. 5–7.

На фиг. 5 представлены линии уровня горизонтальной составляющей $V_1/\sqrt{g_{11}}$. Видно, что при $\mathrm{Re} \to 0$ поперечное сечение канала условно делится на четыре области с различной направленностью горизонтальной составляющей скорости. Если $\mathrm{R}/d = 1,\ 2.5$ области на внутренней стороне закругления существенно меньше по размерам и прижаты к границам сечения, при больших же значениях R/d все области примерно равны. По мере роста числа Re правая нижняя и левая верхняя области с одинаковым по знаку отрицательным значением горизонтальной

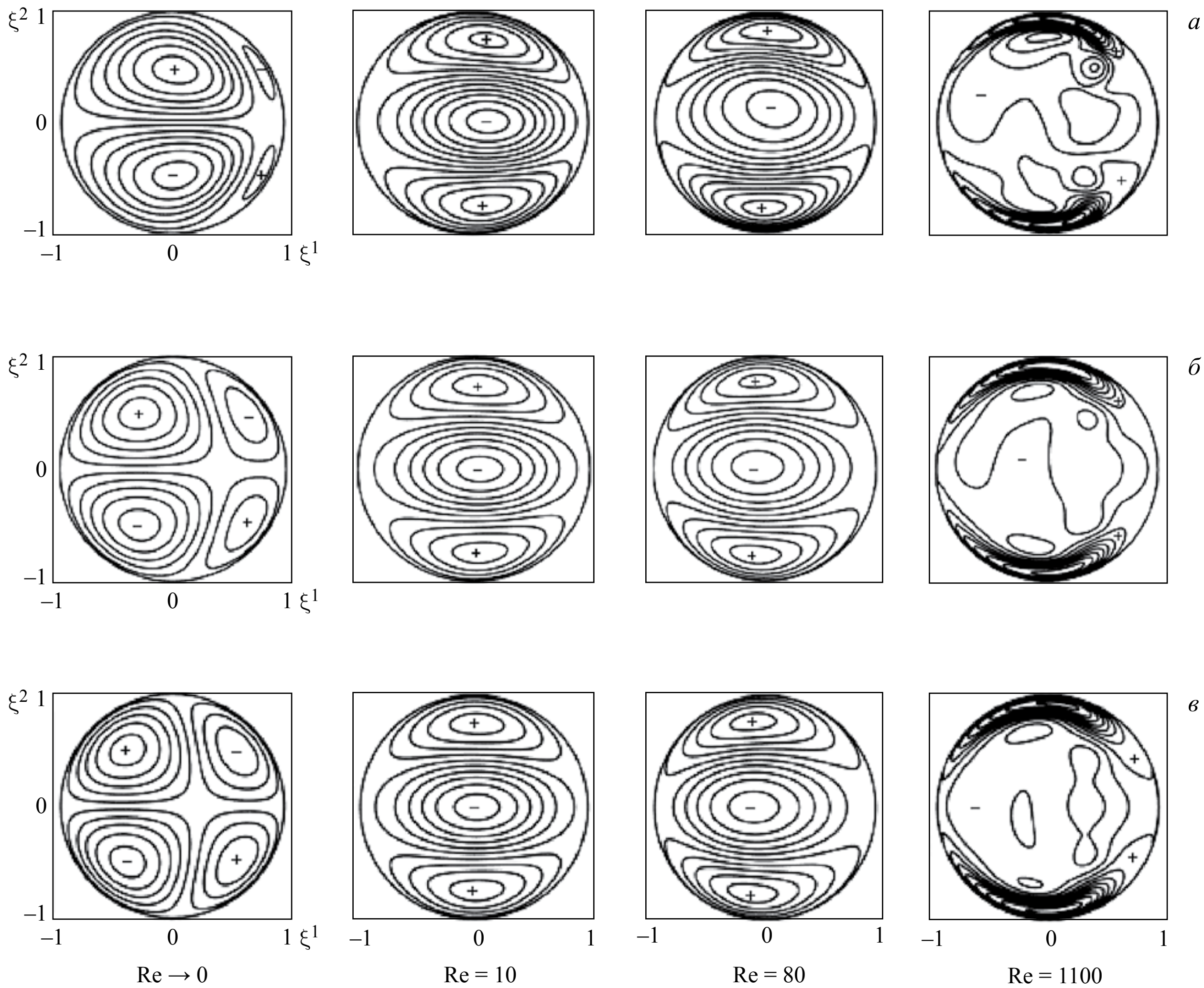


Фиг. 4. Линии равных значений безразмерного давления p в поперечном сечении с относительным шагом $S/D = 1.5$ для различных значений Re. Обозначения согласно фиг. 1 и фиг. 2

составляющей скорости объединяются в одну область. Поперечное сечение канала условно делится на три области: верхняя и нижняя с положительными значениями, а центральная область с отрицательными значениями горизонтальной составляющей скорости. Характер и интенсивность течений меняются с ростом скорости потока, и при $\mathrm{Re} = 1000$ области с положительными значениями составляющей скорости оттесняются к внешним стенкам змеевика. Область с отрицательными значениями скоростей растет, а очертание области становится размытым.

Как следует из фиг. 6, вертикальные составляющие скорости $V_2/\sqrt{g_{22}}$ $(\mathrm{Re} \to 0)$ принимают положительные значения. По мере роста интенсивности течения в верхней правой и нижней левой частях поперечного сечения трубы образуются зоны с отрицательными значениями вертикальной составляющей скорости, которые в последующем, развиваясь ($\mathrm{Re} = 10 \div 100$), становятся соизмеримыми с областями положительных значений. При дальнейшем увеличении числа Re происходит оттеснение зон с отрицательными и положительными значениями вертикальных составляющих скоростей к границам поперечного сечения канала и образование новых зон в центральной области канала.

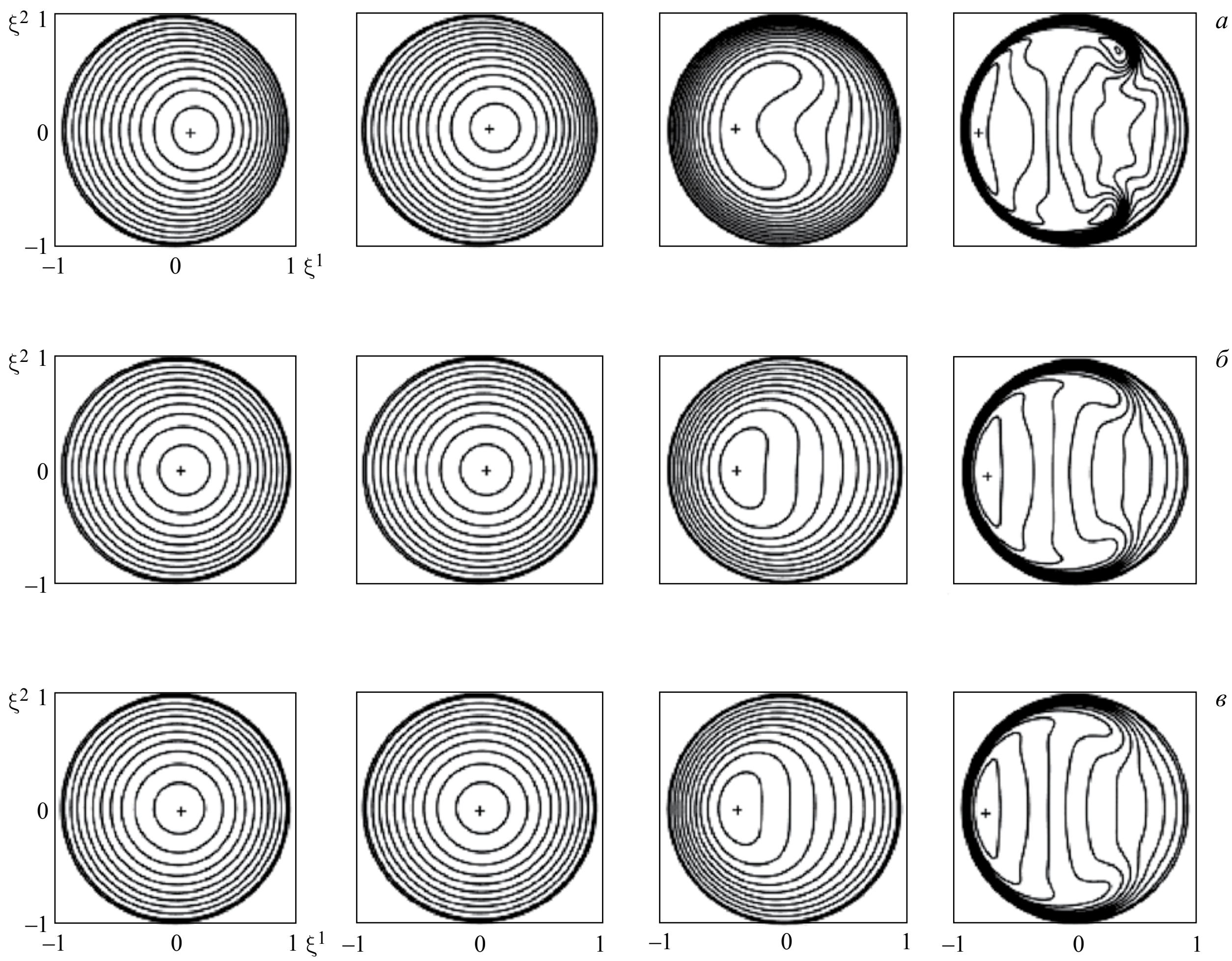
Обозначим следующую общую тенденцию: при малых значениях $2R/d$ поперечные составляющие скорости становятся соизмеримы с осевой составляющей скорости потока, направленной вдоль винтовой линии и тем больше их значение, чем выше Re (фиг. 7). При



Фиг. 5. Линии равных значений безразмерной горизонтальной $V_1/\sqrt{g_{11}}$ составляющей вектора скорости в поперечном сечении(ковариантная составляющая) с относительным шагом $S/D = 1.5$ для различных значений Re. Обозначения согласно фиг. 1 и 2

увеличении параметра $2R/d$ змеевика величины поперечных составляющих скорости становятся существенно меньше, а при отношении $2R / d > 10$ пренебрежимо малыми по сравнению с основной составляющей, направленной вдоль винтовых линий. В этом случае картина течения в змеевиках практически не отличается от течений в цилиндрических каналах соответствующего поперечного сечения. При небольших числах Re распределение составляющих вектора скорости V_1, V_2 по поперечному сечению канала симметрично. По мере увеличения чисел Re все большее влияние на гидродинамическую картину течения оказывают инерционные факторы, и распределение поперечных составляющих становится несимметричным.

Отметим, что новизна полученных результатов состоит в том, что впервые рассчитаны профили распределений компонент скорости вдоль прямых, проходящих через центр поперечного сечения. Из анализа профилей следует, что в центре поперечного сечения величины компонент скорости вторичных течений могут быть существенны и составляют до трети от среднерасходной величины скорости. В работах [32–34] не приведены оценки порядка величин скоростей вторичных течений, показываются распределение векторного поля скоростей в поперечном сечении или распределение функции тока, что является косвенным количественным представлением скоростного поля. Для устранения этих недостатков и была введена новая винтовая система координат, не имеющая особенностей в центре поперечного сечения,

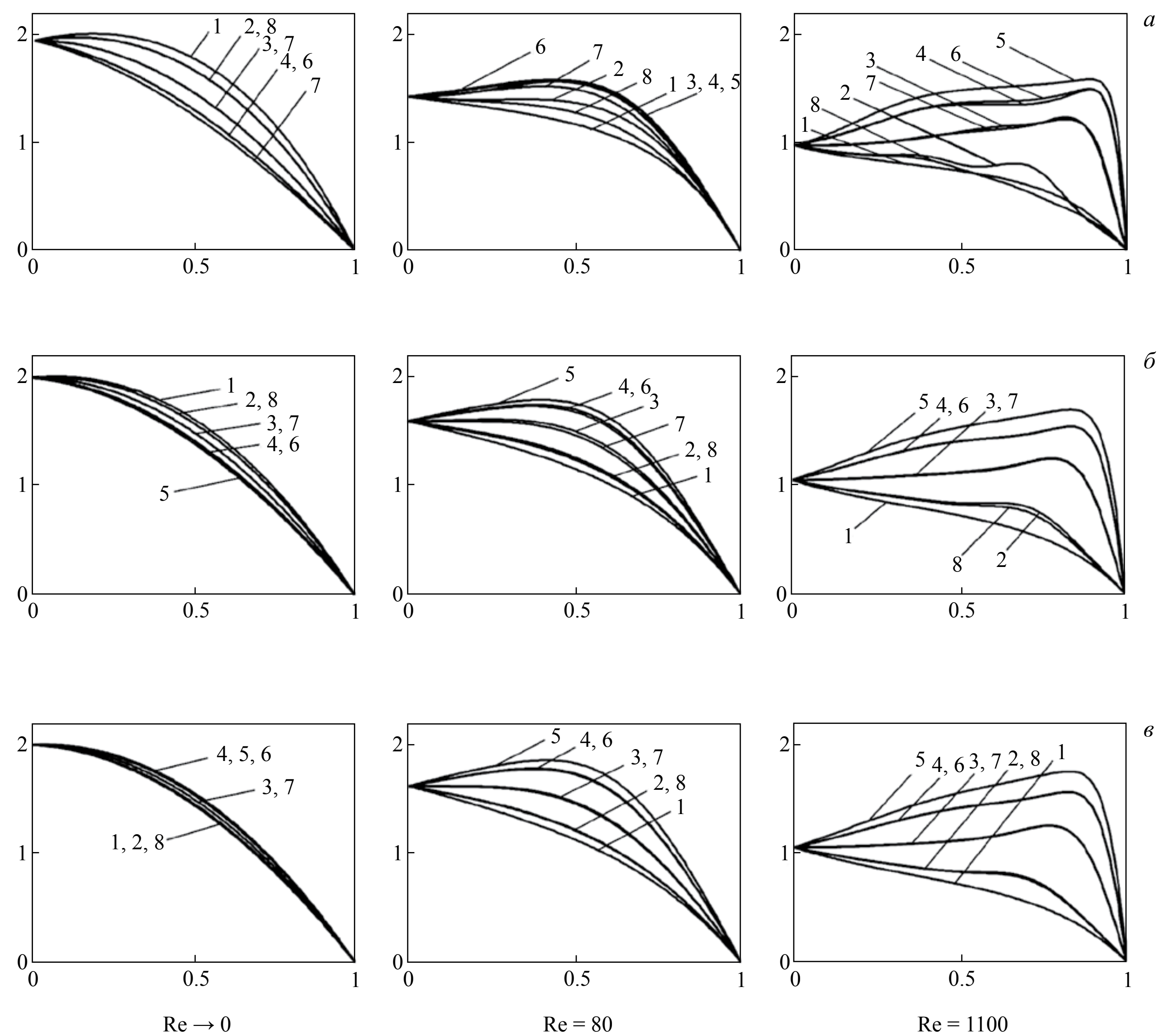


Фиг. 6. Линии равных значений безразмерной вертикальной $V_2/\sqrt{g_{22}}$ составляющей вектора скорости в поперечном сечении (ковариантная составляющая) с относительным шагом $S/D = 1.5$ для различных значений Re. Обозначения согласно фиг. 1 и 2

и позволяющая получать распределение полей скоростей и давлений и в случаях, когда эти распределения несимметричны относительно прямой, проходящей через вектор главной нормали к центральной винтовой линии. На основании произведенных расчетов можно сделать вывод, что при небольших числах Рейнольдса можно считать распределение поля вторичных потоков в поперечном сечении приблизительно симметричным и использовать для расчетов ортогональную систему координат [24, 25].

В настоящей работе использована винтовая система координат, когда в поперечном сечении канала естественные оси совпадают по направлению с векторами главной нормали и бинормали. В этом случае сдвиг по одной из переменных соответствует сдвигу по винтовой линии. Это дает возможность без перехода к каким-либо другим переменным свести решение трехмерной задачи к двухмерной, существенно упростить её численную реализацию, получить конкретные решения и достаточно точно и полно оценить особенности поля скоростей в змеевиках и для широкого класса каналов с аналогичной геометрией.

Кроме того, на основании полученных результатов открываются возможности последующих широких теоретических исследований, перспектив создания малогабаритного инновационного теплообменного оборудования [1–4] и уточненных методик их расчета.



Фиг. 7. Профили ковариантных компонент вектора скорости ($V_1/\sqrt{g_{11}}$ – пунктирная линия, $V_2/\sqrt{g_{22}}$ – штрихпунктирная линия) для различных значений чисел Re с относительным шагом $S/D = 1.5$ вдоль различных прямых. Обозначения согласно фиг. 3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численно исследована задача течения вязкой жидкости в трубах-змеевиках. Получены распределения осевой и поперечных компонент скорости в поперечном сечении змеевиков для различных значений чисел Рейнольдса и геометрических параметров змеевиков. Расширено представление о характере распределения гидродинамических полей в центральной части поперечного сечения змеевиковых каналов. Установлено, что при высоких значениях чисел Рейнольдса и произвольных значениях кривизны и кручения вторичные потоки соизмеримы по величине с осевым потоком. Показано, что поле скоростей вторичных потоков в поперечном сечении несимметрично относительно направления, определяемого вектором главной нормали к центральной винтовой линии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Золотоносов Я.Д.* Змеевиковые теплообменники и их математическое описание. // Изв. вузов. Строительство. 2015. № 7. С. 44–54.

2. *Золотоносов А.Я., Золотоносов Я.Д., Князева И.А., Багоутдинова А.Г.* Змеевиковый теплообменник: Патент РФ № 133596 // Б.И. 2013. № 29.
3. *Золотоносов А.Я., Золотоносов Я.Д., Князева И.А.* Змеевиковый теплообменный элемент: Патент РФ № 155676 // Б.И. 2015. № 29.
4. 4. *Золотоносов А.Я., Золотоносов Я.Д., Князева И.А., Багоутдинова А.Г., Вачагина Е.К.* Змеевиковый теплообменник: Патент РФ № 161177 // Б.И. 2016. № 10.
5. *Гортышев Ю.Ф.* Теплогидравлическая эффективность перспективных способов интенсификации теплоотдачи в каналах теплообменного. Казань: КГТУ, 2009. 530 с.
6. *Леонтьев А.И., Олимпиев В.В.* Теплофизика и теплотехника перспективных интенсификаторов теплообмена (обзор) // Изв. РАН. Энергетика. 2011. № 1. С. 7–35.
7. *Аронов И.З.* Теплообмен и гидравлическое сопротивление в изогнутых трубах: Дисс. ... канд. техн. наук: Киев.: КПИ, 1950. 130 с.
8. *Фастовский В.Г., Ровинский А.Е.* Исследование теплопередачи в спиральном канале // Теплоэнергетика. 1957. № 1.С. 39–41.
9. *Щукин В.К.* Обобщение опытных данных по теплоотдаче в змеевиках // Теплоэнергетика. 1969. № 2. С. 50–53.
10. *Щукин В.К.* Дополнительные условия подобия потоков в поле массовых инерционных сил // Тр. КАИ. 1963. Вып. 76. С. 26–35.
11. *Сухов Е.В.* Совершенствование конструкций и метода расчёта компактных спирально-змеевиковых узлов охлаждения компрессорных агрегатов. Дисс. ... канд. техн. наук: 05.0w4.06. Омск: Ом. гос. техн. ун-т, 2012. 196 с.
12. *Gavade Pravin P, Prof.Kulkarni P.R.* Experimental Evaluation of Helical Coil Tube in Tube Heat Exchanger // Int. J. Emerging Engineering Research Techn.. 2015. V. 3. № 2. P. 12–17.
13. *Mr. Vijay P Desai1, Dr. Sachin L Borse*. Experimental Study on Enhancement Of Thermal Performance Of Wire Wound Tube In Tube Helical Coil Heat Exchanger// IJERA. 2013. V. 3. № 4. P. 340–346.
14. *Vinodkumar, Kiran Voonna, Tharakeshwar T.* K. Improvement of Heat Transfer Coefficients in a Shell and Helical Tube Heat Exchanger Using Water/Al_2O_3 Nanofluid // IRJET. 2015. V. 2 № 3. P. 213.
15. *Ma Y., Zhou Z., Wang J., Liu Y., Liang J.* Design Optimization of Tube-in-Tube Helical Heat Exchanger Used in JT Refrigerator // Int. Cryocooler Conf. Inc. 09–12 Jun 2014. N.Y.: Syracuse University, 2014.
16. *Краснощеков Е.А., Сукомел А.С.* Задачник по теплопередаче. М.: Энергетика, 1980. 287 с.
17. *Manish N. Kuvadiya, Gopal Kumar Deshmukh, Rankit A. Patel, Ramesh H. Bhoi.* Parametric Analysis of Tube in Tube Helical Coil Heat Exchanger at Constant Wall Temperature// IJSTE2015. V.1. № 10. P. 279–285.
18. *Triloki N.M.* Modeling and CFD Analysis of Tube in Tube Helical Coil Heat Exchanger // IJSR. 2015. V. 4. № 8. P. 1536–1541.
19. *Pramod Deshmukh, Vikram D Patil, Prof. Baviskar Devakant.* CFD Analysis of heat transfer in helical coil tube heat exchanger// IJIERT. 2016. V. 3. № 1. P. 1–8.
20. *Dean W.R. Hurst J.M.* Note on the Motion of Fluid in a Curved Pipe // Phil. Mag. 1927. V. 20. № 4. P. 208–223.
21. *Dean W.R. Hurst J.M.* The Stream-line Motion of Fluid in a Curved Pipe// Phil. Mag. 1928. V. 5. № 30. P. 673–695.
22. *Cuming H.G.* The Secondary Flow in Curved Pipes // Aeronautical research council. Reports № 2880. 1952. 17 p.
23. *Mcconaloguaen D.J., Srivastava D. R.S.* Motion of a fluid in a curved tube // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1968. V. 307. P. 37–53.
24. *Germano M.* On the effect of torsion on a helical pipe flow // J. Fluid Mech. 1982. V. 125. P. 1–8.
25. *Germano M.* The Dean equations extended to a helical pipe flow// J. Fluid Mech. 1989. V. 203. P. 289–305.
26. *Hüttl T.J.* Navier Stokes solutions of laminar flows based on orthogonal helical coordinates // Numerical methods in laminar and turbulent flow. 1997. V. 10. P. 191–202.
27. *Vasudevaian M., Rajalakshmi R.* Flow in a helical pipe// J. Appl. Math. 1988. V. 19. № 1. P. 75–85.
28. *Vasudevaiah M., Patturaj R.* Effect of torsion in a helical pipe flow // Int. J. Math. and Math. Sci. 1994. V. 17. № 3. P. 553–560.

29. *Dritschel D. G.* Generalized helical Beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics // J. Fluid Mech. 1991. V. 222. P. 525–541.

30. *Lei Xue.* Study on laminar flow in helical circular pipes with Galerkin method // Comput. Fluids. 2002. V. 31. P. 113–129.

31. *Zapryanov Z., Christov Ch., Toshev E.* Fully Developed Laminar Flow and Heat Transfer in Curved Tubes // Int. J. Heat Mass Transfer. 1980. V. 23. P. 873–880.

32. *Truesdell L. C., Adler R. J.* Numerical treatment of fully developed laminar flow in helically coiled tubes // A. I. Ch.E. J. 1970. V. 16. P. 1010–1015.

33. *Patankar S. V., Pratap V. S., Spalding D. B.* Prediction of laminar flow and heat transfer in helically coiled pipes // J. Fluid Mech. 1974. V. 62. P. 539–551.

34. *Dravid A. N., Smith K. A., Merrill E. W., Brian P. L. T.* Effect of secondary fluid motion on laminar flow heat transfer in helically coiled circular pipes // A. I. Ch.E. J. 1971. V. 17. № 5. P. 1114–1122.

35. *Назмеев Ю. Г.* Гидродинамика и теплообмен закрученных потоков реологически сложных сред. М.: Энергоиздат, 1996. 368 с.