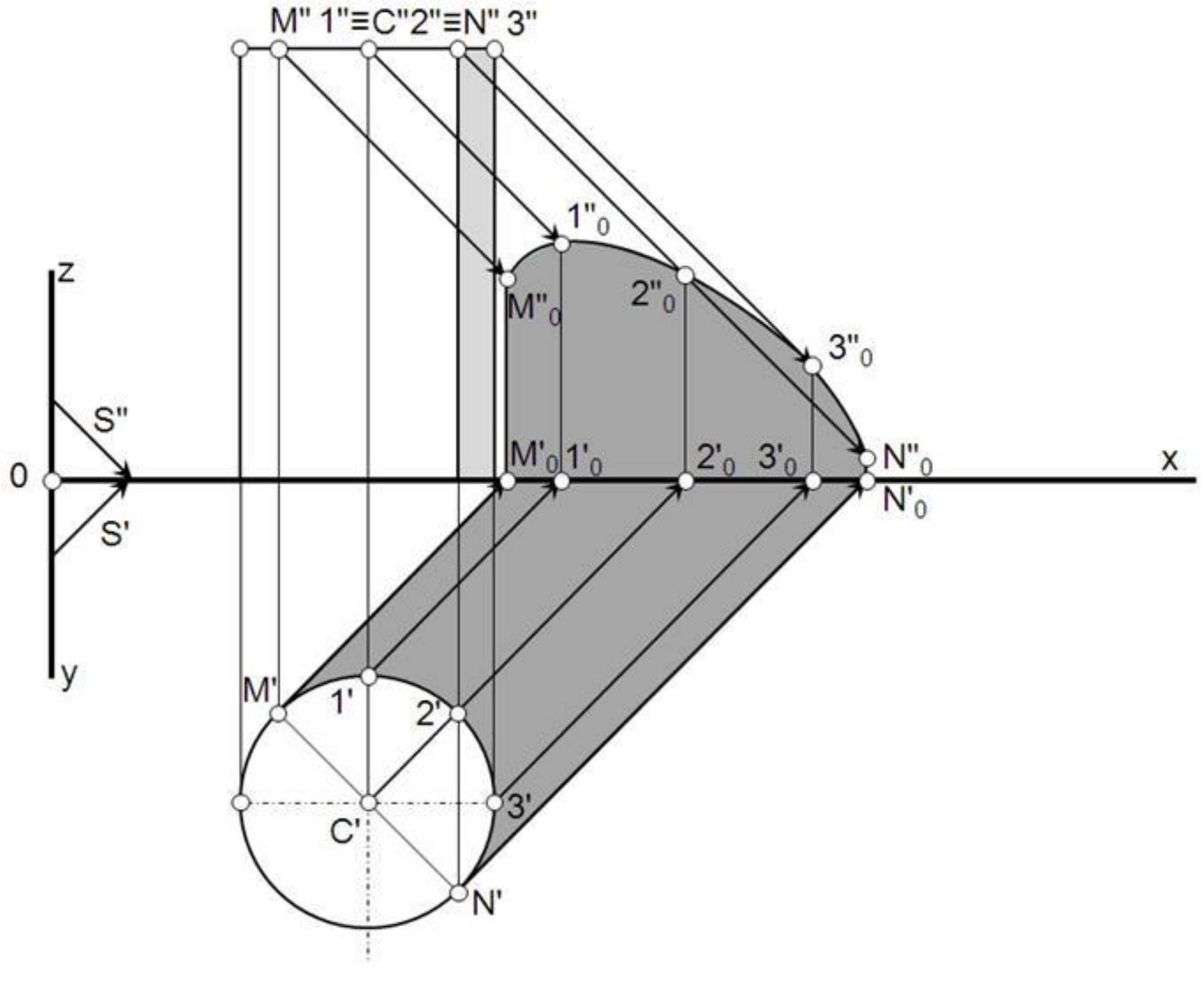
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Набережночелнинский институт

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ



Набережные Челны

2017

Начертательная геометрия. Конспект лекций по начертательной геометрии для студентов строительных специальностей: Учебно-методическое пособие к самостоятельной работе, практическим и лабораторным занятиям по начертательной геометрии /Составители: Ахметов Н.Д., Кривошеев В.А., Коробова А.Г., Валиахметова Л.Н. - Набережные Челны: Изд-во НЧИ К(П)ФУ, 2017. - 104 с.

Рецензент:
кандидат экономических наук, доцент,
заведующий кафедрой технологии строительства
и управления недвижимостью Р.С. Игтисамов

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент, профессор РАЕ,
заведующий кафедрой «Конструирование и технологии машиностроительных производств» Казанского национально-исследовательского университета им. А.Н.Туполева – КАИ Набережночелнинского филиала И.А. Савин

Печатается по решению научно-методического совета Набережночелнинского института К(П)ФУ от «___» ___________ 2017 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА

A, B, C, D, E … или 1, 2, 3, 4, 5 … – точки в пространстве;

a, b, c, d, e, … – прямые и кривые линии в пространстве;

Δ, Φ, Γ, P, Σ … – плоскости и поверхности в пространстве;

OX, OY, OZ – оси координат;

= – равенство, совпадение;

$\cap$ – пересечение ($b \cap \Sigma = A$ – прямая b пересекает плоскость Σ в точке A, аналогичная запись будет для кривой и поверхности, однако по тексту понятно, о каких фигурах идет речь);

// – параллельность (b // d – прямая b параллельна прямой d);

·/ – скрещиваемость (m ·/ n – прямые m и n скрещиваются);

$\perp$ – перпендикулярность ($e \perp \Sigma$ – прямая e перпендикулярна плоскости Σ);

$\in$ – принадлежность элемента множества данному множеству ($A \in b$ – точка A принадлежит линии b);

$\subset$ – принадлежность подмножества множеству ($n \subset \Sigma$ – линия принадлежит поверхности);

$\neq$, $\notin$, $\not\subset$, … – знаки, обозначающие отрицание указанных выше отношений;

$\rightarrow$ – отображение ($A \rightarrow A1$ – точка A отображается в точку A_1);

$\Rightarrow$ – знак логического следствия;

$П_1$– горизонтальная плоскость проекций (OXY);

$П_2$– фронтальная плоскость проекций (OXZ);

$П_3$– профильная плоскость проекций (OYZ);

h – горизонталь (прямая, параллельная плоскости $П_1$)

f – фронталь (прямая, параллельная плоскости $П_2$);

p – профильная прямая (прямая, параллельная профильной плоскости $П_3$);

A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 … или 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1 … – проекции точек на $П_1$;

A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 … или 1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2 … – проекции точек на $П_2$;

A_3, B_3, C_3, D_3, E_3 … или 1_3, 2_3, 3_3, 4_3, 5_3 … – проекции точек на $П_3$;

a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, … – проекции прямых или кривых линий на $П_1$;

a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, … – проекции прямых или кривых линий на $П_2$;

a_3, b_3, c_3, d_3, e3, … – проекции прямых или кривых линий на $П_3$;

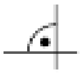
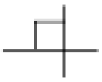
Δ_1, Φ_1, Γ_1, P_1, Σ_1 … – проекции плоскостей и поверхностей на $П_1$;

Δ_2, Φ_2, Γ_2, P_2, Σ_2 … – проекции плоскостей и поверхностей на $П_2$;

Δ_3, Φ_3, Γ_3, P_3, Σ_3 … – проекции плоскостей и поверхностей на Π_3;

Π_4, Π_5, Π_6, … – новые (дополнительные) плоскости проекций;

x_{14}, x_{25}, … – новые оси ($x_{14} = \Pi_1 \cap \Pi_4$, $x_{25} = \Pi_2 \cap \Pi_5$) или x_1, x_2, x_3, …, если принадлежность осей плоскостям проекций не вызывает сомнений;

 или  – возможные варианты графического обозначения прямого угла на чертеже.

Лекция 1

Введение. Роль, предмет и основные задачи начертательной геометрии. Метод проекций и его виды. Метод Монжа. Комплексный чертеж точки. Конкурирующие точки.

Начертательная геометрия - это наука, которая изучает способы изображения предметов на плоскости.

Первые попытки построения проекционных изображений уходят в далекое прошлое. Еще в Древнем Египте при возведении сооружений применялись планы и фасады. Использование горизонтальных и фронтальных проекций предметов (правда без проекционной связи между ними) – давно известный факт.

Накопленные знания по теории и практике изображений пространственных форм на плоскости систематизировал и обобщил французский геометрии и инженер Гаспар Монж. Он является родоначальником начертательной геометрии в современном ее понимании.

В России курс начертательной геометрии впервые стал читаться в 1810 году в Петербургском институте корпуса инженеров путей сообщения французским инженером К. И. Потье, учеником Монжа. В 1816 году Потье издал в Петербурге свой курс, переведенный на русский язык его помощником по работе Я. А. Севастьяновым, которому в 1824 году было присвоено звание первого русского профессора начертательной геометрии.

После Октябрьской социалистической революции начертательная геометрия как наука получила дальнейшее развитие. В вузах страны были организованы специальные кафедры, созданы научно-методические советы, появилась обширная литература по начертательной геометрии.

На протяжении многих лет во главе советской геометрической школы стояли профессора Н. Ф. Четверухин и И.И. Котов.

Много работал над методикой преподавания графических дисциплин профессор В. О. Гордон, по учебнику которого обучались тысячи студентов технических вузов. Серьезный вклад в развитие перспективы и теории восприятия изображений внес профессор Н. С. Кузнецов.

1.1.Роль, предмет и основные задачи начертательной геометрии

Любой предмет представляет собой совокупность точек, линий и поверхностей. Например, точки могут быть вершинами, прямые – ребрами, плоскости гранями. Необходимо научиться изображать их на плоскости.

Основные **задачи** начертательной геометрии:

- создание метода отображения объемных трехмерных фигур на плоскости;

- разработка и исследование способов решения позиционных и метрических задач, связанных с этими фигурами.

Изучение курса имеет следующие **цели**:

- умение строить изображение предметов на плоскости (начертить чертеж);

- производить графические операции над чертежами;

- развивать пространственное воображение.

Начертательная геометрия имеет теоретическую базу для составления чертежа. Чертеж является основным средством, с помощью которого изучаются свойства фигур.

Чертеж - это изображение геометрических фигур на плоскости с помощью точек, линий, геометрических знаков и цифр.

Чертеж- это точное выражение наших представлений о каком-либо предмете. Он должен быть наглядным, точным, простым в графическом исполнении и обратимым, т.е. по нему можно было бы воспроизвести форму и размеры геометрических образов.

Правила построения изображений, излагаемые в начертательной геометрии, основаны на методе проекций (от латинского projectio – бросание вперед, вдаль). Это основной метод начертательной геометрии, который был разработан Гаспаром Монжем.

1.2.Метод проекций и его виды

Центральное проецирование

Дано:

- плоскость Π_1 плоскость проекций;

- точка S– центр проекций, причем $S \notin \Pi_1$;

- точка A, находящаяся в пространстве, $A \notin \Pi_1$.

Для проецирования произвольной точки через нее и центр проекций S проводят луч [SA). Точка пересечения этого луча с плоскостью проекций Π_1 называется центральной проекцией заданной точки (рис. 1.2.1). $[SA) \cap \Pi_1 = A_1$.

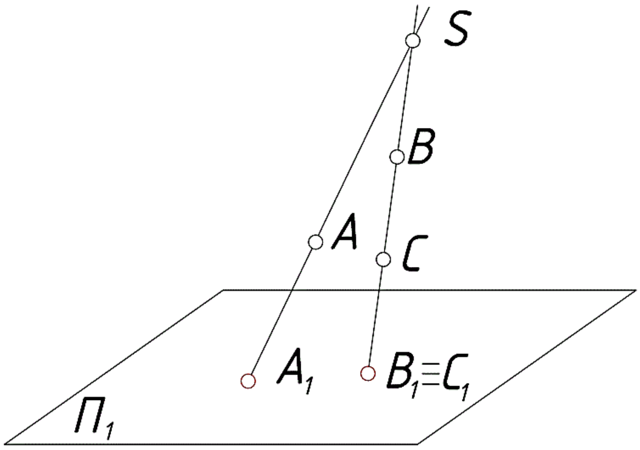


Рис. 1.2.1

Лучи, проходящие через центр проекций и проецируемые точки, называют проецирующими лучами – [SA), [SB), [SC).

Центральные проекции B_1 и C_1 двух различных точек B и C, располагающихся на одной проецирующей прямой, совпадают, $B_1 \equiv C_1$.

При заданном аппарате проецирования (плоскость проекций и центр проецирования) одна точка пространства имеет только одну центральную проекцию. Обратное утверждение не имеет смысла, т.е. одна центральная проекция не позволяет однозначно определить положение точки в пространстве, значит центральные проекции необратимы.

Изображения предметов, построенные в центральных проекциях, очень близки к действительному зрительному восприятию (так устроен человеческий глаз), но для технического черчения неудобны, так как нарушается параллельность и возникает неудобство измерений расстояний и углов, т.е. не соблюдается метрика.

Центральные проекции широко применяются в архитектуре (изображения предметов в перспективе), аэрофотогеодезии.

Параллельное проецирование

Параллельное проецирования является частным случаем центрального, у которого центр проекций S находится в несобственной точке S_∞.

Несобственными называются элементы, бесконечно удаленные в пространстве.

При параллельном проецировании проецирующие лучи параллельны между собой и проведены в заданном направлении относительно плоскости проекций.

Для того, чтобы получить параллельную проекцию точки на плоскости проекций, через нее проводят проецирующий луч, параллельный заданному направлению S_∞ и находят точку его пересечения с плоскостью проекций (рис. 1.2.2), $[AA_1) \parallel S_\infty$, $[AA_1) \cap П_1 = A_1$. Проекция точки называется параллельной. Параллельные проекции так же не обеспечивают обратимости чертежа. Их применяют для построения, например, аксонометрических проекций. Аксонометрические изображения получают параллельным проецированием предмета вместе с осями прямоугольных координат, к которым он отнесен. Они являются достаточно наглядным изображением предмета с наименьшим искажением размеров по сравнению с центральными.

В геодезии и топографии применяются проекции с числовыми отметками, которые представляют собой параллельные ортогональные проекции на одну плоскость, при этом проекция каждой точки снабжается числом, характеризующим удаление точек предмета от плоскости проекций.

Основные свойства параллельного проецирования.

1. Проекция точки – точка.
2. Проекция прямой на плоскость есть прямая. В частном случае, если направление прямой совпадает с направлением проецирования, проекция прямой – точка.
3. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции прямой.
4. Проекции взаимно параллельных прямых параллельны, а длины их находятся в том же соотношении, что и длины самих отрезков.
5. Отношения отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых равны отношению проекций этих отрезков.
6. Любая фигура, расположенная в плоскости, параллельной плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

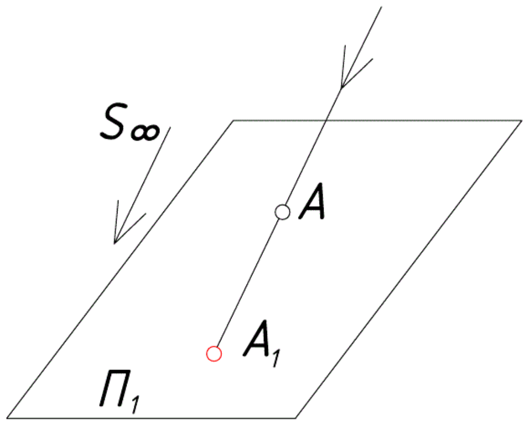


Рис. 1.2.2

Ортогональное проецирование

Частный случай параллельного проецирования, при котором направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, называется прямоугольным или ортогональным проецированием.

Для того, чтобы получить ортогональную проекцию точки на плоскости проекций, через нее проводят проецирующий луч, параллельный заданному направлению S∞ или перпендикулярный плоскости проекций Π_1 и находят точку его пересечения с плоскостью проекций (рис. 1.2.3). $[AA_1)$ // $S\infty$; $[AA_1) \perp \Pi_1$. Проекция точки называется ортогональной.

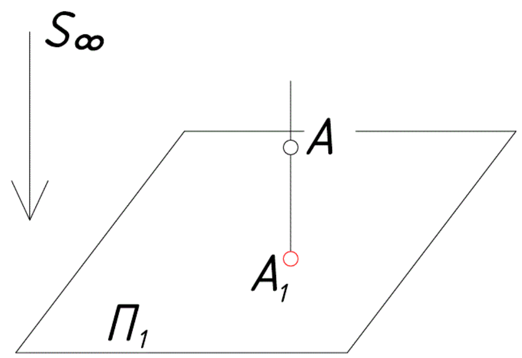


Рис. 1.2.3

Ортогональные проекции так же не обеспечивают обратимости чертежа.

Ортогональному проецированию присущи все свойства параллельного проецирования, но для ортогонального добавляются следующие.

1. Проекция отрезка не может быть больше самого отрезка.
2. Теорема о прямом угле (свойство прямого угла).

Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а вторая ей не перпендикулярна, то прямой угол проецируется на эту плоскость без искажения.

Кроме вышеперечисленных видов проекционных изображений существуют специальные виды проекций, появление которых связано со специфическими требованиями.

К ним относятся стереографические (в картографии), векторные или федоровские (в горном деле и кристаллографии), а также циклографические проекции, которые применяются в этих же областях.

1.3. Метод Монжа. Комплексный чертеж точки

Способ построения обратимого чертежа на основе ортогонального проецирования был предложен Гаспаром Монжем.

Для того, чтобы чертеж был обратим, для создания чертежа пользуются не одой плоскостью проекций, а тремя, которые взаимно перпендикулярны между собой.

Одна из плоскостей располагается горизонтально, обозначается Π_1 и называется горизонтальной плоскостью проекций, вторая располагается вертикально, обозначается Π_2 и называется фронтальной плоскостью проекций, третья тоже располагается вертикально, обозначатся $П_3$ и называется профильной плоскостью проекций. Плоскости пересекаются по линиям OX, OY и OZ которые называется осями координат (ос абсцисс, с ординат ось аппликат), точка O – начало координат (рис. 1.3.1) Три плоскости проекций делят пространство на восемь трехгранных углов, которые называются октантами. Нумерация их дана на рис. 1.3.1. Показанные на этом рисунке координатные оси OX, OY и OZ имеют положительные направления. Ось OX направлена от начала координат влево, OY – вперед к наблюдателю, OZ – вверх. Обратные направления координатных осей считают отрицательными.

Направление проецирования перпендикулярно соответствующей плоскости проекций.

Спроецируем точку *A* произвольно расположенную в пространстве на плоскости $П_1$, $П_2$ и $П_3$ и получим проекции A_1 – горизонтальную, A_2 – фронтальную, A_3 – профильную.

Отрезок $A_1A_x=AA_2$ равен расстоянию от точки до плоскости $П_2$, иначе это расстояние обозначается буквой f (координата по оси Y - ордината) и называется глубиной точки, отрезок $A_2A_x=AA_1$ равен расстоянию от точки до плоскости $П_2$, иначе это расстояние называется высотой точки и обозначается буквой h (координата по оси Z - аппликата), отрезок $A_1A_y=AA_3$ равен расстоянию от точки до плоскости $П_3$, иначе это расстояние обозначается буквой p (координата по оси X - абсцисса) и называется широтой точки.

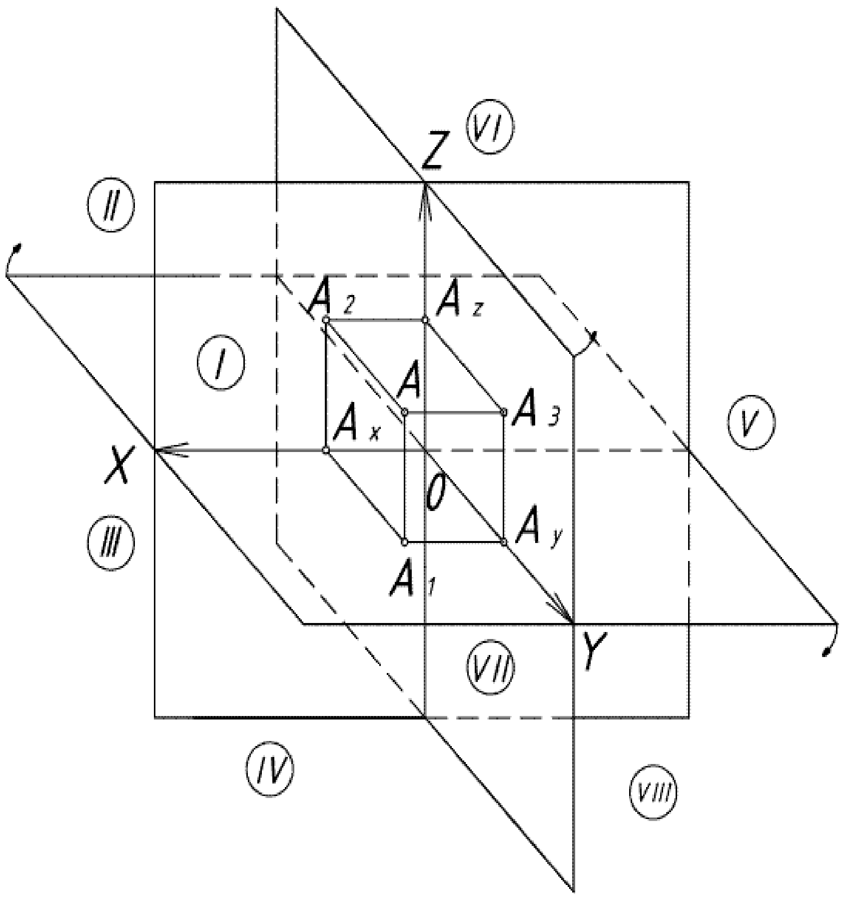


Рис. 1.3.1

Если заданы проекции точки A_1, A_2, A_3, то по ним можно найти единственную точку A, находящуюся в пространстве. Так три проекции вполне определяют положение геометрической фигуры в пространстве.

В пространственной модели координатных плоскостей производить построения неудобно, поэтому пользуются плоским чертежом. Для того, чтобы его получить совмещают плоскость $П_1$ с плоскостью $П_2$, вращая $П_1$ вокруг оси OX, а профильная плоскость совмещается с фронтальным вращением против часовой стрелки вокруг оси Z (смотрим сверху). В результате получаем трехкартинный комплексный чертеж точки, состоящий из трех проекций A_1, A_2 и A_3, которые лежат на прямых, называемых линиями связи. Иначе такой чертеж называют эпюром (от фр. epure) или эпюром Монжа (рис.1.3.2).

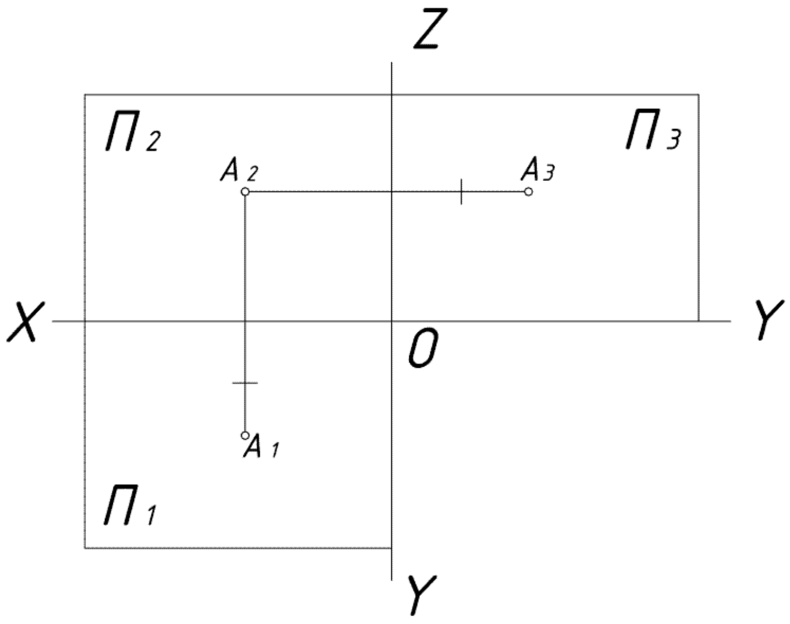


Рис. 1.3.2

Несмотря на то, что точки могут располагаться в разных октантах, для простоты построения чертежей обычно пользуются только первым октантом.

Для того, чтобы построить профильную проекцию точки необходимо:

1) провести от фронтальной проекции точки A_2 линию связи перпендикулярно оси Z;
2) замерить глубину точки (координату по оси Y);
3) отложить замеренное расстояние по проведенной ранее лини связи от оси Z.

Трехкартинный комплексный чертеж точки, расположенной в 1 октанте показан на рисунке 1.3.2.

Три координаты точки в совокупности определяют положение точки в пространстве – A (X, Y, Z) – определитель точки.

В основном для описания положения геометрической фигуры достаточно использование двух плоскостей проекций $П_1$ и $П_2$ или $П_2$ и $П_3$. Такой комплексный чертеж называется двухкартинным (рис. 1.3.3).

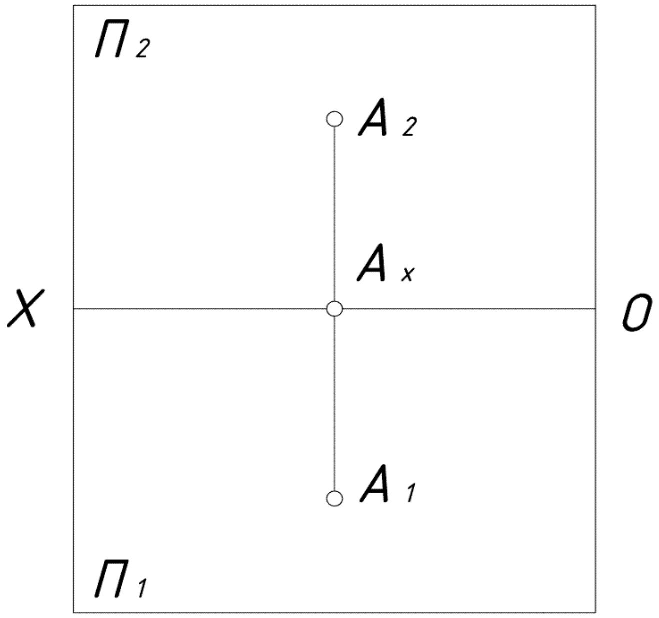


Рис. 1.3.3

1.4. Конкурирующие точки

Точки, лежащие на одном перпендикуляре к плоскости, называются конкурирующими. На рис.1.4.1 это точки *K* и *M*, лежащие на одной горизонтально-проецирующей прямой. Эти точки используются для определения видимости геометрических фигур относительно друг друга.

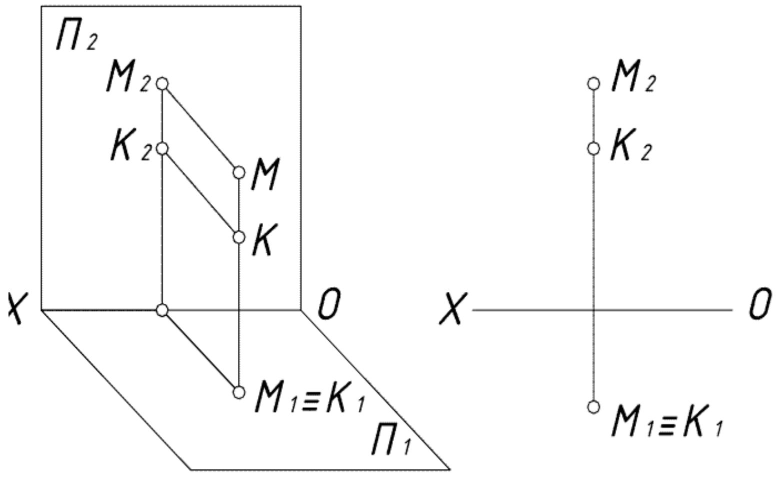


Рис. 1.4.1

Из двух горизонтально-конкурирующих точек на горизонтальной проекции видима та, которая расположена выше – точка *M*.

Из двух фронтально-конкурирующих точек на фронтальной плоскости проекций будет видна та, которая расположена ближе к наблюдателю, который смотрит на фронтальную плоскость проекций спереди.

Из двух профильно-конкурирующих точек на профильной плоскости проекций будет видна та, которая расположена ближе к наблюдателю, смотрящему на профильную плоскость проекций слева.

На практике, при изображении предметов существенно только само изображение, а не положение предмета относительно плоскостей проекций. В этих случаях изображение координатных осей необязательно. Такие чертежи называют **безосными.**

Но полный отказ от осей проекций нецелесообразен, поскольку для решения многих технических задач и задач начертательной геометрии необходимо развивать умение ориентировать предметы относительно системы координат.

Лекция 2

Ортогональные проекции прямой линии. Прямые общего и частного положения. Следы прямой. Взаимное расположение прямых. Понятие линии. Кривые линии. Классификация линий. Виды кривых. Цилиндрическая винтовая линия.

2.1. Ортогональные проекции прямой линии

Для того, чтобы спроецировать прямую линию на плоскость проекций достаточно построить проекции двух точек этой прямой.

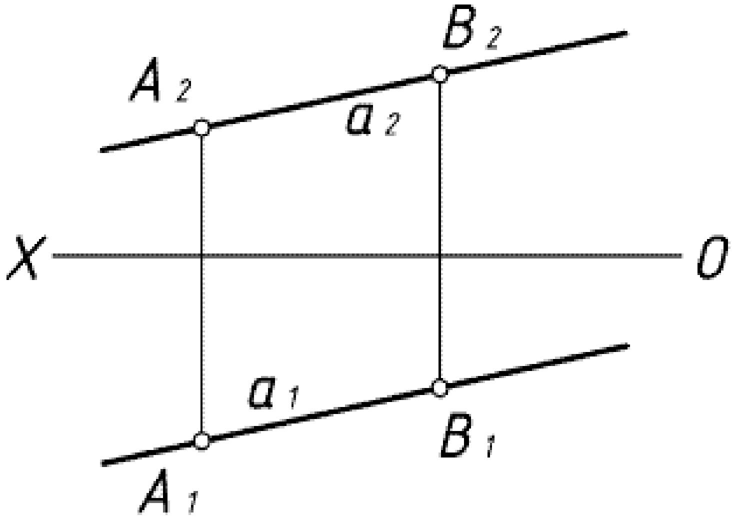


Рис. 2.1.1.

Если точка принадлежит прямой, то проекции точки принадлежат проекциям прямой (рис.2.1.2). Если же хотя бы одна проекция точки не принадлежит соответствующей проекции прямой, то данная точка не принадлежит прямой. На рисунке 2.1.2 точка M не принадлежит отрезку AB, т.к. ее фронтальная проекция M_2 не принадлежит фронтальной проекции отрезка A_2B_2.

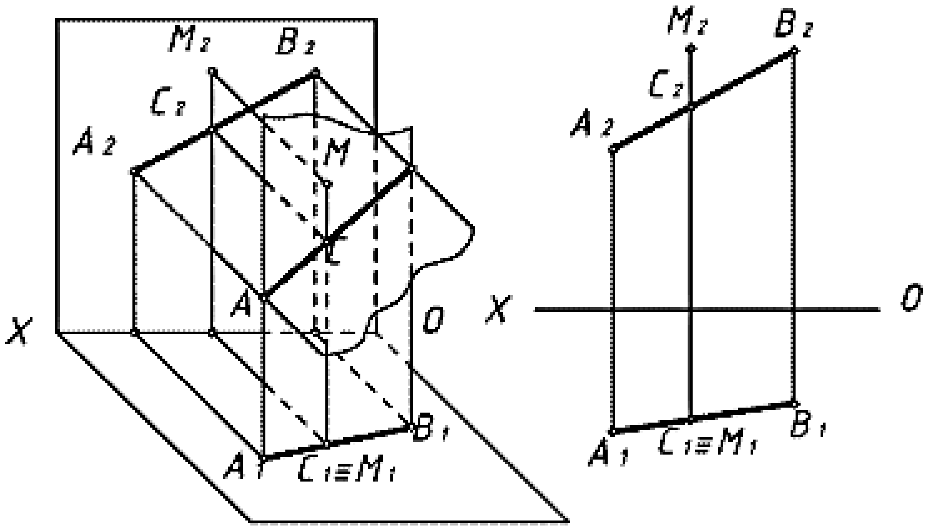


Рис. 2.1.2

2.2. Прямые общего и частного положения

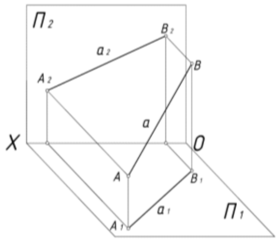
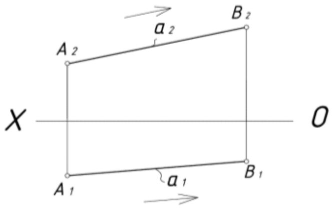
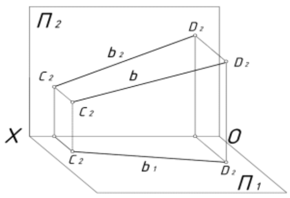
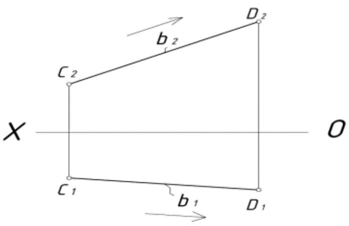
В зависимости от положения прямых по отношению к плоскостям проекций сами прямые делятся на прямые общего и частного положения.

Прямые общего положения

Прямые, располагающиеся в пространстве произвольно по отношению к плоскостям проекций, называются прямыми общего положения. Прямые общего положения подразделяются на восходящие, которые по мере удаления от наблюдателя направлены вверх, и нисходящие, которые по мере удаления от наблюдателя направлены вниз.

Проекции восходящей прямой на чертеже направлены в одну сторону (ориентированы одинаково). Проекции нисходящей прямой на чертеже направлены в разные стороны (ориентированы по-разному) (таблица 2.1).

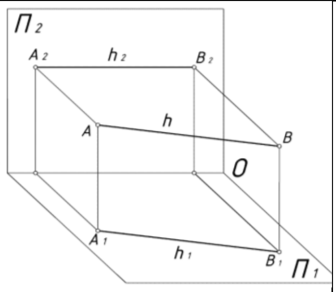
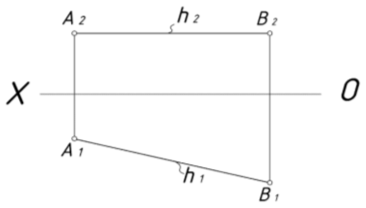
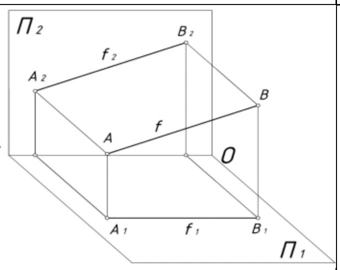
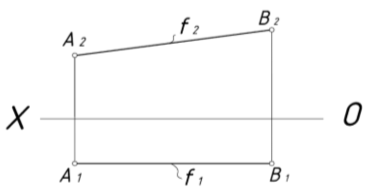
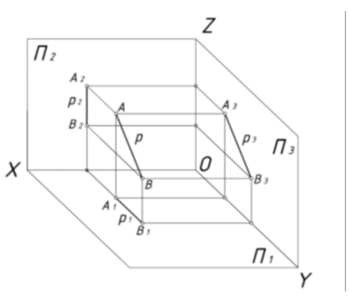
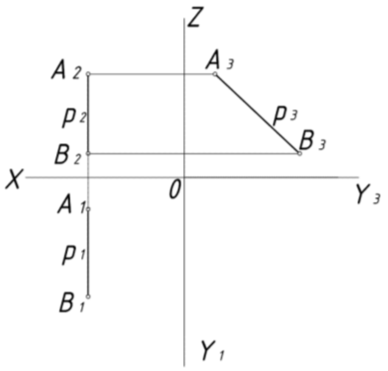
Таблица 2.1

Положение прямой в пространстве	Наглядное изображение	Эпюр	Характерные признаки на чертеже
a – прямая общего положения восходящая			*A₁B₁* - произвольно, направлена вверх; *A₂B₂* – произвольно, направлена вверх.
b – прямая общего положения нисходящая			*C₁D₁* - произвольно, направлена вниз; *C₂D₂* – произвольно, направлена вверх.

Прямые частного положения

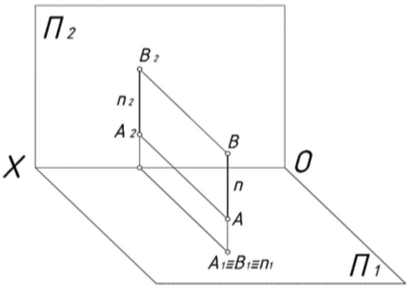
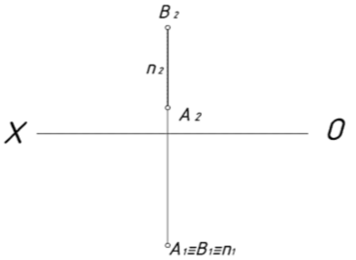
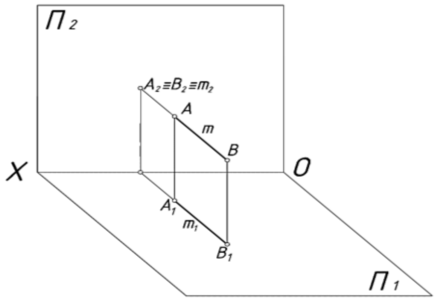
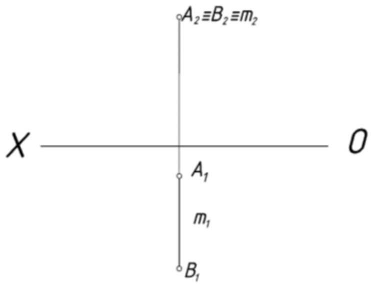
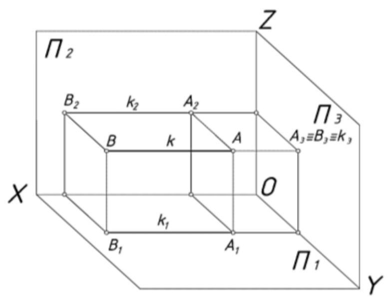
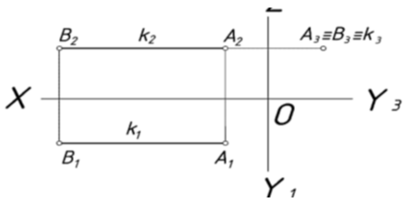
Прямые, занимающие определенное положение в пространстве по отношению к плоскостям проекций, называются прямыми частного положения. Они делятся на прямые параллельные одной из плоскости проекций – **линии уровня** и перпендикулярные одной из плоскостей проекций – **проецирующие**. В таблицах 2.2 и 2.3 даны названия, наглядные изображения и характерные признаки проекций прямых частного положения.

Таблица 2.2

Положение прямой в пространстве	Наглядное изображение	Эпюр	Характерные признаки на чертеже
1	2	3	4
h// $П_1$– горизонтальная прямая уровня (горизонталь)			**h_2 // OX;** A_1B_1 //AB; h_1= AB – натуральная величина
f// $П_2$– фронтальная прямая уровня (фронталь)			**f_1 // OX;** A_2B_2 //AB; f_2 = AB - натуральная величина
p // $П_3$ – профильная линия уровня			**p_1 ⊥ OX;** **p_2 ⊥ OX;** p_3 = AB - натуральная величина

Проецирующие прямые

Таблица 2.3

1	2	3	4
$n \perp П_1$– горизонтально-проецирующая прямая			$\boldsymbol{n_2 \perp}$ **OX**; $A_1 \equiv B_1 \equiv n_1$; $n_2 = AB$
$m \perp П_2$ – фронтально-проецирующая прямая			$\boldsymbol{m_1}$ $\perp$ **OX**; $A_2 \equiv B_2 \equiv m_2$; $m_1 = AB$
k⊥ $П_3$ – профильно-проецирующая прямая			$\mathbf{k_1}$// **OX**; $\mathbf{k_2}$// **OX**; $A_3 \equiv B_3 \equiv k_3$; $k_1 = k_2 = AB$

2.3. Следы прямой

Следом прямой называется точка ее пересечения с плоскостью проекций (рис. 2.3.1).

Различают:

- горизонтальный след прямой – точка пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций;

- фронтальный след прямой – точка пересечения прямой с фронтальной плоскостью проекций;

- профильный след прямой – точка пересечения прямой с профильной плоскостью проекций.

Прямые уровня имеют два следа, проецирующие прямые всего один.

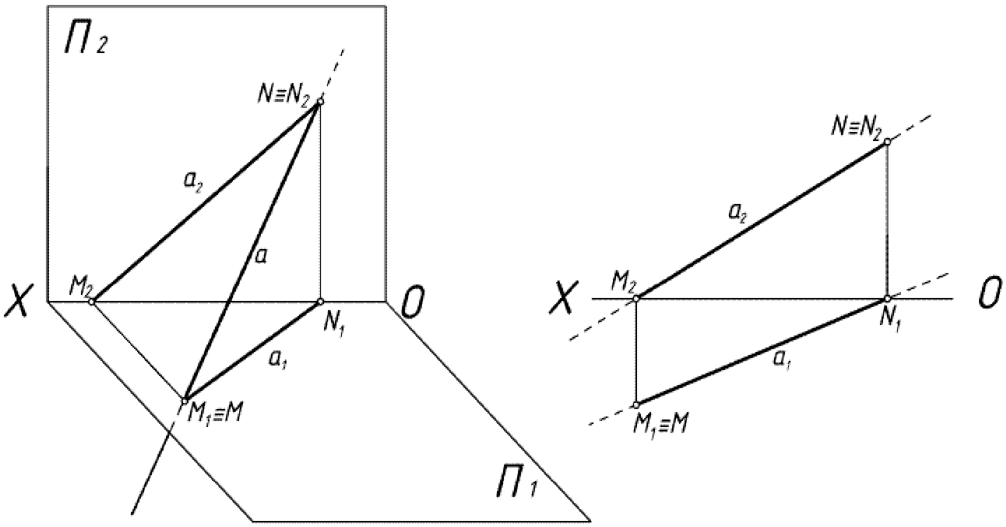


Рис. 2.3.1

Для того, чтобы найти горизонтальный след прямой, необходимо:

1) продлить фронтальную проекцию прямой до пересечения с осью ОХ.
   $a_2 \cap OX = M_2$;
2) провести перпендикуляр к оси ОХ до пересечения с горизонтальной проекцией.
   M_2M перпендикулярен ОХ; $M_2M \cap a_1 = M_1$.

M_1 и M_2 – проекции горизонтального следа, при этом сам след совпадает со своей горизонтальной проекцией.

Чтобы найти фронтальный след прямой, необходимо:

1) продлить горизонтальную проекцию прямой до пересечения с осью ОХ.
   $$a_1 \cap OX = N_1;$$
2) провести перпендикуляр к оси ОХ до пересечения с фронтальной проекцией прямой
   N_1N перпендикулярен ОХ; $N_1N \cap a_2 = N_2$.

N_1 и N_2 – проекции фронтального следа, при этом сам след совпадает со своей фронтальной проекцией.

2.4. Взаимное расположение прямых

Две прямые могут пересекаться друг с другом, быть взаимно параллельными или скрещиваться.

Параллельные прямые

Одноименные проекции параллельных прямых параллельны (рис. 2.4.1). Параллельные прямые пересекаются в несобственной точке и лежат в одной плоскости.

Частный случай: прямые лежат в горизонтально-проецирующей плоскости (т.е. в плоскости перпендикулярной $П_1$ (рис. 2.4.2).

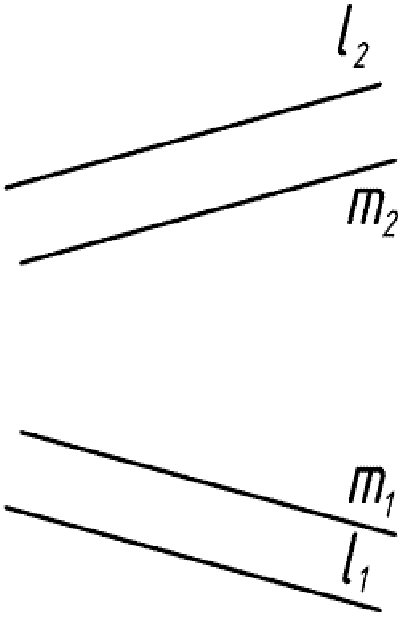


Рис. 2.4.1

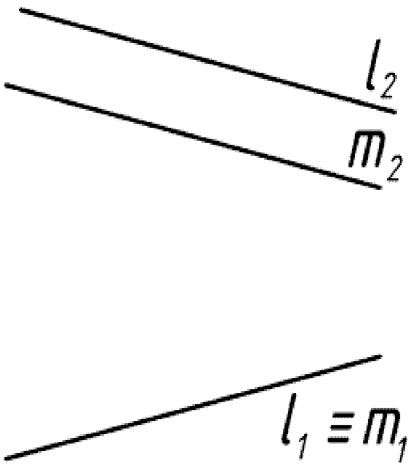


Рис. 2.4.2

Пересекающиеся прямые

Пересекающиеся прямые имеют одну общую точку и лежат в одной плоскости.

Проекции точек пересечения K_1 и K_2 лежат на одной линии связи, которая перпендикулярна оси ОХ, т.к. K_1 и K_2 являются проекциями одной и той же точки K, общей для обеих прямых (рис. 2.4.3). В частном случае проекции двух пересекающихся прямых могут совпадать на одной из плоскостей проекций. Это значит, что плоскость, которую эти прямые задают, перпендикулярна соответствующей плоскости проекций (рис. 2.4.4).

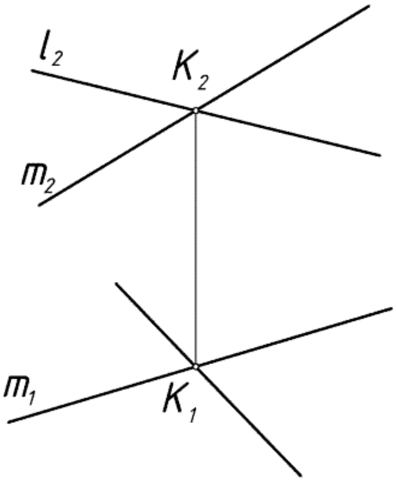


Рис. 2.4.3

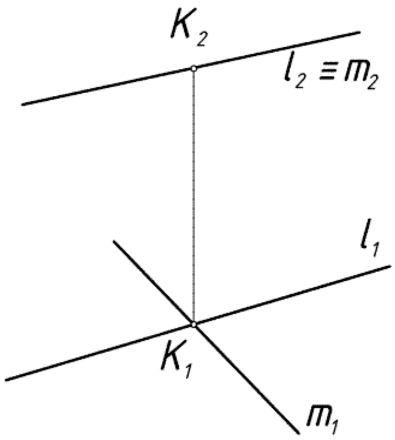


Рис. 2.4.4

Скрещивающиеся прямые

Скрещивающиеся прямые не пересекаются и не параллельны. Если на комплексном чертеже нет ни одного признака параллельности или пересечения, то мы имеем дело с эпюром скрещивающихся прямых. Проекции скрещивающихся прямых могут пересекаться, но проекции точки пересечения не лежат на одной линии связи (рис. 2.4.5).

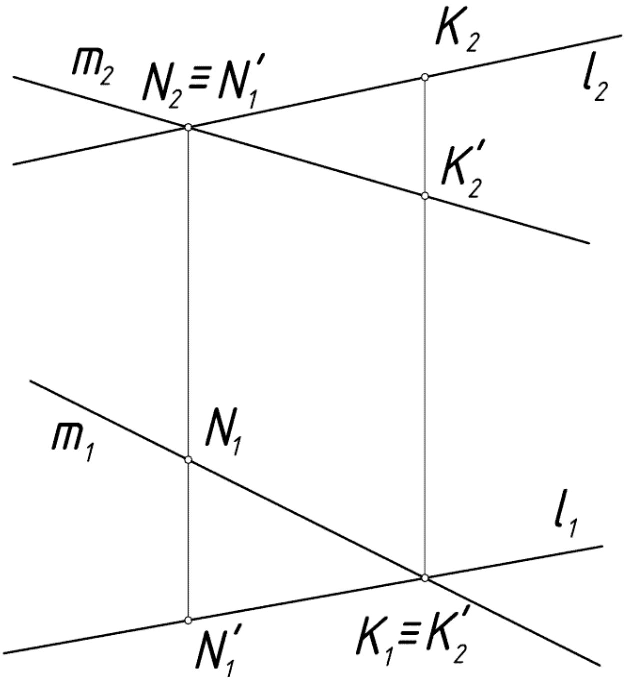


Рис. 2.4.5

Точки N_2 и K_1 являются здесь проекциями разных точек. В точку N_2 проецируются точки N и N', из которых одна принадлежит прямой l (l_1, l_2), другая – прямой m (m_1, m_2), в точку K_1 проецируются точки K и K', тоже находящиеся на разных прямых.

Точки N и N' являются фронтально-конкурирующими, а точки K и K' горизонтально-конкурирующими. Они используются для определения видимости элементов. В первом случае видимой будет та точка, которая расположена ближе к наблюдателю *(N')*, следовательно, на поле $П_2$ будет видна прямая l, во втором – видимой будет та точка, проекция которой выше, следовательно, на поле $П_1$ тоже будет видна прямая l.

2.5. Понятие линии. Кривые линии. Классификация линий. Виды кривых

Линию можно рассматривать кинематически – как множество последовательных положений непрерывно движущейся в пространстве точки.

Если точка при своем движении не изменяет своего направления, то образуется прямая линия.

Если точка при своем движении изменяет свое направление, то образуется кривая линия.

Кривые линии повсеместно встречаются в окружающем мире (очертания различных пространственных форм, линии пересечения поверхностей, графическое выражение различных математических зависимостей и т.п.).

Различают плоские и пространственные кривые линии.

Все точки плоской кривой линии принадлежат одной плоскости. К таким кривым относятся алгебраические кривые линии, т.е. линии, заданные алгебраическими уравнениями – окружность, эллипс, парабола, гипербола, трансцендентные кривые линии, заданные, например, тригонометрическими уравнениями – синусоида, циклоида, спираль Архимеда и т.д. Если известен математический закон образования кривой линии, то любую ее точку можно считать заданной. Такие кривые называются закономерными. Ее проекции можно построить с доступной точностью. Кривые, заданные их проекциями и не подчиненные какому-либо закону (незакономерные), называются графическими. Например, горизонтали поверхности земли – линии пересечения горизонтальных плоскостей с рельефом местности.

Пространственные кривые линии (линии двоякой кривизны) – это линии все точки которых не принадлежат одной плоскости. К таким кривым относят алгебраические кривые линии, порядок которых равен степени ее уравнения – кривые второго порядка (коники), третьего порядка (циссоида, строфоида, декартов лист), четвертого порядка (кардиоида, улитка Паскаля) и др., трансцендентные кривые линии – винтовые.

Совокупность лучей, проецирующих плоскую или пространственную кривую на плоскость проекций, образует цилиндрическую поверхность, которая пересекаясь с плоскостью проекций дает кривую линию. В общем случае проекцией плоской или пространственной кривой линии является плоская кривая (рис.2.5.1).

Если точки принадлежат кривой линии, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям этой кривой.

Проекции множества точек, принадлежащих кривой линии на чертеже, определяют ее положение в пространстве.

Если кривая задана конечным числом точек, то она называется каркасной, а задающие ее точки - каркасом кривой линии. Участки кривой между точками определяются приближенно.

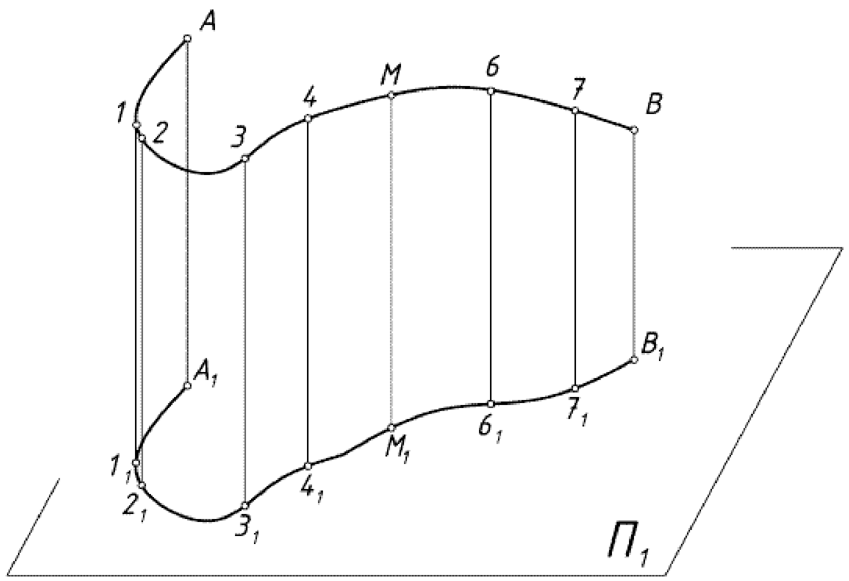


Рис. 2.5.1

2.6. Цилиндрическая винтовая линия

Наиболее распространенной из пространственных кривых является цилиндрическая винтовая линия – гелиса.

Цилиндрическая винтовая линия – это траектория движения точки А равномерно вращающейся вокруг оси и одновременно перемещающейся вдоль нее. Точка, совершающая вращательно-поступательное движение, опишет пространственную кривую линию, являющуюся цилиндрической винтовой линией - гелисой. Ось, вокруг которой вращается точка, называется осью винтовой линии. Вращение происходит по радиусу R, который называется радиусом винтовой линии. Шаг винтовой линии P – это величина перемещения точки вдоль оси, соответствующая одному ее обороту вокруг оси (рис.2.6.1).

Если при взгляде вдоль оси винтовой линии точка будет удаляться от наблюдателя, вращаясь по часовой стрелке, то винтовая линия называется правой.

Если точка будет удаляться от наблюдателя, вращаясь против часовой стрелки, то винтовая линия – левая.

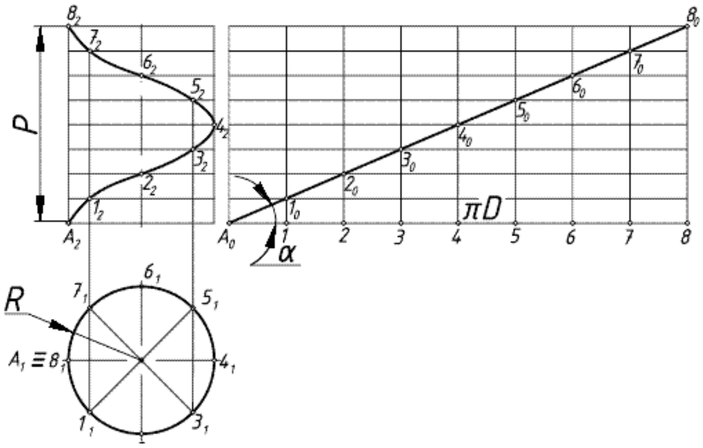


Рис. 2.6.1

Примером цилиндрической винтовой линии может служить линия, которую прочертит на боковой поверхности цилиндрической детали конец резца (точка А), равномерно движущегося параллельно оси цилиндра, вращающегося с постоянной скоростью (рис. 2.6.2).

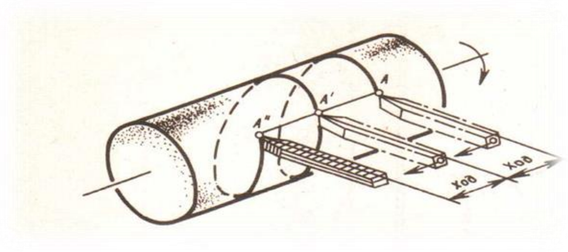


Рис. 2.6.2

Помимо цилиндрической винтовой линии существуют коническая винтовая линия, винтовая линия на сфере и др.

Винтовые линии широко применяют в машиностроительных изделиях с винтовой поверхностью: резьбовые детали и соединения, пружины, специальные изделия.

Винтовые линии часто используют в дорожном строительстве, например, при сооружении горных дорог (серпантин).

Лекция 3

Плоскости. Способы задания плоскостей. Плоскости общего и частного положения. Точка в плоскости. Прямая в плоскости. Главные или характерные линии плоскости.

3.1. Плоскости. Способы задания плоскостей

Положение плоскости в пространстве однозначно определяют (рис. 3.1.1):

а) три точки, не лежащие на одной прямой;

б) прямая и точка вне ее;

в) две параллельные прямые;

г) две пересекающиеся прямые;

д) любая плоская фигура

е) след – линия пересечения плоскости с плоскостью проекций (рис. 3.1.1)

Для построения эпюра плоскости общего положения используется понятие определителя плоскости. Определителем называется совокупность условий, необходимых и достаточных для определения геометрической фигуры в пространстве.

Каждый из перечисленных способов задания плоскости (кроме случая е) можно свести к любому из остальных. Например, задание плоскости тремя точками равносильно заданию той же плоскости двумя пересекающимися прямыми или двумя параллельными прямыми или любой плоской фигурой и т.д. Во многих случаях при решении задач переходы от одного способа задания к другому упрощает графические построения.

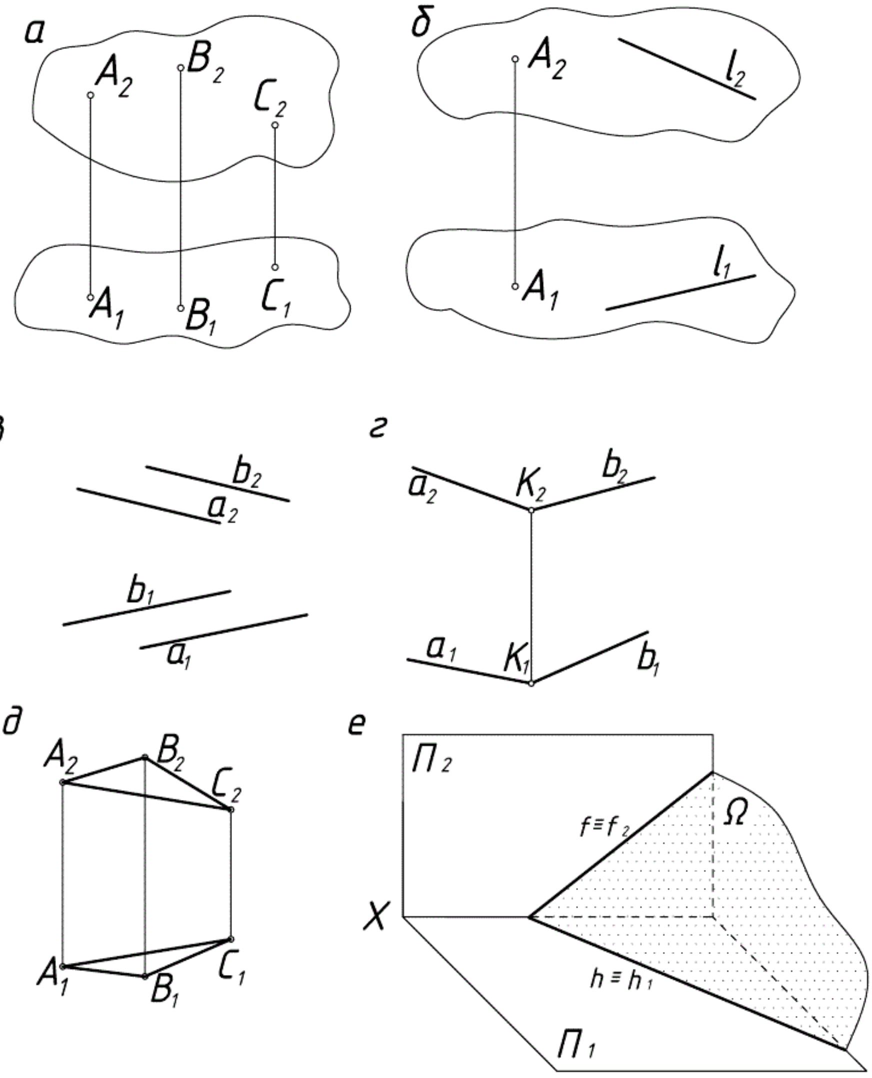


Рис. 3.1.1

3.2. Плоскости общего и частного положения

Плоскости в зависимости от положения относительно плоскостей проекций делятся на плоскости общего и частного положения. Плоскости, располагающиеся в пространстве произвольно по отношению к плоскостям проекций, называются плоскостями общего положения. Они, так же, как и прямые, делятся на восходящие и нисходящие. Все плоскости, представленные на рисунке 3.1.1, кроме случая е, являются плоскостями общего положения.

Плоскости уровня

Плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций называются плоскостями уровня.

а) плоскость, параллельная $П_1$ называется горизонтальной плоскостью уровня. На рис. 3.2.1 эта плоскость задана треугольником ABC. Г (Δ ABC).

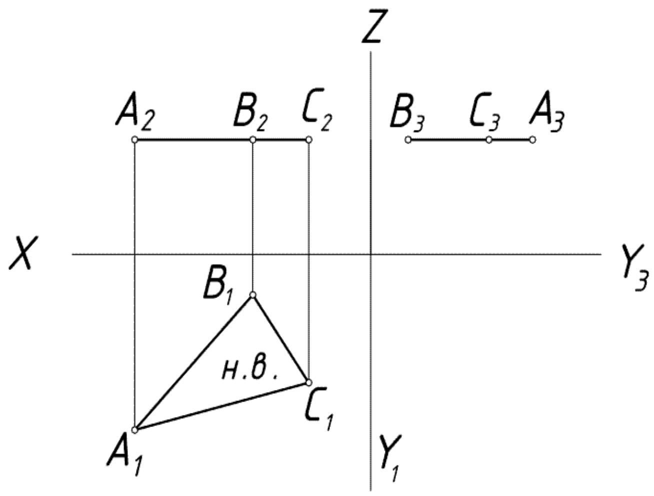


Рис. 3.2.1

Любая фигура, расположенная в такой плоскости, на горизонтальную плоскость проекций проецируется в натуральную величину.

б) плоскость, параллельная $П_2$ называется фронтальной плоскостью уровня. На рис. 3.2.2 плоскость задана прямой BC и точкой A, не принадлежащей прямой. Ф (A, BC).

Любая фигура, расположенная в такой плоскости, проецируется на фронтальную плоскость проекций без искажения.

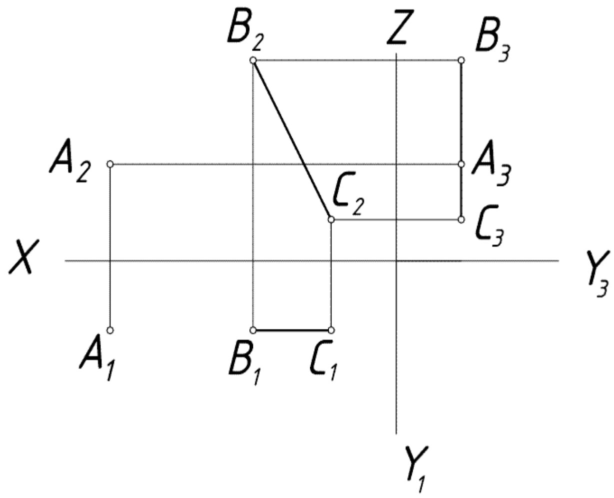


Рис. 3.2.2

в) плоскость, параллельная $П_3$, называется профильной плоскостью уровня. На рис. 3.2.3 плоскость задана двумя пересекающимися прямыми АВ и ВС. Ψ (АВ∩ВС)

Любая фигура, расположенная в этой плоскости, проецируется на профильную плоскость проекций в натуральную величину.

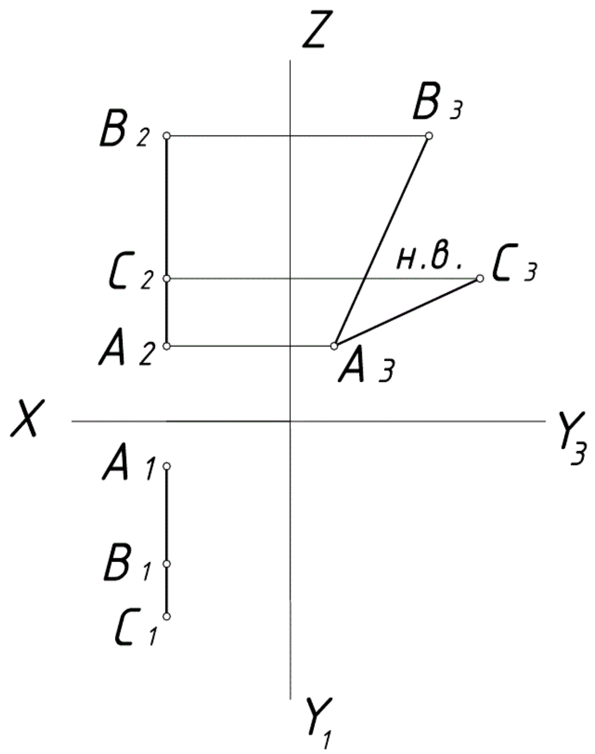


Рис. 3.2.3

Плоскости проецирующие

Плоскости, перпендикулярные одной из плоскостей проекций называются проецирующими.

а) плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций называется горизонтально-проецирующей (рис. 3.2.4). Σ (AB∩BC).

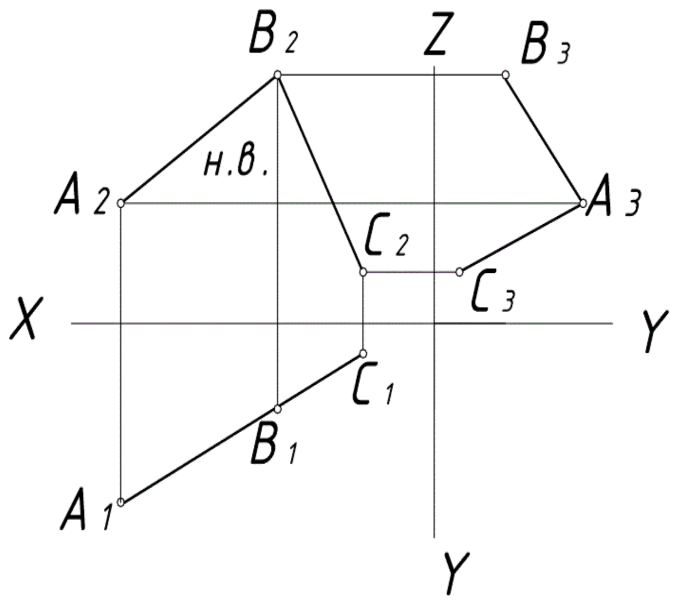


Рис. 3.2.4

б) плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций называется фронтально-проецирующей (рис.3.2.5). Плоскость задана следами.

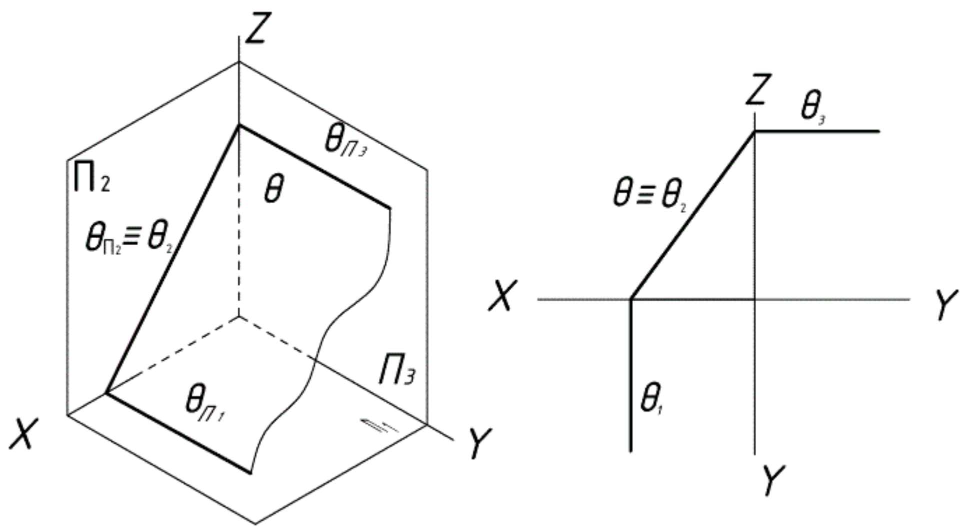


Рис. 3.2.5

в) плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций называется профильно-проецирующей (рис. 3.2.6). Ψ (Δ ABC).

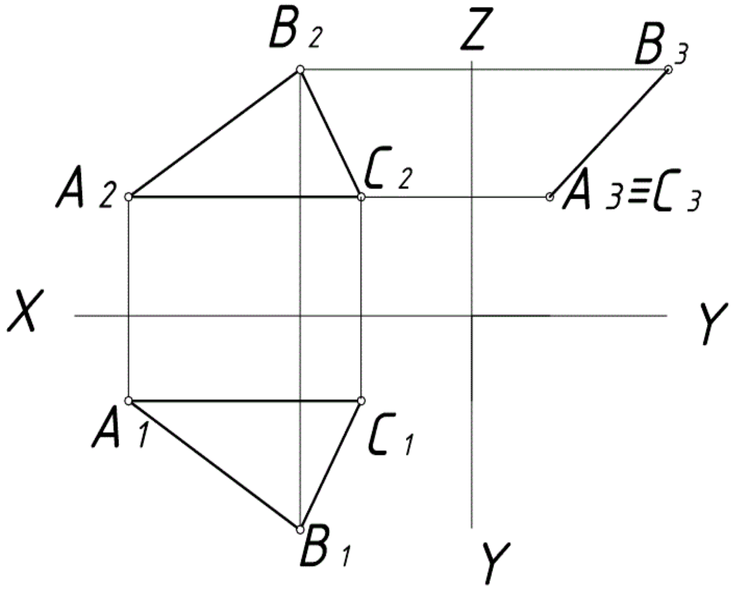


Рис. 3.2.6

3.3. Точка в плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 3.3.1).

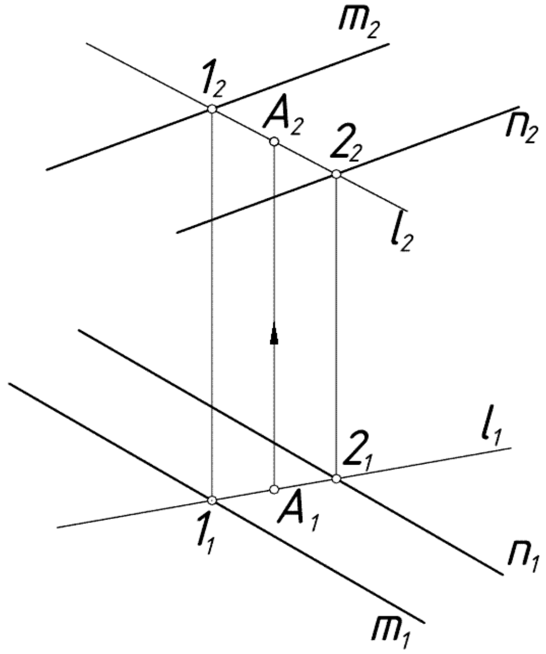


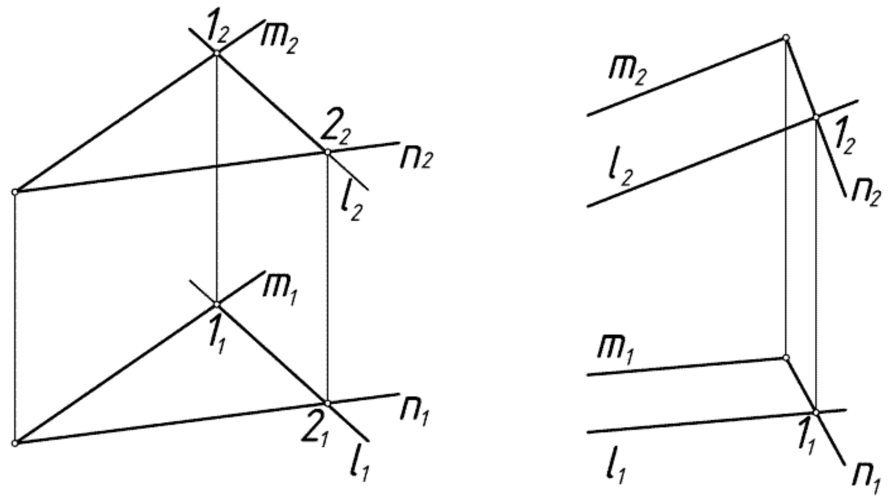
Рис.3.3.1

3.4. Прямая в плоскости

Прямая принадлежит плоскости, если:

а) она имеет с ней как минимум две общие точки (рис. 3.4.1, а);

б) она имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 3.4.1, б).



а) б)

Рис. 3.4.1

3.5. Главные или характерные линии плоскости

К ним относятся линии уровня и линии наибольшего наклона, принадлежащие плоскости.

Линии уровня в плоскости – это линии параллельные какой-либо плоскости проекций и принадлежащие заданной плоскости:

а) горизонтали - прямые, лежащие в плоскости и параллельные горизонтальной плоскости проекций (рис. 3.5.1);

б) фронтали – прямые, лежащие в плоскости и параллельные фронтальной плоскости проекций (рис. 3.5.2);

в) профильные прямые уровня – прямые, лежащие в плоскости и параллельные профильной плоскости проекций (рис. 3.5.3);

Линии наибольшего наклона к плоскостям $П_1$, $П_2$ и $П_3$- это прямые, лежащие в плоскости и перпендикулярные к горизонталям, фронталям и профильным прямым уровня. Среди них выделяют линию, перпендикулярную к горизонтали плоскости, которую называют линией наибольшего ската – линия n (рис. 3.5.4).

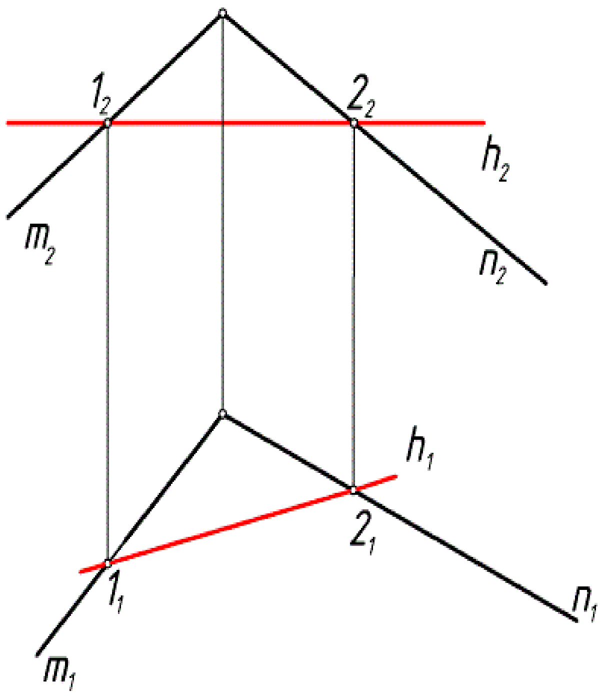


Рис. 3.5.1

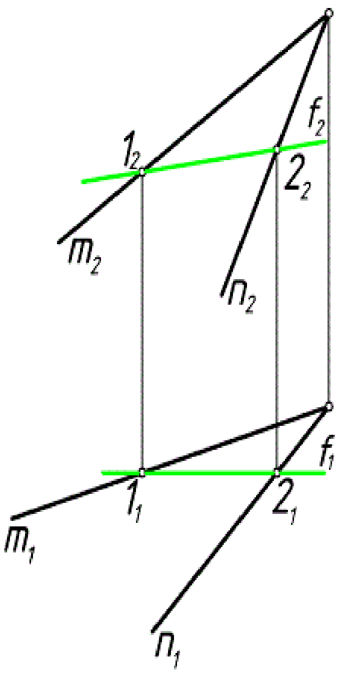


Рис. 3.5.2

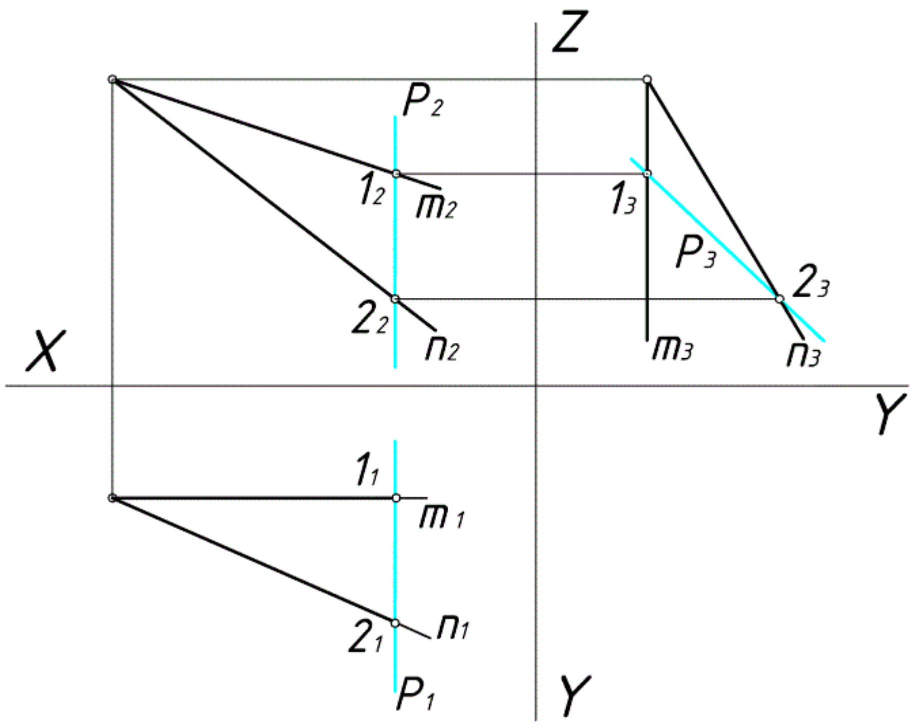


Рис. 3.5.3

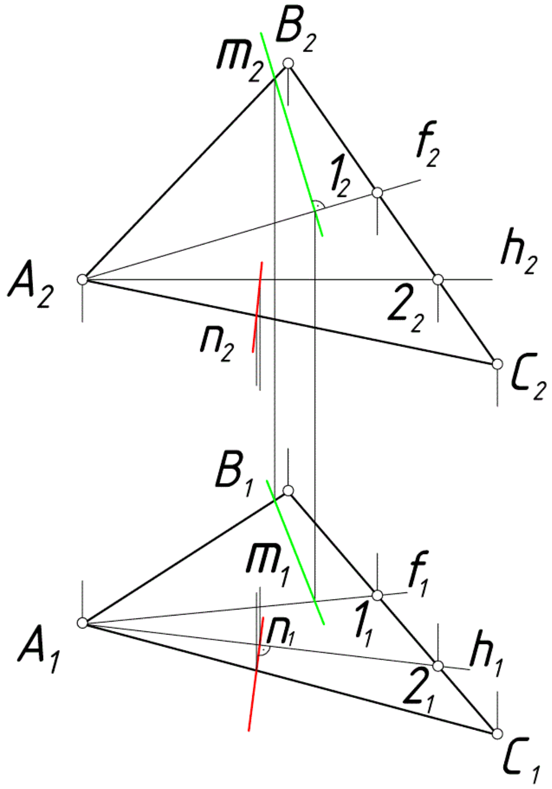


Рис. 3.5.4

Лекция 4

Поверхности. Образование поверхностей. Способы задания поверхностей на чертеже. Условная классификация поверхностей. Линейчатые развертывающиеся поверхности. Линейчатые неразвертывающиеся поверхности. Винтовые поверхности. Поверхности, образованные вращением прямой. Поверхности, образованные вращением окружности.

4.1.Поверхности. Образование поверхностей

Под поверхностью понимают множество всех последовательных положений непрерывно перемещающейся в пространстве линии, которая называется образующей. Образующая может быть прямой или кривой, постоянной или непрерывно изменяющейся. Движение образующей может быть подчинено какому-либо закону или может быть произвольным.

4.2.Способы задания поверхности на чертеже

а). Аналитический способ – поверхность рассматривают как множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению, т.е. поверхность задается уравнением.

б). Каркасный способ –поверхность задается множеством принадлежащих линий, которое называется каркасом (рис. 4.2.1). Каркас может быть непрерывным, если множество линий сплошь заполняют данную поверхность, и дискретный – совокупность отдельных линий данной поверхности, например – поверхность обшивки самолета, корпуса судна, кузова автомобиля, рельеф земной поверхности (рис. 4.2.2).

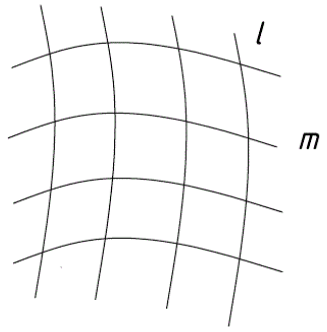


Рис. 4.2.1

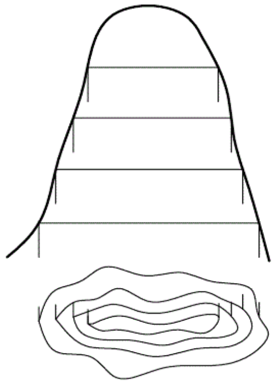


Рис. 4.2.2

в). Кинематический – поверхность рассматривается как совокупность всех положений движущейся линии и задается определителем.

Определитель – это совокупность геометрических элементов, определяющих поверхность. Он состоит из геометрической (перечень геометрических фигур, образующих поверхность) и алгоритмической (закон перемещения образующих) частей. Общий вид определителя можно записать так Ф (*Г*) [*А*], где *Г* – геометрическая часть, *А* – алгоритмическая часть.Например: Θ (l ∩ b) – плоскость, заданная пересекающимися прямыми, так как плоскость – это элементарная поверхность алгоритмическая часть определителя отсутствует. Помимо этого, поверхность на чертеже задается очерком. Очерк — это линия пересечения плоскости проекций с проецирующей поверхностью, которая огибает заданную (рис. 4.2.3).

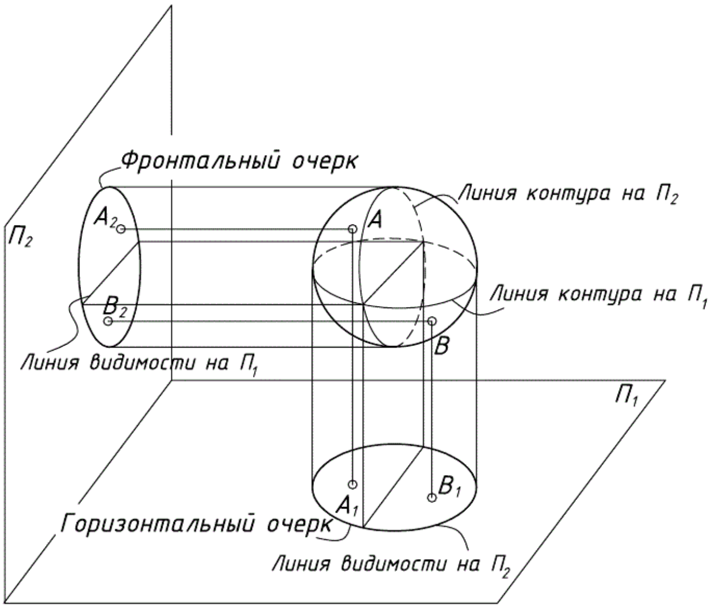


Рис. 4.2.3

Линия контура делит поверхность на видимую и невидимую части. Видима на плоскости проекций та часть поверхности, которая расположена между наблюдателем и линией контура, та часть поверхности, которая расположена за линией контура – невидима. На плоскости $П_2$ точка *B* видима, а точка *A* невидима, а на плоскости $П_1$ наоборот.

4.3.Условная классификация поверхностей

Поверхности по их определенным признакам могут быть разбиты на ряд отдельных классов, причем это деление условное, так как одна и та же поверхность может быть отнесена к двум и более классам.

1. По форме образующей поверхности: поверхности линейчатые, которые образуются движением прямолинейной образующей и нелинейчатые, которые образуются движением криволинейной образующей.
2. По закону движения образующей поверхности: поверхности вращения, поверхности с поступательным перемещением образующей, винтовые поверхности.
3. По признаку развертываемости: развертываемые, которые можно совместить с плоскостью проекций без складок и разрывов и неразвертываемые, не совмещающиеся с плоскостью без складок и разрывов.
4. По закону образования: закономерные, если известен закон ее образования и незакономерные, если закон образования неизвестен.
5. Поверхности с постоянной образующей, образующая которых не изменяет своей формы в процессе образования поверхности и поверхности с переменной образующей, образующая которых изменяет свою форму в процессе образования поверхности.

4.4.Линейчатые развертывающиеся поверхности

4.4.1. Гранные поверхности

Гранные поверхности образуются перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей.

Гранные поверхности делятся на пирамидальные и призматические.

Пирамидальные образуются перемещением прямолинейной направляющей по ломаной образующей, причем все образующие имеют одну общую неподвижную точку, которая называется вершиной пирамидальной поверхности (рис. 4.4.1.1). Определитель поверхности: $Ф_n(l, m, S)$ $[l \cap \mathrm{m}, S \in l]$.

Если вершина перемещена в несобственную точку, то образуется призматическая поверхность, у которой все ребра параллельны друг другу. Призматическая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей по ломаной направляющей, причем се образующие перемещаются параллельно некоторому заданному направлению (рис. 4.4.1.2). Определитель: $Ф_{пр}$ (l, m, S) $[l \cap m, l \parallel S]$.

Поверхности называются открытыми, если направляющая незамкнута. В противном случае поверхности открытые (рис. 4.4.1.1, 4.4.1.2).

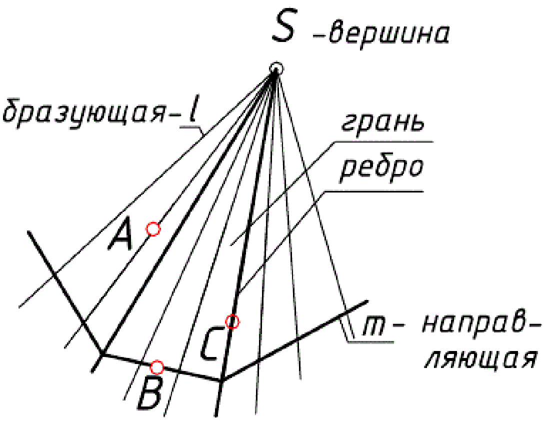


Рис. 4.4.1.1

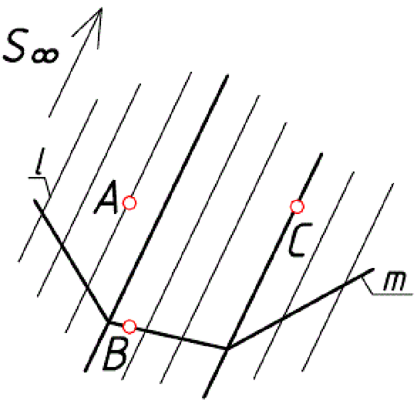
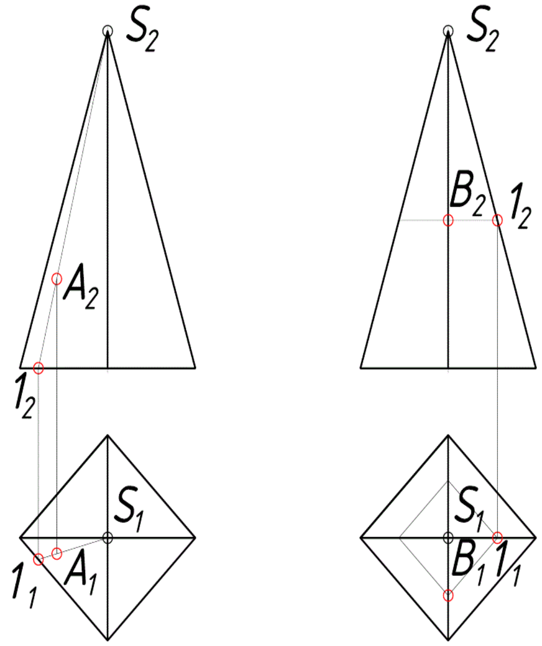


Рис. 4.4.1.2

Если направляющая замкнется, то образуются призма и пирамида. Пирамида – многогранник, в основании которого лежит многоугольник (правильный или неправильный, а боковые грани – треугольники, имеющие общую точку. Призма – многогранник, в основании которого лежат многоугольники, а боковые грани являются прямоугольниками.

Точка принадлежит поверхностям, если она принадлежит образующей (рис. 4.4.1.1, 4.4.1.2, 4.4.1.3 а) или линии параллельной основанию (рис. 4.4.3 б), принадлежащим поверхностям.



а) б)

Рис. 4.4.1.3

На рис. 4.4.1.4 показано построение линии, принадлежащей боковой поверхности призмы.

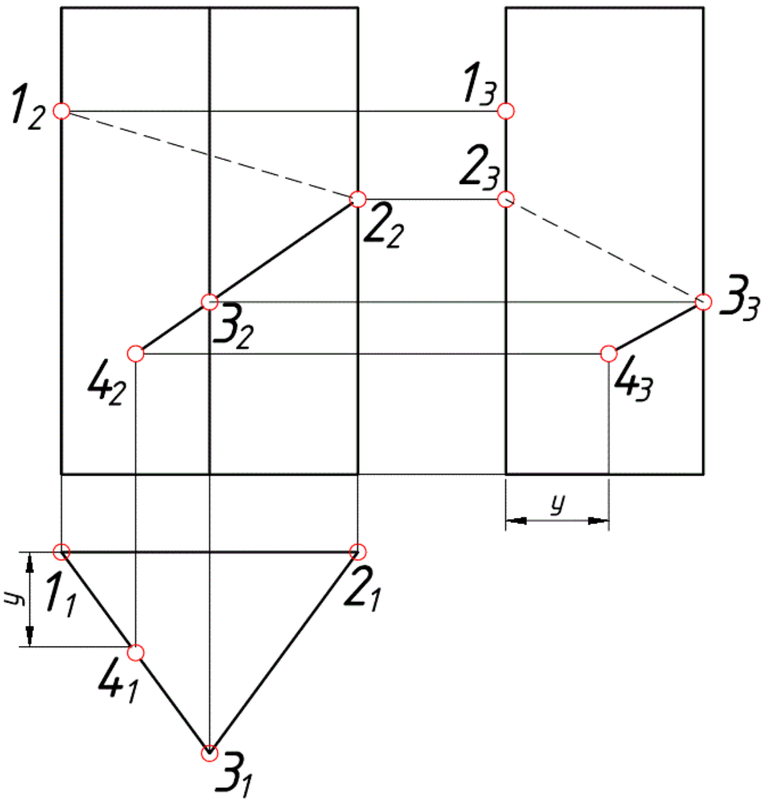


Рис. 4.4.1.4

4.4.2. Торсовые поверхности

Торсовые поверхности относятся к линейчатым развертывающим поверхностям. Они образуются перемещением прямолинейной образующей по криволинейной направляющей. Они делятся на конические, цилиндрические и торсы.

Коническая поверхность образуется движением прямолинейной образующей по криволинейной направляющей, причем все образующие имеют неподвижную общую точку, которая называется вершиной конической поверхности (рис. 4.4.2.1). Точка принадлежит конической поверхности, если она принадлежит образующей, лежащей на этой поверхности (рис. 4.4.2.1, 4.4.2.2).

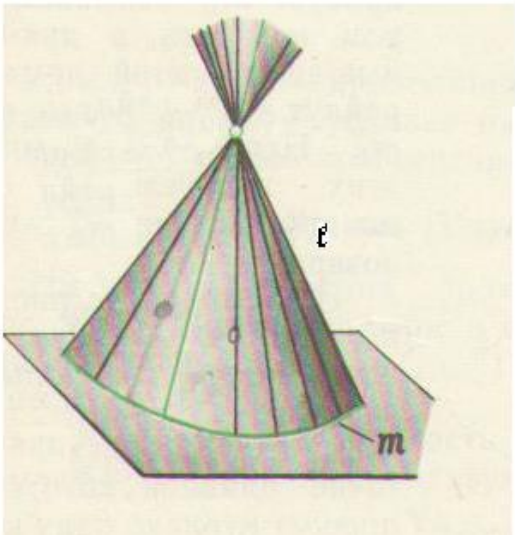


Рис. 4.4.2.1

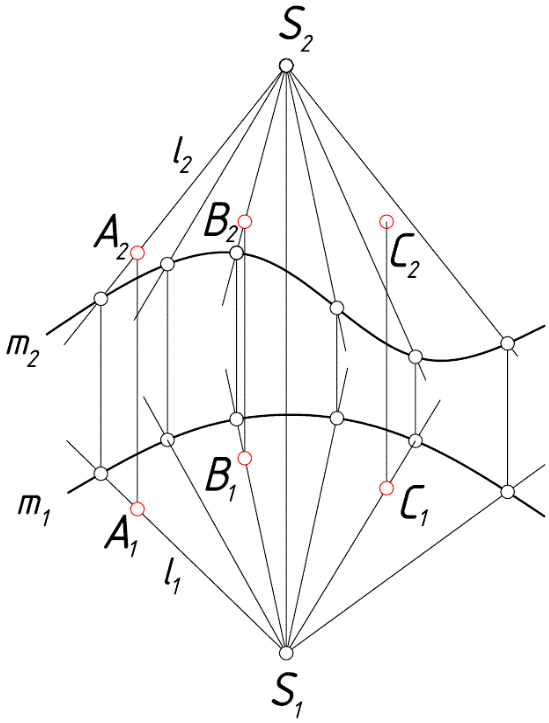


Рис. 4.4.2.2

На рис. 4.4.2.2 показаны ортогональные проекции конической поверхности. Определитель поверхности $\Phi_к$ (l, m, S) $[l \cap m, S \in l]$.

Цилиндрическая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей по криволинейной направляющей, причем все образующие перемещаются параллельно заданному направлению (рис. 4.4.2.3). Точка принадлежит цилиндрической поверхности, если принадлежит образующей лежащей на этой поверхности (рис.4.4.2.3, 4.4.2.4).

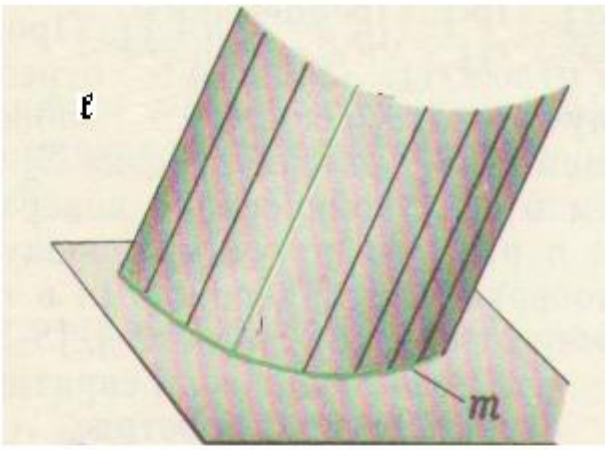


Рис. 4.4.2.3

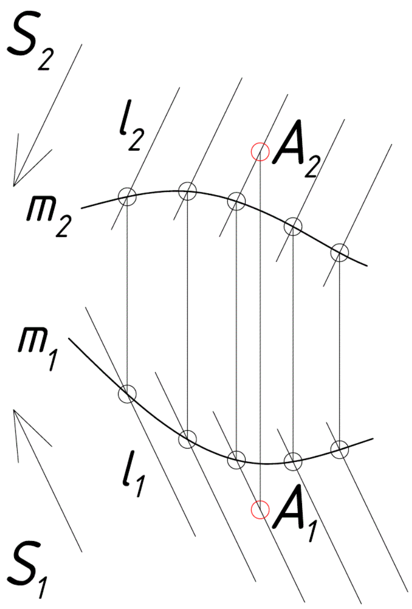


Рис. 4.4.2.4

На рис. 4.4.2.4 показаны ортогональные проекции цилиндрической поверхности. Определитель поверхности: $\Phi_ц$ (l, m, S) $[l \cap m, l \,//\, S]$.

На рисунках показаны открытые поверхности. Если направляющая замкнется, то образуются конус и цилиндр, которые иначе называют поверхностями вращения.

Торс – поверхность, образованная движением прямолинейной образующей, которая во всех своих направлениях является касательной к некоторой пространственной кривой, называемой ребром возврата (рис. 4.4.2.5).

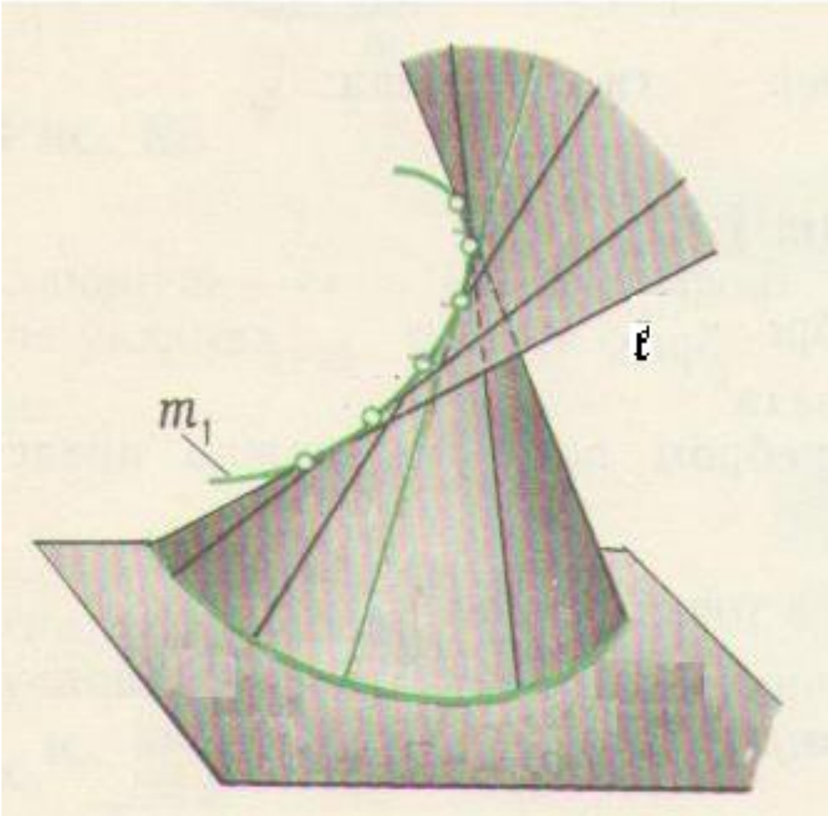


Рис. 4.4.2.5

4.5.Линейчатые неразвертывающиеся поверхности

(материал для самостоятельной проработки)

а) Поверхности с плоскостью параллелизма (поверхности Каталана)

Прямой коноид образуется при движении прямолинейной образующей по двум направляющим, одна из которых прямая линия, а другая кривая, причем все образующие перемещаются параллельно заданной плоскости параллелизма. Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит образующей, лежащей на этой поверхности (рис. 4.5.1). Определитель: $\Phi_к$ (m, n, l) $[l \,//\, Г]$. На рис. 4.5.2 показаны ортогональные проекции коноида.

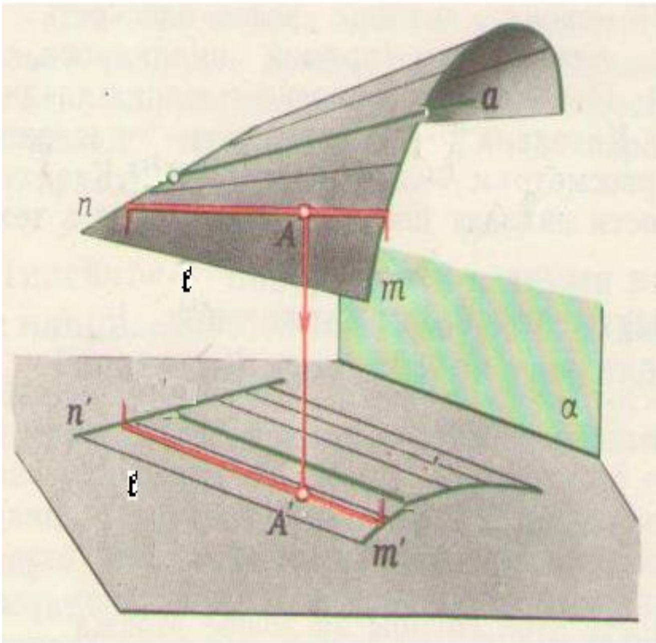


Рис. 4.5.1

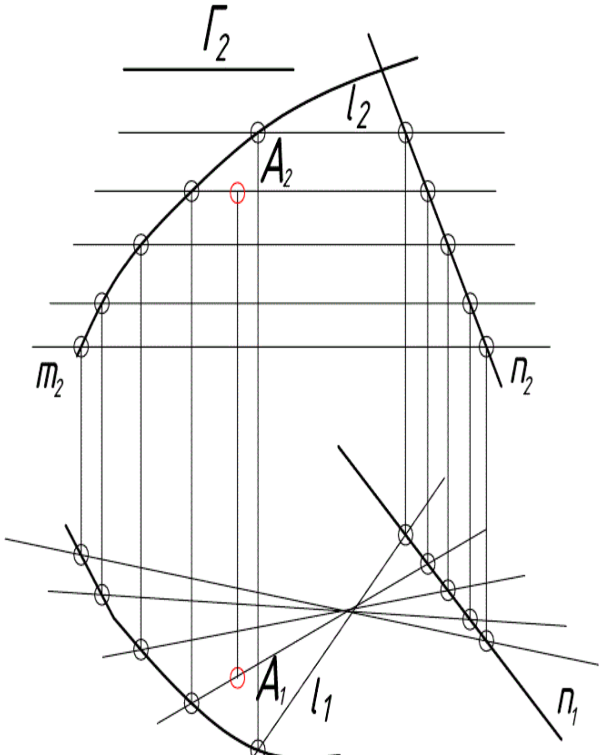


Рис. 4.5.2

Прямой цилиндроид образуется перемещением прямолинейной образующей по двум криволинейным направляющим, причем все образующие перемещаются параллельно некоторой заданной плоскости параллелизма. Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит образующей, лежащей на этой поверхности (рис. 4.5.3). Определитель: *$\Phi_ц$ (m, n, l) [l // Г]*.

На рис. 4.5.4 показаны ортогональные проекции цилиндроида.

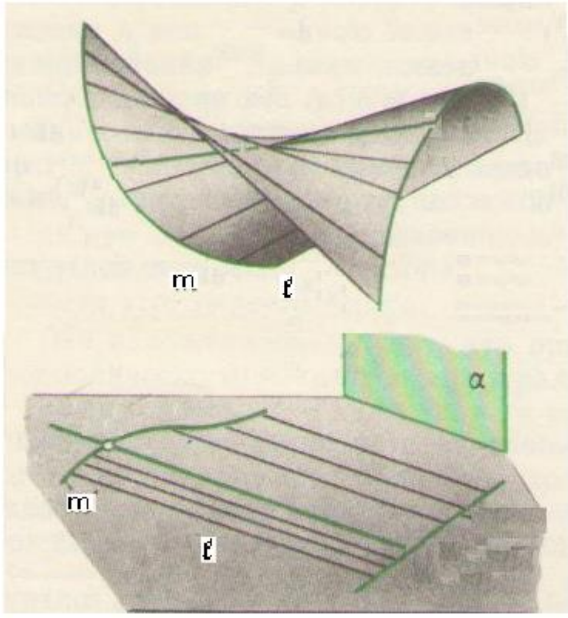


Рис. 4.5.3

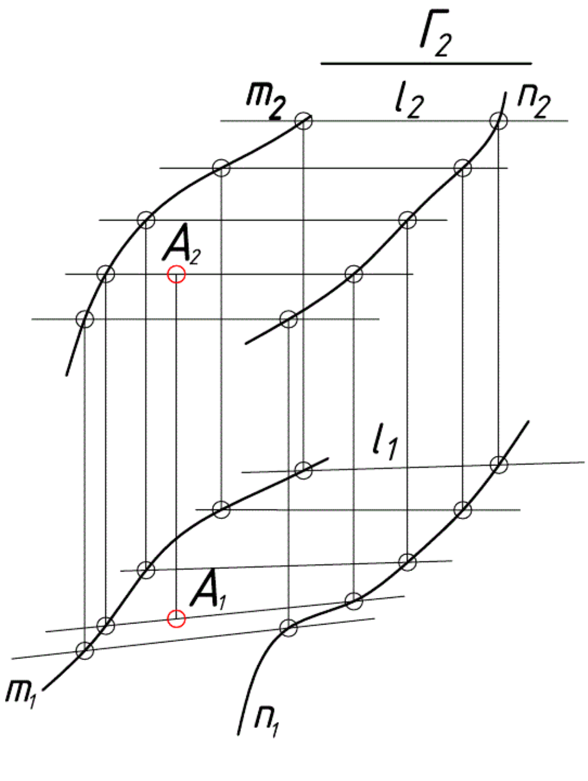


Рис. 4.5.4

Косая плоскость или гиперболический параболоид образуется перемещением прямолинейной образующей по двум прямолинейным скрещивающимся направляющим, причем все образующие перемещаются параллельно некоторой заданной плоскости параллелизма. Точка принадлежит поверхности, если принадлежит образующей, лежащей на этой поверхности (рис. 4.5.5). Определитель: $\Phi_{кп}$ (m, n, l) $[l \parallel \Pi_2]$. На рис. 4.5.6 показаны ортогональные проекции косой плоскости.

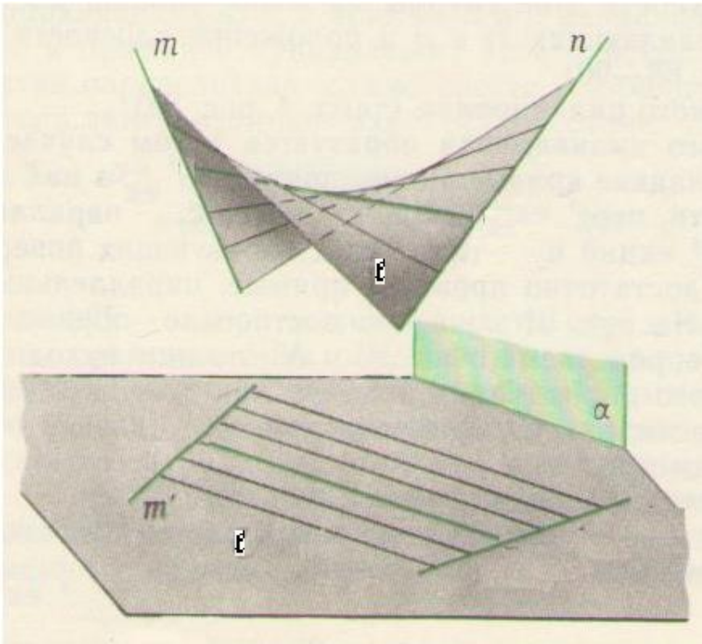


Рис. 4.5.5

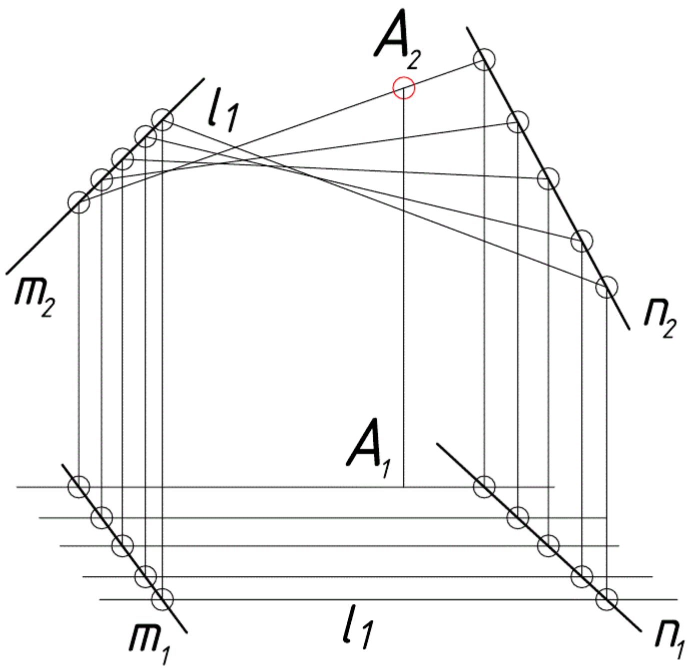


Рис. 4.5.6

4.6. Винтовые поверхности.

Геликоиды – образуются движением прямолинейной образующей по двум направляющим, одна из которых прямая линия (ось), а другая – цилиндрическая винтовая линия.

Характерной особенностью винтовых поверхностей является постоянство угла наклона образующей к оси цилиндрической винтовой линии. Если угол равен 90°, то есть образующая перпендикулярна оси винтовой линии, то геликоид называется прямым (рис. 4.7.2), если угол наклона образующей от 90°, то – косым или наклонным (рис. 4.7.1). В этом случае для построения образующих поверхности вводят направляющий конус. Угол наклона образующей направляющего конуса равен углу наклона образующей геликоида.

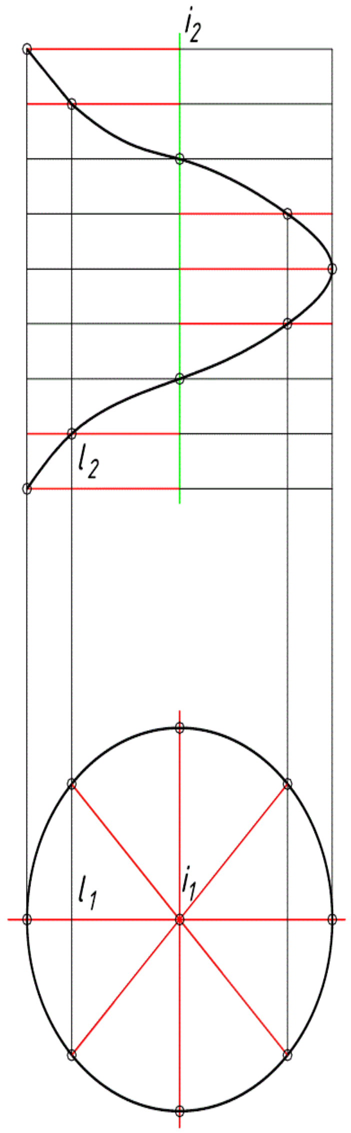


Рис. 4.6.1

Если образующая пересекает ось геликоида, то он называется закрытым (рис. 4.6.1), если образующая скрещивается с осью геликоида – открытым (рис. 4.6.2).

У прямого геликоида образующая перемещается параллельно заданной плоскости параллелизма, у косого параллельно заданному углу (направляющий конус).

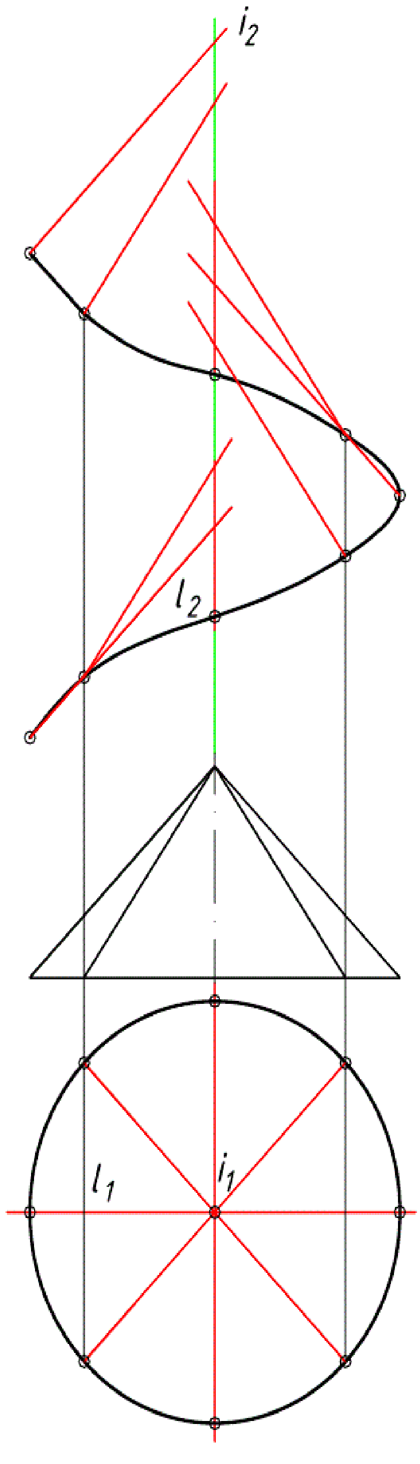


Рис. 4.6.2

Нелинейчатые поверхности.

4.7. Поверхности вращения общего вида

Поверхности вращения образуются вращением какой-либо образующей вокруг неподвижной оси.

Каждая точка образующей при вращении вокруг оси описывает окружность с центром на оси вращения. Эти окружности называются параллелями. Наибольшая параллель – экватор, наименьшая – горло.

Плоскости, проходящие через ось поверхности вращения называются меридиональными.

Меридиональная плоскость параллельная плоскости проекций называется главной меридиональной, а линия ее пересечения с поверхностью – главным меридианом.

Графически простые линии, которые можно провести на поверхности вращения – окружности. Следовательно, точка принадлежит поверхности, если она принадлежит окружности, лежащей на этой поверхности (рис. 4.7.1).

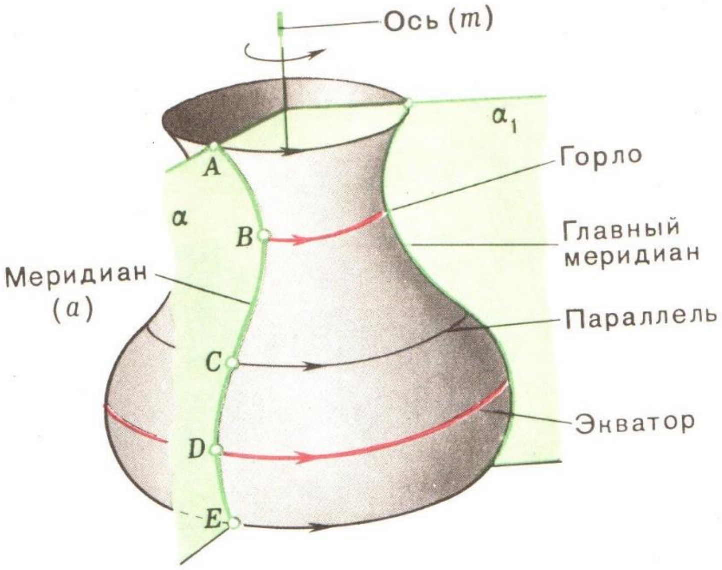
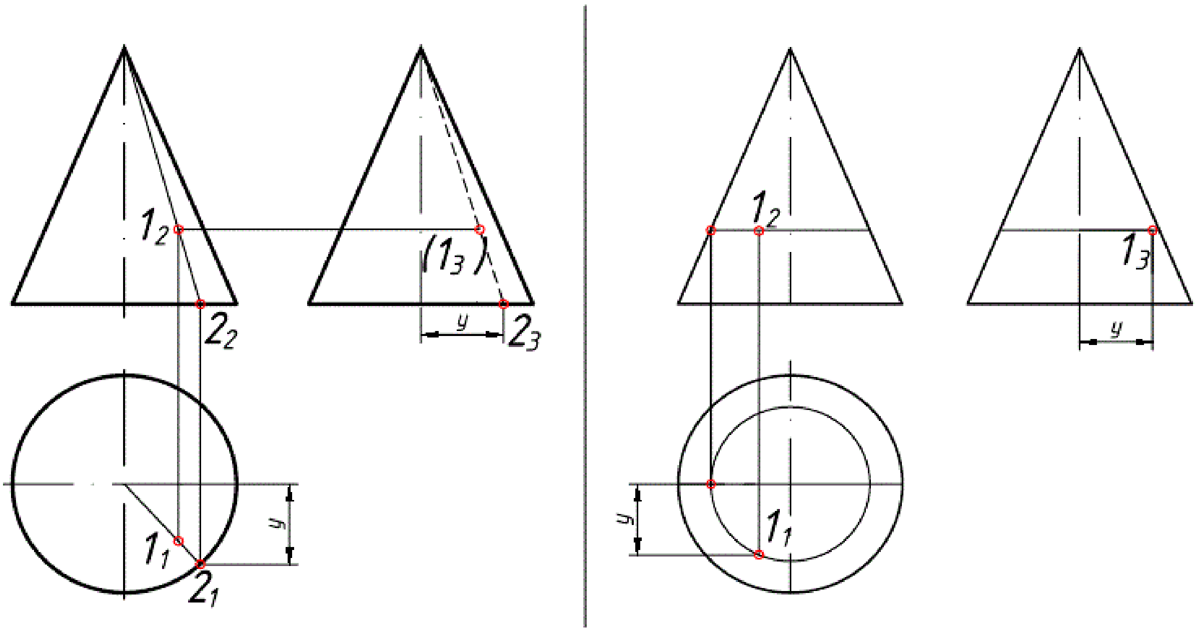


Рис. 4.7.1

4.8. Поверхности, образованные вращением прямой.

К таким поверхностям вращения относятся конус и цилиндр, так как они образуются вращением прямолинейной образующей вокруг неподвижной оси. Каждая точка образующей при своем вращении описывает окружность, следовательно, точка принадлежит конусу или цилиндру, если она принадлежит либо образующей (рис.4.8.1, а), либо окружности (рис. 4.8.1, б), лежащих на этих поверхностях.



а) Рис. 4.8.1 б)

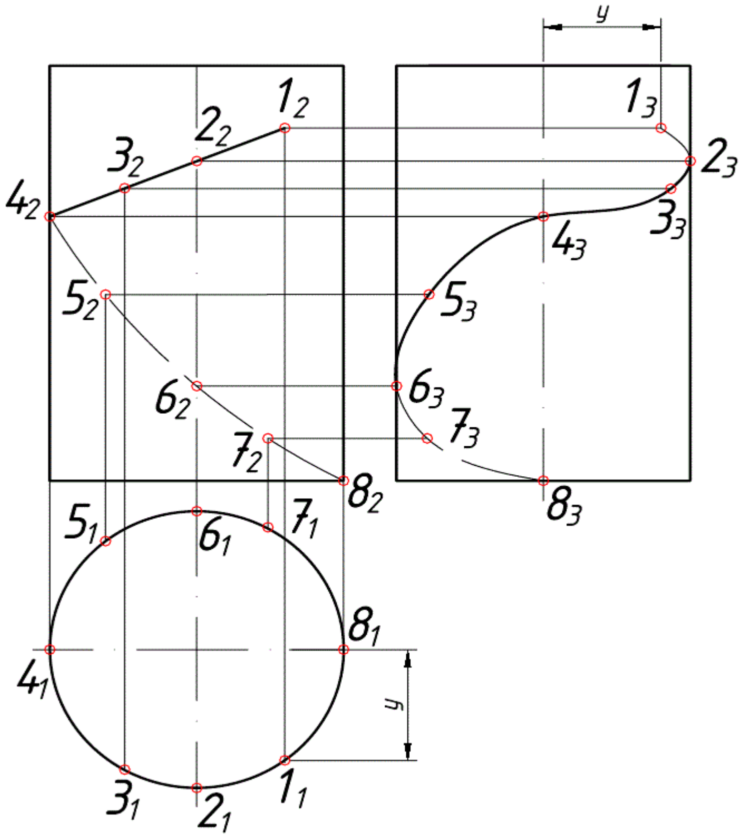


Рис. 4.8.2

На рис. 4.8.2 показано нахождение проекций линии на горизонтально-проецирующем цилиндре.

4.9. Поверхности, образованные вращением окружности.

Сфера образуется вращением окружности вокруг одного из своих диаметров. Часть пространства, ограниченную сферой, называют шаром. Все три проекции сферы одинаковы (рис. 4.9.1). Фронтальный очерк сферы есть фронтальная проекция главного меридиана, горизонтальный является экватором. Графически простые линии, проводимые на поверхности сферы – окружности, поэтому точка принадлежит сфере, если она принадлежит окружности, лежащей на поверхности сферы.

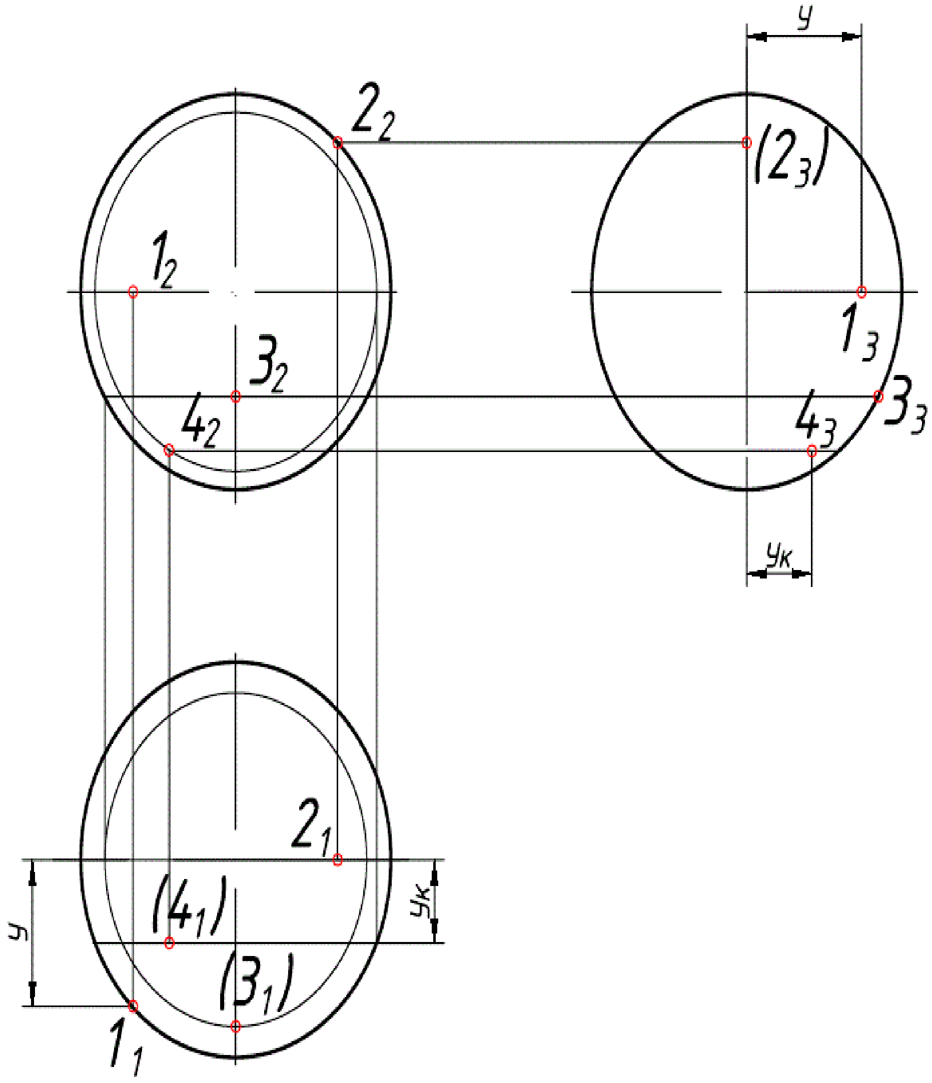


Рис. 4.9.1

Тор образуется вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости окружности, но не являющейся ее диаметром. Точка принадлежит поверхности тора, если она принадлежит окружности, лежащей на поверхности тора.

Если ось пересекает образующую окружность, то образуется закрытый тор (рис. 4.9.2).

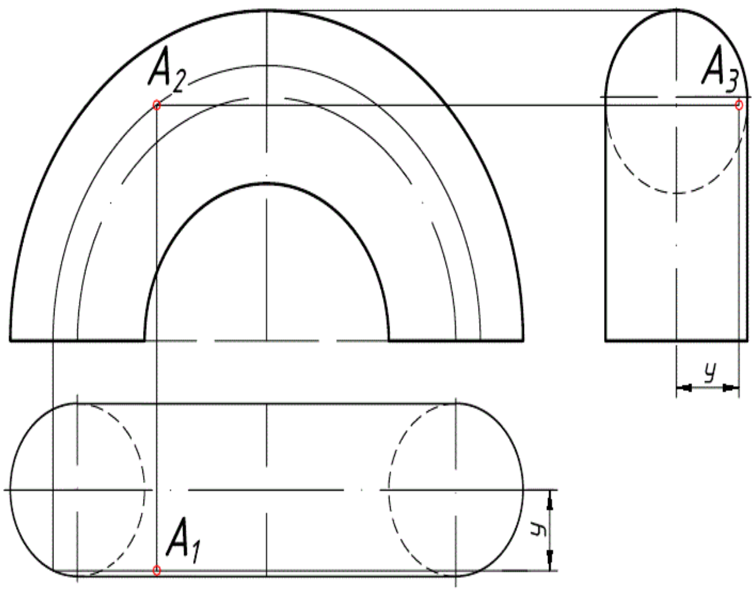


Рис. 4.9.2

Если ось не пересекает образующую окружность, то образуется открытый тор (рис. 4.9.3).

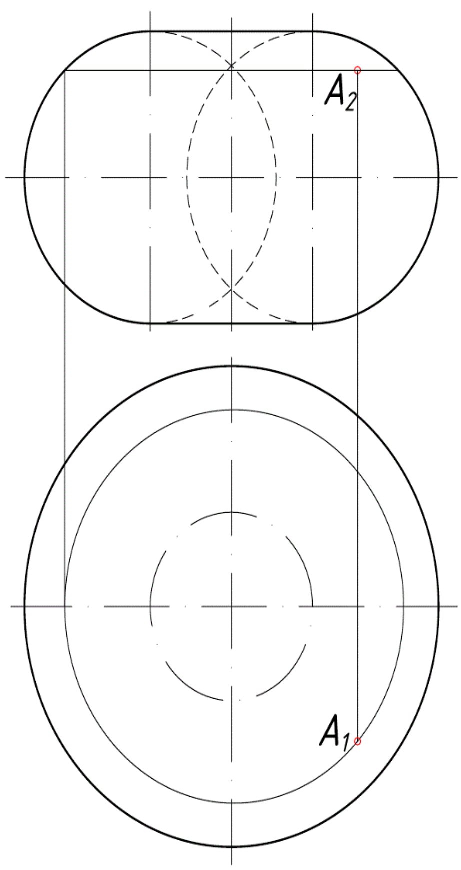


Рис. 4.9.3

Лекция 5

Позиционные задачи. Задачи на взаимопринадлежность (задачи 1 группы). Линия и плоскость. Линия и поверхность. Две плоскости. Плоскость и поверхность. Две поверхности.

5.1. Позиционные задачи

Позиционными называются задачи, в которых определяется взаимное расположение геометрических фигур относительно друг друга.

В зависимости от расположения пересекающихся геометрических тел относительно плоскостей проекций и участия в пересечении геометрических тел, имеющих проецирующую поверхность (призма, цилиндр) или не имеющих ее (пирамида, конус, сфера, тор и др.), следует выбрать оптимальный способ построения проекций линии пересечения поверхностей на чертеже.

По этим признакам способы построения линий пересечения поверхностей можно объединить в две группы:

1 группа - частные случаи пересечения, когда для построения точек или линий пересечения не требуется применения специальных способов, а используется частное положение пересекающихся геометрических тел (задачи на взаимопринадлежность);

2 группа - общие случаи пересечения, когда для построения точек или линий пересечения требуется применить специальные способы посредников (плоскостей или сфер).

В пересечении двух заданных фигур (прямой, плоскости, поверхности) могут быть получены:

1) точка или несколько точек, если прямая пересекает плоскость или поверхность;
2) прямая линия, если пересекаются две плоскости;
3) плоская или ломаная кривая, если пересекаются плоскость и поверхность;
4) пространственная кривая или ломаная, если пересекаются две поверхности.

Если линией пересечения является плоская или пространственная кривая, то построение проекций этой линии проводится по отдельным точкам, которые затем соединяются между собой. Среди множества этих точек сначала необходимо построить так называемые характерные (опорные) точки, к которым относятся:

а) точки видимости, расположенные на очерковых образующих. Они делят линию пересечения на видимую и невидимую части;

б) точки, лежащие на осях симметрии;

в) экстремальные точки, т.е. точки наиболее близкие или удаленные от плоскости проекций;

г) для многогранников – точки, лежащие на ребрах.

5.2. Задачи на взаимопринадлежность (задачи 1 группы)

Если пересекаются два элемента, один из которых занимает проецирующее положение, то одна проекция ответа (точка или линия пересечения) уже есть на комплексном чертеже (она совпадает с проекцией проецирующего элемента), а вторая проекция находится из условия принадлежности первого ответа элементу общего положения.

5.2.1. Линия и плоскость.

Общее множество линии и плоскости – точка.

Пример 1. Дана плоскость Θ (Δ ABC), прямая i $\perp$ Π_2. Необходимо найти точку пересечения прямой с плоскостью. Воспользуемся условием решения задачи на взаимопринадлежность. Из двух данных элементов прямая проецирующая. Если она перпендикулярна полю Π_2, значит на нем есть одна проекция ответа – это точка преесечения *K*. $K_2 \equiv i_2$. Вторую проекцию ответа ищем из условия принадлежности точки плоскости, т.к. плоскость является непроецирующим элементом. Точка принадлежит плоскости, если принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости. Определяем видимость прямой относительно плоскости при помощи конкурирующих точек *2* и *3* (рис. 5.2.1.1).

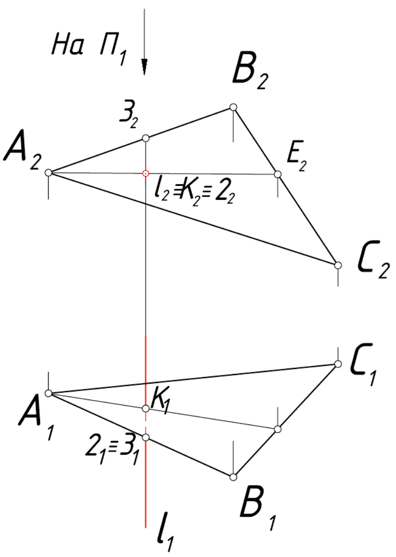


Рис. 5.2.1.1

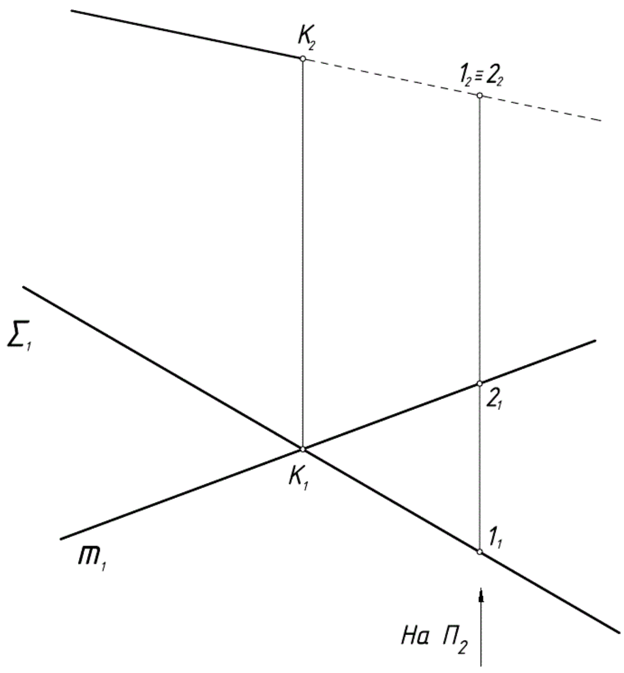


Рис. 5.2.1.2

Пример 2. Дана плоскость Σ (Σ_1) и прямая *m*. Необходимо найти точку пересечения прямой и плоскости. Исходя из чертежа видим, что плоскость Σ горизонтально-проецирующая (задана следом) $\Sigma \perp \Pi_1$, а прямая *m* общего положения. Проекция точки пересечения *K* (K_1) уже есть на комлексном чертеже. Вторую проекцию находим из условия принадлежности прямой *m*. Точка принадлежит прямой, если проекции точки принадлежат проекциям этой прямой. Определяем видимость при помощи конкурирующих точек. Но иногда видимость можно определить по представлению, не прибегая к методу конкурирующих точек (рис. 5.2.1.2).

5.2.2. Линия и поверхность.

Общее множество линии и поверхности – точки.Их количество зависит от порядка поверхности, от того имеем ли мы дело с полной поверхностью или с ее отсеком, с прямой или кривой линией.

Пример 1. Дано: Ф – коническая поверхность, *l* – прямая, $l \perp \Pi_2$ (рис. 5.2.2.1). Найти линию пересечения прямой с поверхностью конуса. Исходя из чертежа видим, что прямая *l* фронтально-проецирующая, следовательно фронтальная проекция ответа, а это две точки (входа и выхода прямой) – $A(A_2)$ и $B(B_2)$. Горизонтальные проекции этих точек ищем из условия их принадлежности поверхности конуса. Точки принадлежат конусу, если принадлежат либо образующим, либо окружностям, лежащих на поверхности конуса. В нашем случае мы использовали образующие. На горизонтальной проекции точки видимы. Часть проекции прямой между точками *A* и *B* находится внутри конуса, следовательно она невидима. На поле Π_2 фронтальная проекция точки *B* невидима.

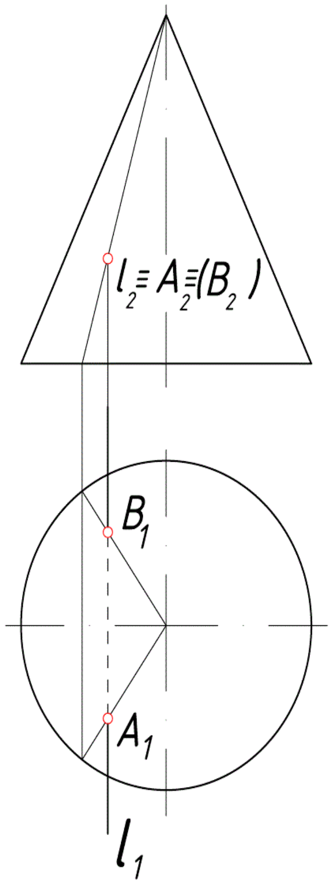


Рис. 5.2.2.1

5.2.3. Две плоскости

Общее множество двух плоскостей – прямая линия.

Пример 1. Дано Λ (m // n) – плоскость общего положения, Θ (Θ_2) – фронтально-проецирующая плоскость. Найти линию пересечения плоскостей. Одна проекция линии пересечения уже есть на фронтальной плоскости проекций – это линия l (l_2). Если прямая принадлежит плоскости, то она имеет с ней как минимум две общие точки – 1 и 2. Находим горизонтальные проекции точек и следовательно l (l_1) (рис. 5.2.3.1)

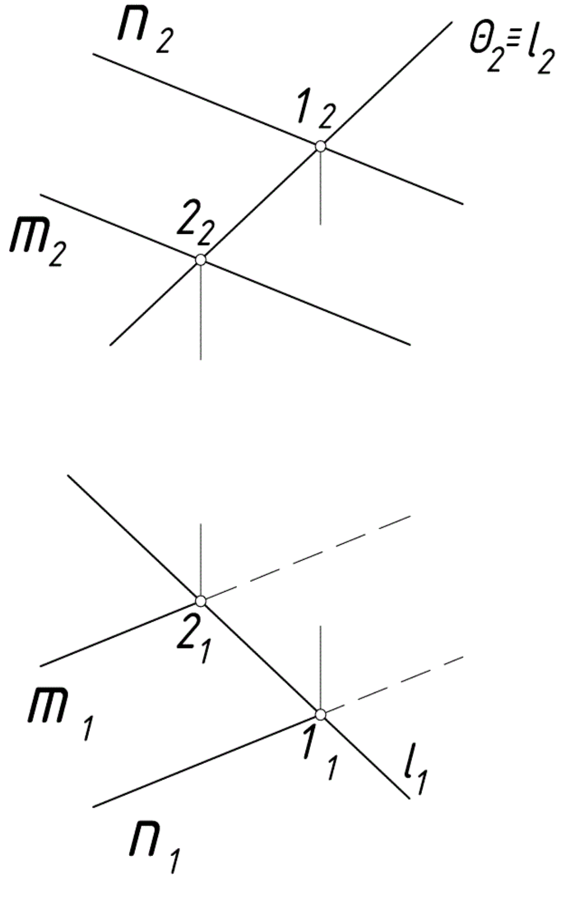


Рис. 5.2.3.1

5.2.4. Плоскость и поверхность

Общее множество плоскости и поверхности в общем случае кривая линия.

Пример 1. Дано: Ф – сфера и Θ – плоскость. Найти линию пересечения поверхностей.

Фронтально-проецирующая плоскость Θ пересекается со сферой по эллипсу, который на поле Π_2 спроецировался в прямую линию. Горизонтальную проекцию эллипса строим по точкам, исходя из принадлежности их сфере. Точка принадлежит сфере, если принадлежит окружности, лежащей на поверхности сферы.

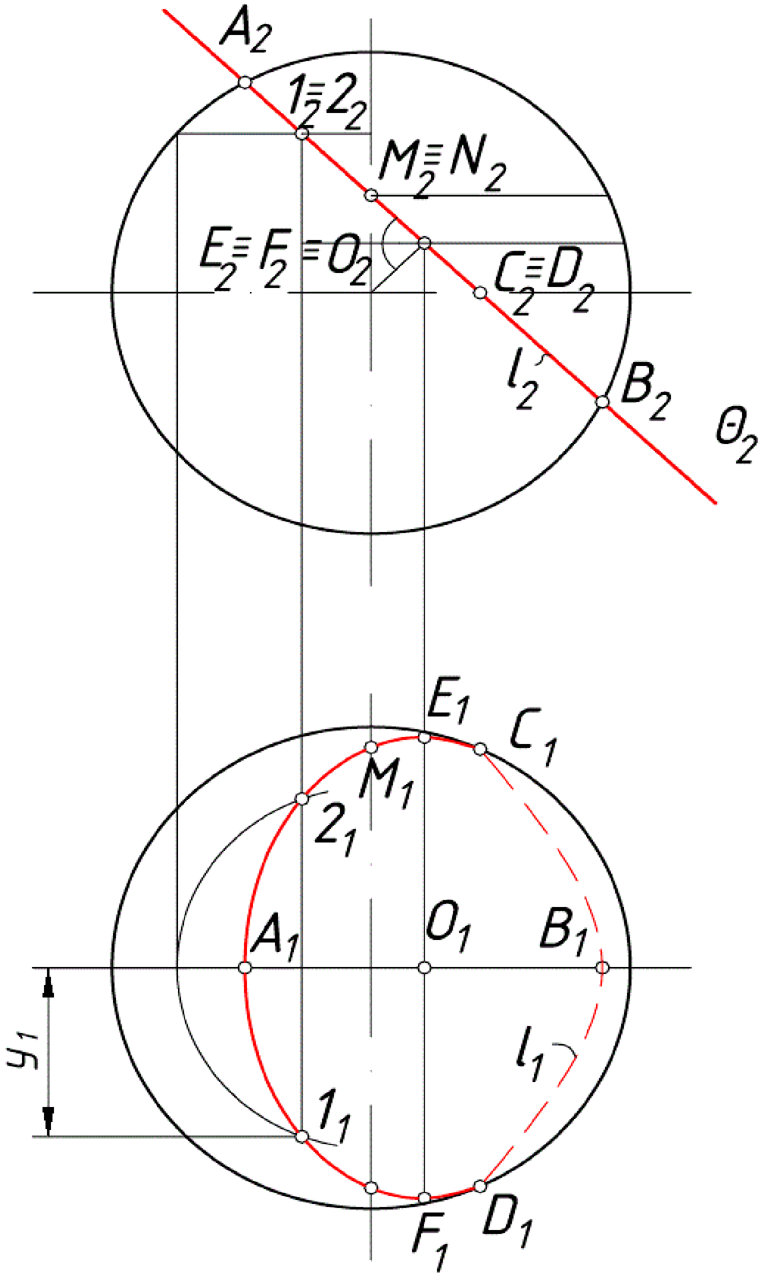


Рис. 5.2.4.1

Сначала строим проекции опорных точек – точек видимости *A, B, D, M, N* и *C*. Для построения случайных точек 1 и 2 используем окружности (рис. 5.2.4.1).

Пример 2. Дано Φ – призма и Γ ($m \cap n$). Найти линию пересечения поверхностей.

Призма перпендикулярна Π_1 – значит на поле Π_1 находится горизонтальная проекция ответа – это ломаная линия l (l_1). Фронтальную проекцию этой линии строим на основе принадлежности ее плоскости Γ (рис. 5.2.4.2).

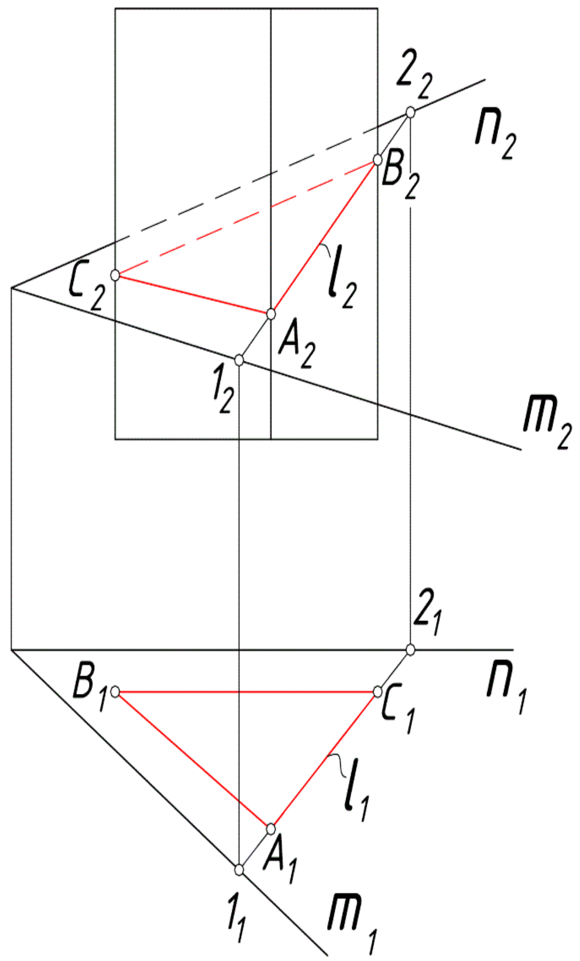


Рис. 5.2.4.2

5.2.5. Две поверхности

Общее множество двух поверхностей в общем случае кривая линия, которая можеит распадаться на два и более участков.

Дано: Ф – поверхность цилиндра

Θ – поверхность конуса (рис. 5.2.5.1).

Найти линию пересечения конуса и цилиндра.

Цилиндр фронтально-проецирующий, следовательно на фронтальной плоскости проекций есть одна проекция ответа. Она совпадает с фронтальной проекцией цилиндра. Обозначим опорные точки *A, B, C, D, M, N, E, F, K,* Тна поле $П_2$. Горизонтальные и профильные проекции этих точек находим из условия принадлежности их образующим и окружностям, лежащим на поверхности конуса.

Случайные точки 1, 2, 3, 4 найдены с помощью окружностей, проведенных на поверхности конуса.

Данные поверхности имеют общую плоскость симметрии – фронтальную плоскость *Г*. Поэтому горизонтальная и профильная проекции искомой кривой пересечения симметричны относительно соответствующих плоскостей $Г_1$ и $Г_3$.Определяем видимость линии пересечения и соответственно поверхностей в соответствии с расположением частей полверхностей относительно плоскостей проекций.

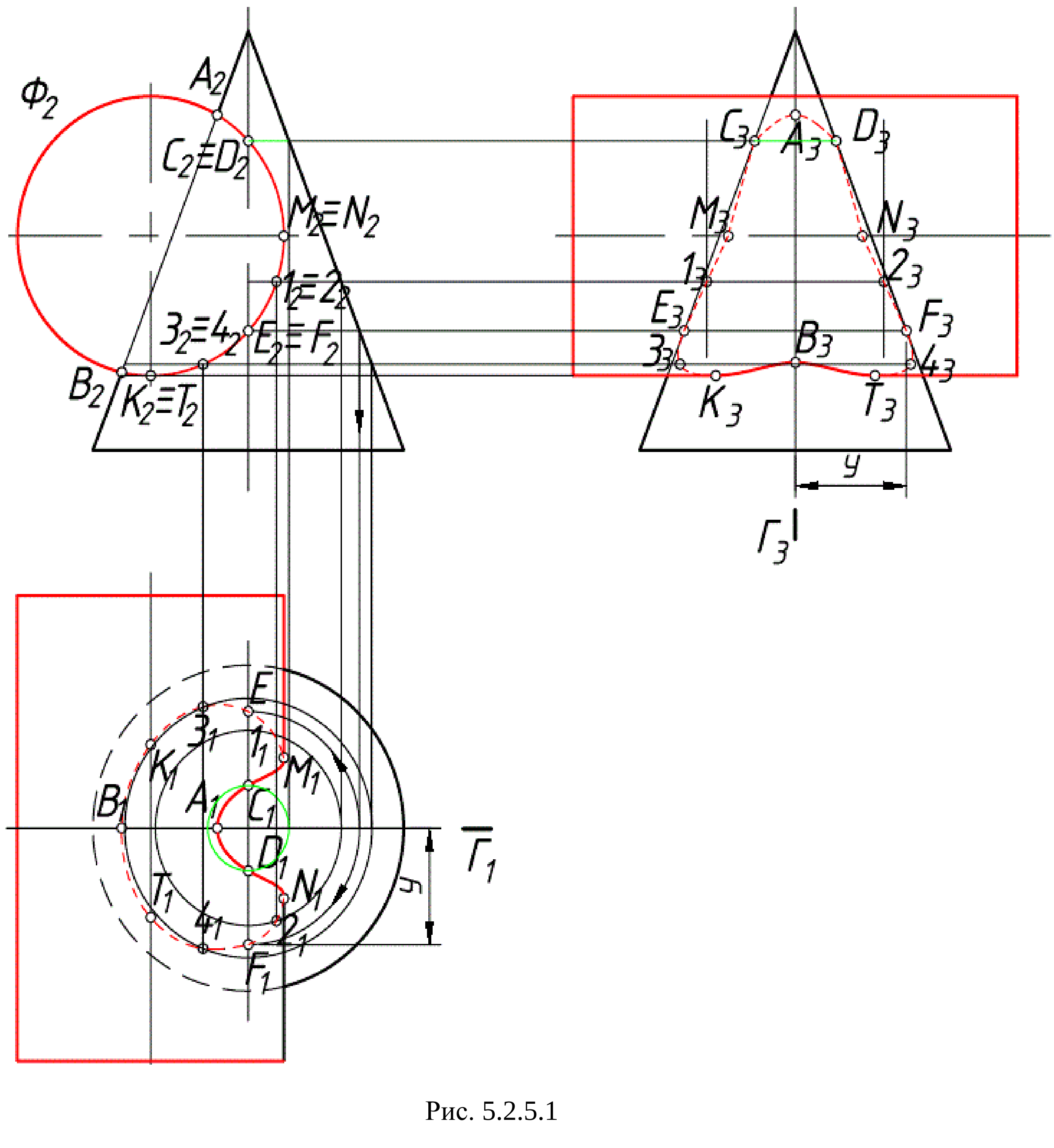


Рис. 5.2.5.1

Дано: *Ф* – четырехгранная правильная пирамида; *Δ* – прямой круговой цилиндр. Найти линию пересечения поверхностей. $Ф \cap Δ = 1;2;3;4;5;6;7;8$ (рис. 5.2.5.2).

Из двух поверхностей, представленных на чертеже одна является проецирующей – это прямой круговой цилиндр. Он перпендиукулярен горизонтальной плоскости проекций, следовательно на $П_1$ уже есть проекция линии пересечения. Она совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра.

Точка принадлежит пирамиде, если она принадлежит либо образующей, либо линии параллельной основанию, лежащих на поверхности пирамиды. Точки 1;2;3;4 принадлежат ребрам пирамиды, следовательно находятся на поле $П_2$ по линиям связи.

Через точки 5 и 6, которые лежат на очерковых образующих цилиндра проводим квадрат, параллельный основанию. Одновременно на этом квадрате лежат промежуточные точки (7; 8 и т.д.). Остальные промежуточные точки находятся аналогично предыдущим.

Соединяем точки по порядку замкнутой кривой линией. Линия будет полностью невидима, т.к. находится внутри пирамиды

На основании показанного примера выполняется упражнение расчетно-графической работы «Позиционные задачи» (рис. 5.2.5.2).

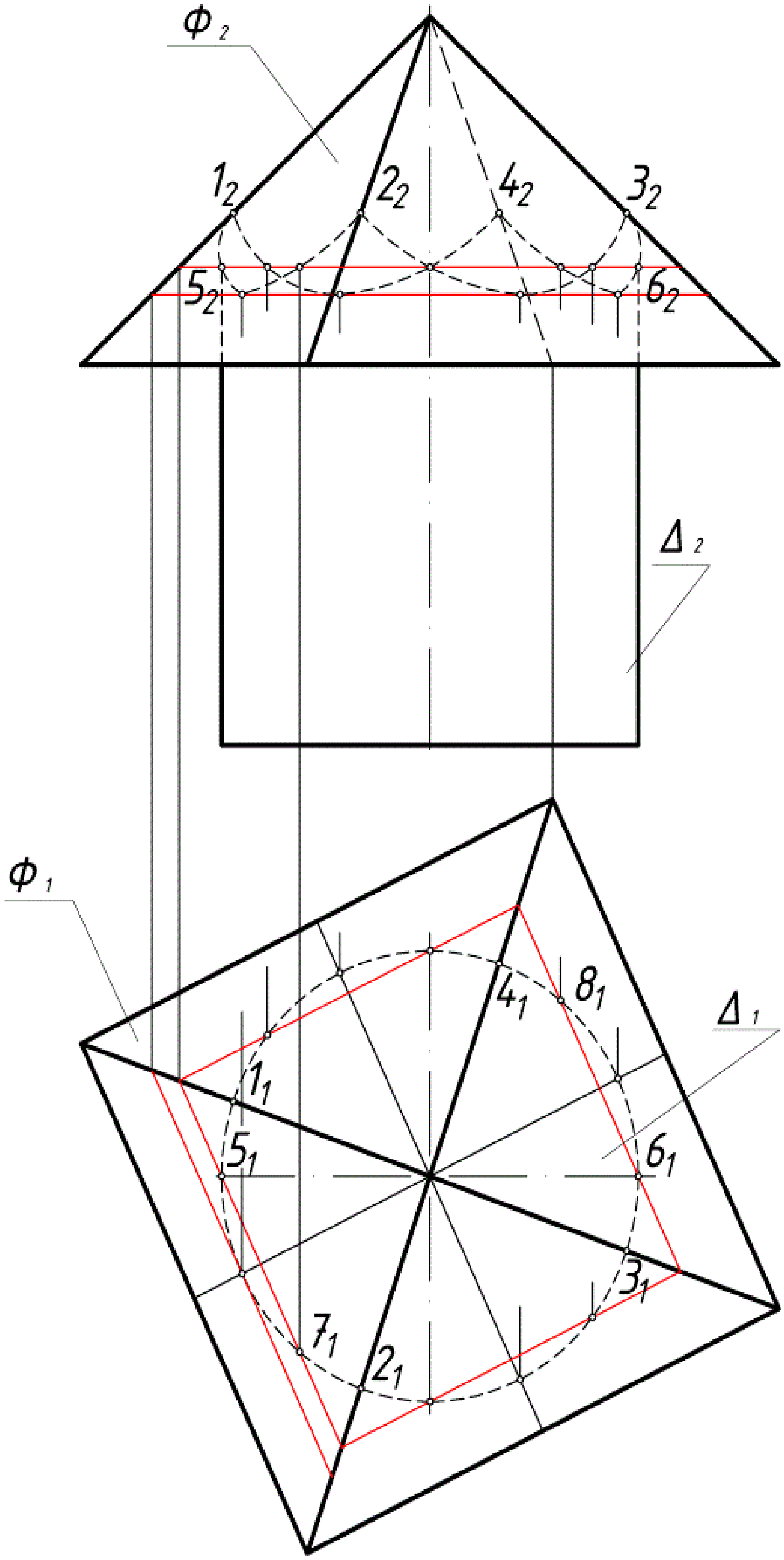


Рис. 5.2.5.2

Лекция 6

Позиционные задачи. Общие случаи пересечения (задачи 2 группы). Перечсечение прямой лдинии с плоскостью (поверхностью). Пересечение двух плоскостей.

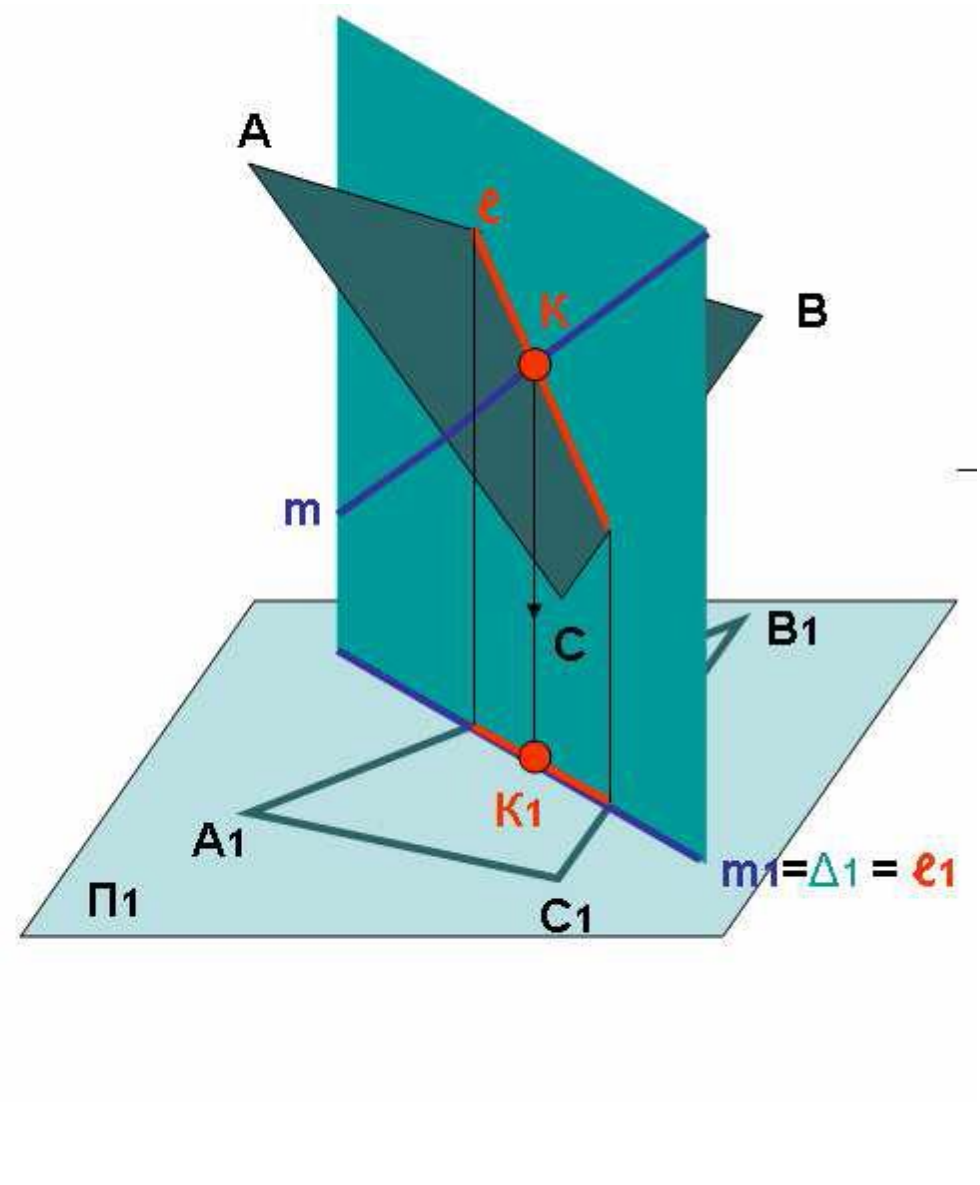
6.1. Общие случаи пересечения (задачи 2 группы)

6.2.1 Пересечение прямой линии с плоскостью (поверхностью)

Для графического определения точек пересечения прямой линии с поверхностью необходимо выполнить ряд геометрических построений (рис. 6.2.1.1).

1. Заключаем данную линию во вспомогательную секущую плоскость (поверхность) – l принадлежит Σ, Σ (Σ_2) перпендикулярна Π_2.
2. Определяем линию пересечения вспомогательной секущей плоскости (поверхности) с заданной плоскостью $m = \Sigma \cap \Theta$.
3. Отмечаем точки пересечения полученной линии пересечения m с заданной прямой l – отмечаем точку $K = l \cap m$.
4. Определяем видимость прямой относительно плоскости (поверхности).

Это алгоритм решения задачи, который является универсальным, т.е. пригодным для решения задач с любым вариантом исходных данных.



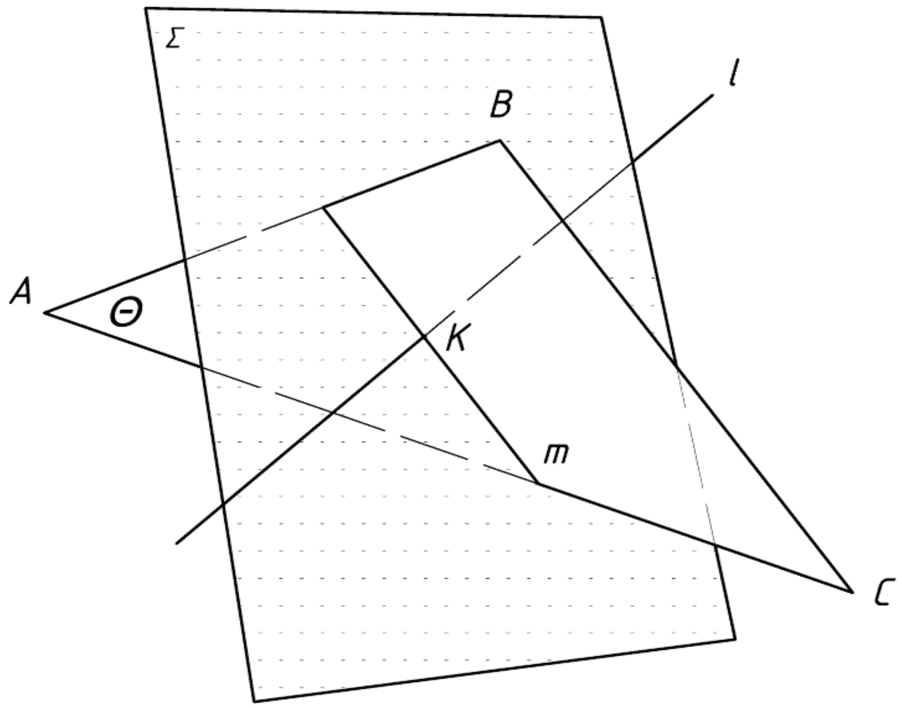


Рис.6.2.1.1

Пример 1. Дано: Θ (Δ *ABC*) и *l* (l_1; l_2). Оба геометрических элемента общего положения. Определить точку пересечения прямой *l* с плоскостью Θ (рис. 6.2.1.2).

Алгоритм решения задачи:

1. Через прямую *l* проводим вспомогательную секущую плоскость Σ (Σ_2).
   $l_2 \equiv \Sigma_2 \equiv n_2$, где *n* – фронтальная проекция линии пересечения плоскости Σ и Θ.
2. Находим горизонтальную проекцию линии пересечения двух плоскостей n_1.
   $\Sigma \cap \Theta = n\ (n_2, n_1)$
3. Находим точку пересечения полученной линии пересечения n и заданной линии *l*. $n\ (n_1) \cap l\ (l_1) = K\ (K_1, K_2)$

4. Определяем видимость прямой *l* относительно плоскости Θ при помощи конкурирующих точек. Видимость на Π_1: возьмем две горизонтально-конкурирующие точки $4_1 \equiv 3_1$, причем точка 4 принадлежит плоскости Θ, а точка 3 принадлежит прямой *l*. На поле Π_1 видна точка, расположенная выше, т.е. точка 4, а она принадлежит плоскости, следовательно, прямая от точки K_1 влево и вниз невидимая. Применим правило – если заданная плоскость восходящая, то видимость прямой на полях одинакова, для нисходящей плоскости – противоположна. Итак, от K_2 влево и вниз прямая видима.

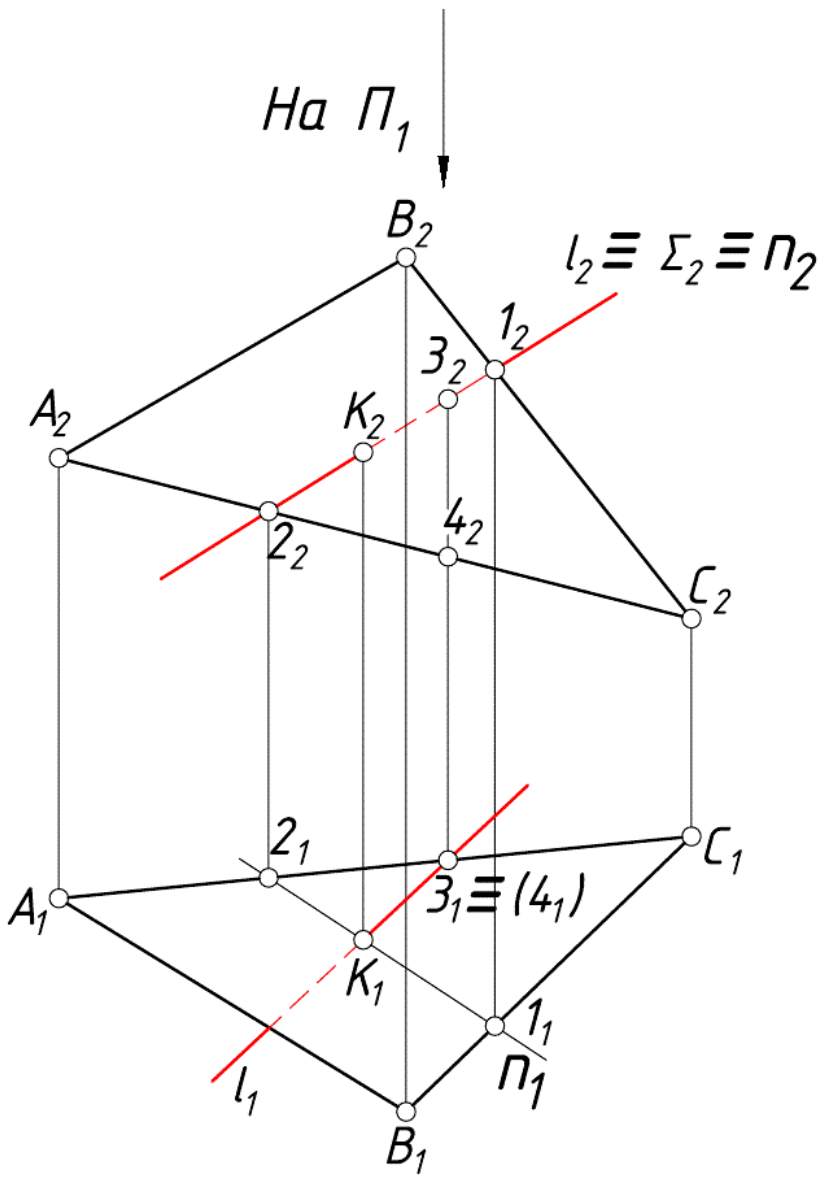


Рис.6.2.1.2

Пересечение прямой с поверхностью.

В алгоритме решения данной задачи в качестве вспомогательной секущей поверхности рекомендуется брать плоскость. Здесь возможны варианты решения, зависящие от вида поверхности и расположения прямой по отношению к поверхности или плоскостей проекций (рис. 6.2.1.3).

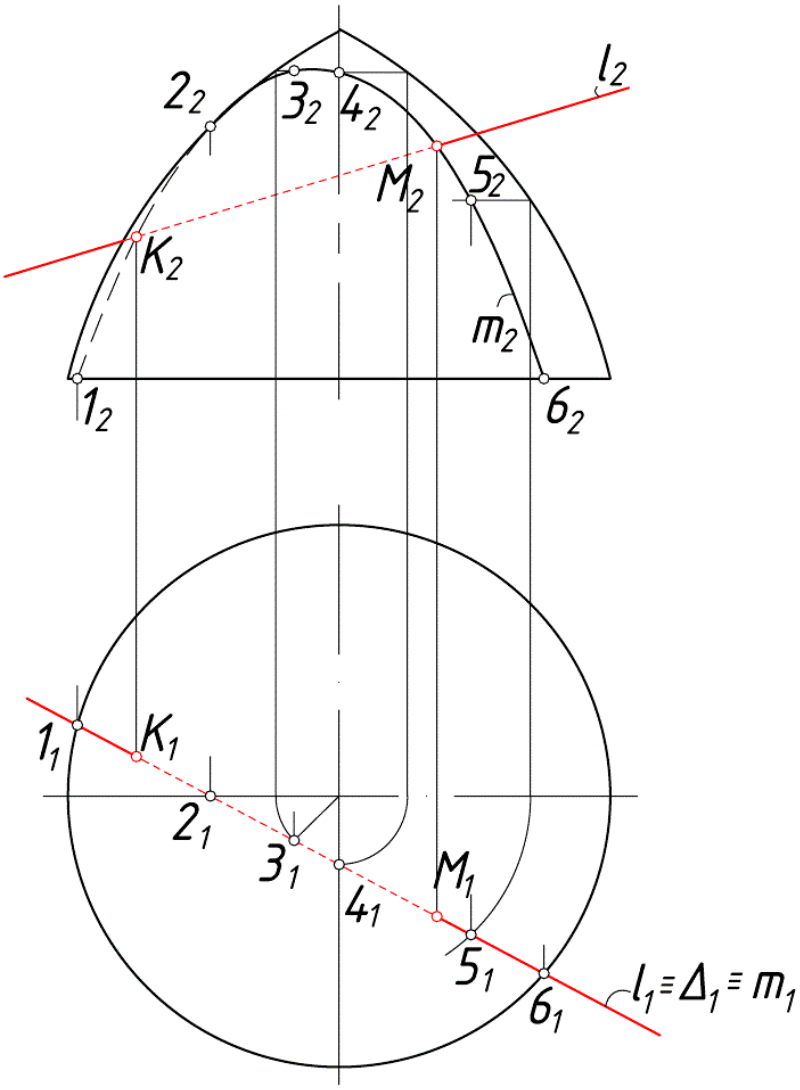


Рис. 6.2.1.3

Пример 2. Дано: Σ – поверхность вращения; *l* – прямая (рис. 6.2.1.3). Найти: $l \cap \Sigma = ?$

Оба пересекающихся элемента общего положения.

Алгоритм решения задачи:

1. Через прямую l (l_1) вводим вспомогательную секущую плоскость Δ (Δ_1). Вспомогательная секущая плоскость перпендикулярна Π_1.
   $\Delta_1 \equiv l_1$.
2. Находим линию пересечения вспомогательной секущей плоскости с заданной поверхностью Σ. $\Delta \cap \Sigma = m$ $(m_1 \rightarrow m_2)$.
3. Находим точки пересечения полученной линии пересечения **m** и заданной линии *l*.
   $m \cap l = K, M$.
4. Определяем видимость исходя из того, что сама прямая будет видима, если она пересекает поверхность в видимой точке линии пересечения. Участок прямой, находящийся внутри поверхности невидимый.

6.2.2. Пересечение двух плоскостей

При решении многих задач на пересечение двух плоскостей вспеомогательные секущие плоскости рационально проводить через прямые, задающие плоскость на комплексном чертеже.

Пример. Найти линию пересечения двух плоскостей общего положения. Дано: Λ (a ‖ b) и Θ (c ∩ d). Λ ∩ Θ = ? (рис. 6.2.2.1)

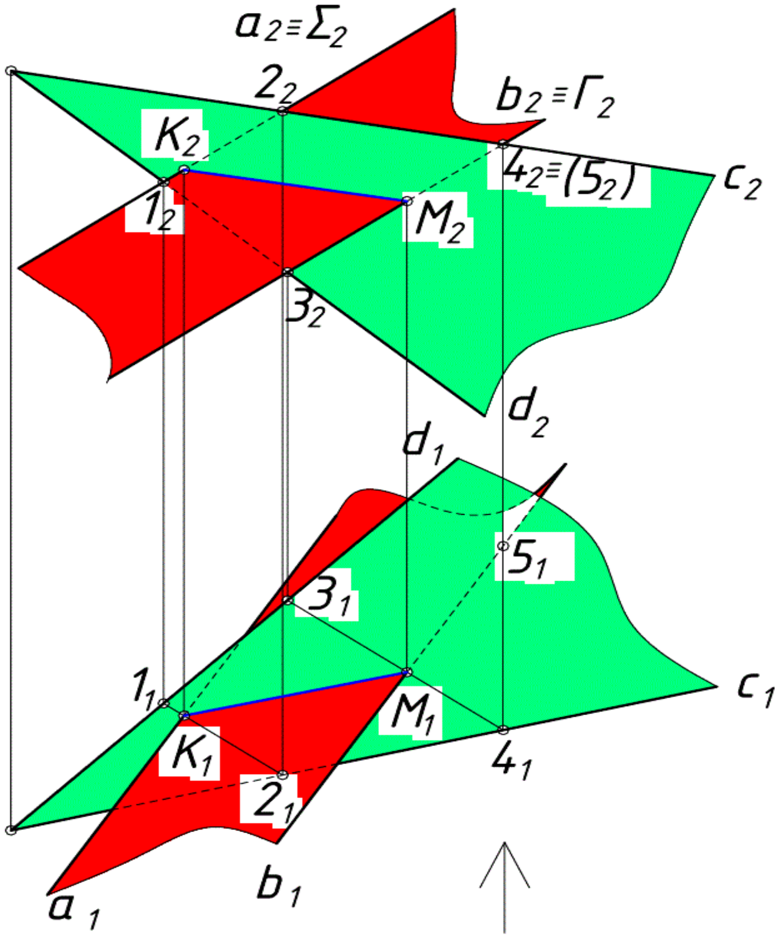


Рис. 6.2.2.1

Плоскости пересекаются по прямой, прямую можно построить по двум точкам, следовательно, для ее построения достаточно ввести две вспомогательные секущие плоскости Σ и Γ, которые совпадают с прямыми, a и b. Итак, алгоритм решения задачи:

1. Через прямые a и b проводим вспомогательные секущие плоскости, которые перпендикулярны плоскости $П_2$.
   $\Sigma \equiv a\ (a_2)$;
   $\Gamma \equiv b\ (b_2)$.
2. Находим линии пересечения вспомогательных секущих плоскостей с заданной плоскостью Θ.
   $\Sigma \cap \Theta = 1{,}2\ (1_2, 2_2 \rightarrow 1_1, 2_1)$;
   $\Gamma \cap \Theta = 3{,}4\ (3_2, 4_2 \rightarrow 3_1, 4_1)$.

3. Находим точки пересечения полученных линий пересечения 1,2 и 3,4 с данными прямыми a и b.
   1,2 ∩ a = K ($K_1 \rightarrow K_2$);
   3,4 ∩ b = M ($M_1 \rightarrow M_2$);
4. Определяем видимость при помощи конкурирующих точек.

Лекция 7

Позиционные задачи. Общие случаи пересечения (задачи 2 группы). Пересечение плоскости и поверхности. Пересечение поверхностей.

7.1. Пересечение плоскости и поверхности

Пример 1. Найти линию пересечения пирамиды с плоскостью общего положения. Дано: Ω (SABC); Θ (a ∥ b) (рис. 7.1.1). Найти Ω ∩ Θ = ?

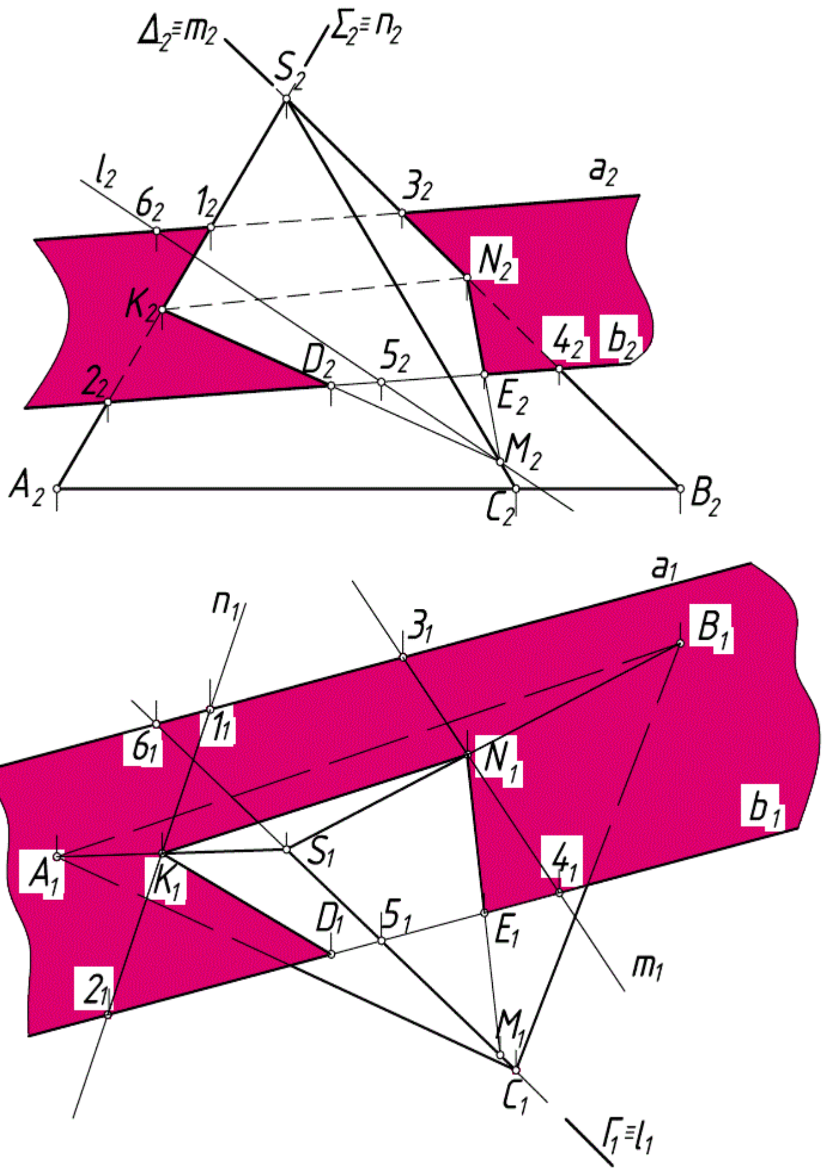


Рис. 7.1.1

Линия пересечения многогранника и плоскости – многоугольник, число вершин которого равно числу пересекаемых ребер. В данном случае рационально провести секущие плоскости через ребра пирамиды.

Алгоритм:

1. Σ (Σ_2) ≡ S*A* (S_2A_2); Σ перпендикулярна Π_2;
2. $\Sigma \cap \Theta = n$; $n_2 \equiv \Sigma_2 \equiv S_2A_2$;
3. $N \cap SA = K$ ($K_1 \rightarrow K_2$).

Остальные точки искомой линии пересечения определяем путем проведения аналогичных операций, введя секущие плоскости Δ через SB на поле Π_2 и Г через SC на поле Π_1.

4. Определяем видимость из условия, что прямая будет видимой, если она лежит на видимой грани пирамиды.

7.2. Пересечение поверхностей

Для решения задач по определению линии пересечения двух поверхностей в качестве вспомогательных поверхностей-посредников следует выбирать поверхности, которые пересекали бы заданные по графически простым линиям – прямым или окружностям.

Поэтому в качестве поверхностей-посредников используют плоскости или сферы.

Алгоритм решения задачи при помощи секущих плоскостей: (рис. 7.2.2)

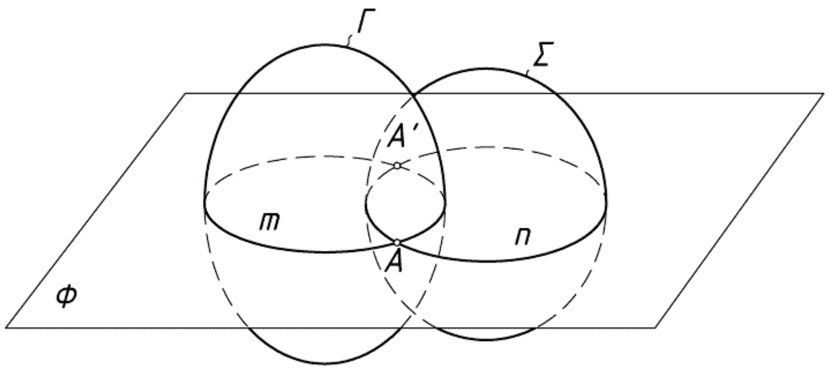


Рис. 7.2.2

1. Две заданные поверхности Г и Σ рассечем некоторой вспомогательной секущей поверхностью Ф таким образом, чтобы она рассекала их по графически простым линиям (окружностям).
2. Находим пересечение секущей плоскости Ф и поверхностей Г и Σ.
   $\Phi \cap \Gamma = m$; $\Phi \cap \Sigma = n$.
3. Находим точки пересечения полученных линий пересечения *m* и *n*.

$m \cap n = A, A'$.

Эти точки пересечения принадлежат одновременно обеим поверхностям, а, следовательно, линии их пересечения.

4. Повторяя эту операцию многократно, определим достаточное число точек, последовательно соединив которые получим линию пересечения поверхностей.
5. Определяем видимость поверхностей относительно друг друга.

Пример 1. Построить линию пересечения поверхностей вращения. Дано: Ψ – тор, Ω – сфера (рис.7.2.3)

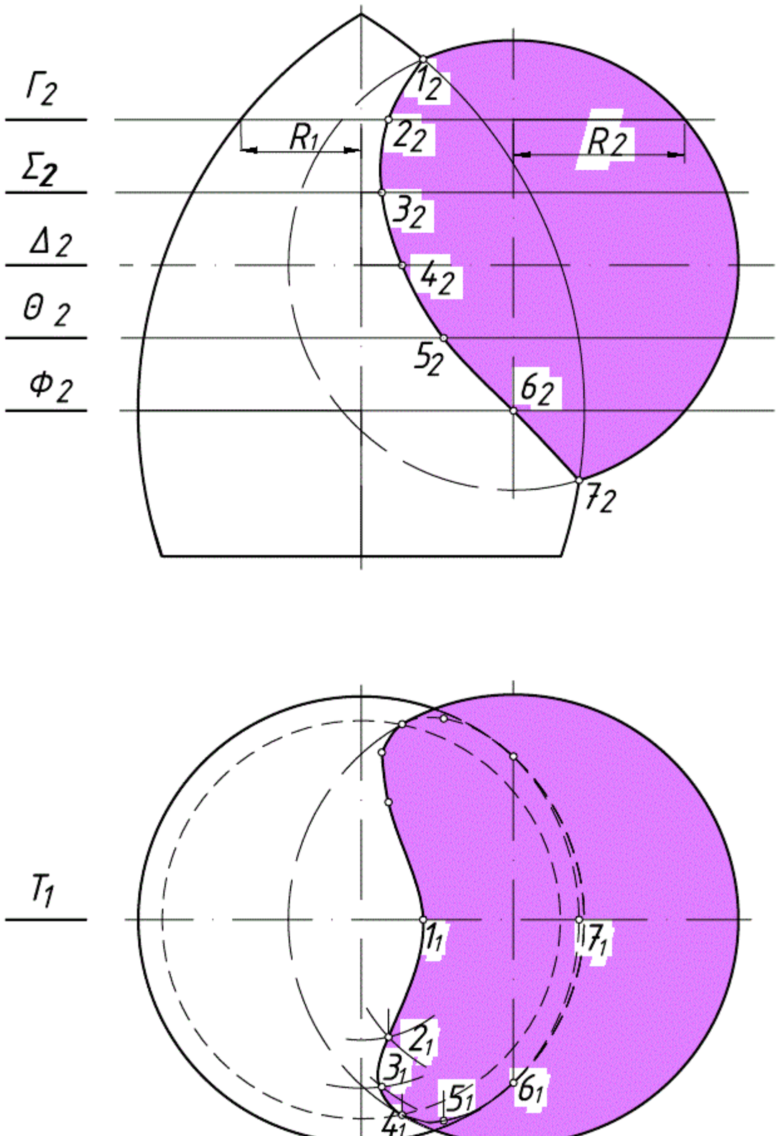


Рис. 7.2.3

1.Нахождение линии пересечения находим с определения опорных или характерных точек, для чего сначала вводим вспомогательную секущую плоскость через плоскость симметрии фигур на поле $П_1$. T_1 // $П_2$. Она рассекает поверхности по фронтальным очерковым образующим, которые пересекаясь между собой дадут точки $1(1_2)$ и $7\ (7_2)$.

2.Определяем точки видимости для поля $П_1$ для чего вводим вспомогательную секущую плоскость через плоскость симметрии сферы на поле $П_2$, т.е. через экватор. В итоге получим точки $4\ (4_1)$ которые определят видимость линии пересечения поверхностей на поле $П_1$ и соответственно видимость поверхностей.

3.Все остальные плоскости выбираются параллельно плоскости $П_1$ между точками 1 и 7. Все они пересекают поверхности по окружностям определенных радиусов.

$Г \cap \Psi$ – окружность радиуса R_1;

$Г \cap \Omega$ – окружность радиуса R_2.

Их пересечение дает точки 2.

Остальные точки 3,4,5,6 ищут аналогично.

Пример 2. Построить линию пересечения тора и сферы. Дано Φ – тор-лимон; Δ – сфера. $\Phi \cap \Delta$ =?

Оси поверхностей вращения расположены в одной плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций $П_2$. Линия пересечения имеет плоскость симметрии и на фронтальной плоскости проекций ее видимая часть совпадает с невидимой.

1.Вводим вспомогательную секущую плоскость параллельную плоскости $П_2$ через плоскость симметрии фигур для определения экстремальных точек и одновременно точек видимости на фронтальной плоскости проекций.

$Г \cap \Phi = m\ (m_1;\ m_2)$;

$Г \cap \Delta = f\ (f_1;\ f_2)$.

2.Находим точки пересечения полученных линий m (очерковая образующая тора) и f (главный меридиан сферы).

$m \cap f = A\ (A_2 \rightarrow A_1);\ B\ (B_2 \rightarrow B_1)$.

Точка A является высшей точкой кривой, точка B – низшей (рис.7.2.4, а).

Повторяем алгоритм еще раз:

1.Вводим вспомогательную секущую плоскость на фронтальной плоскости проекций через экватор сферы (рис. 7.2.4, б).

$\Sigma \cap \Phi = a(a_2 \rightarrow a_1)$; $\Sigma \cap \Delta = h\ (h_2 \rightarrow h_1)$.

2.Находим точки пересечения полученных линий пересечения, *a* (окружность на поверхности тора) и *h* (экватор сферы).

$a \cap h = C\ (C_1 \to C_2);\ D\ (D_1 \to D_2)$. Точки C и D являются точками видимости кривой на поле Π_1.

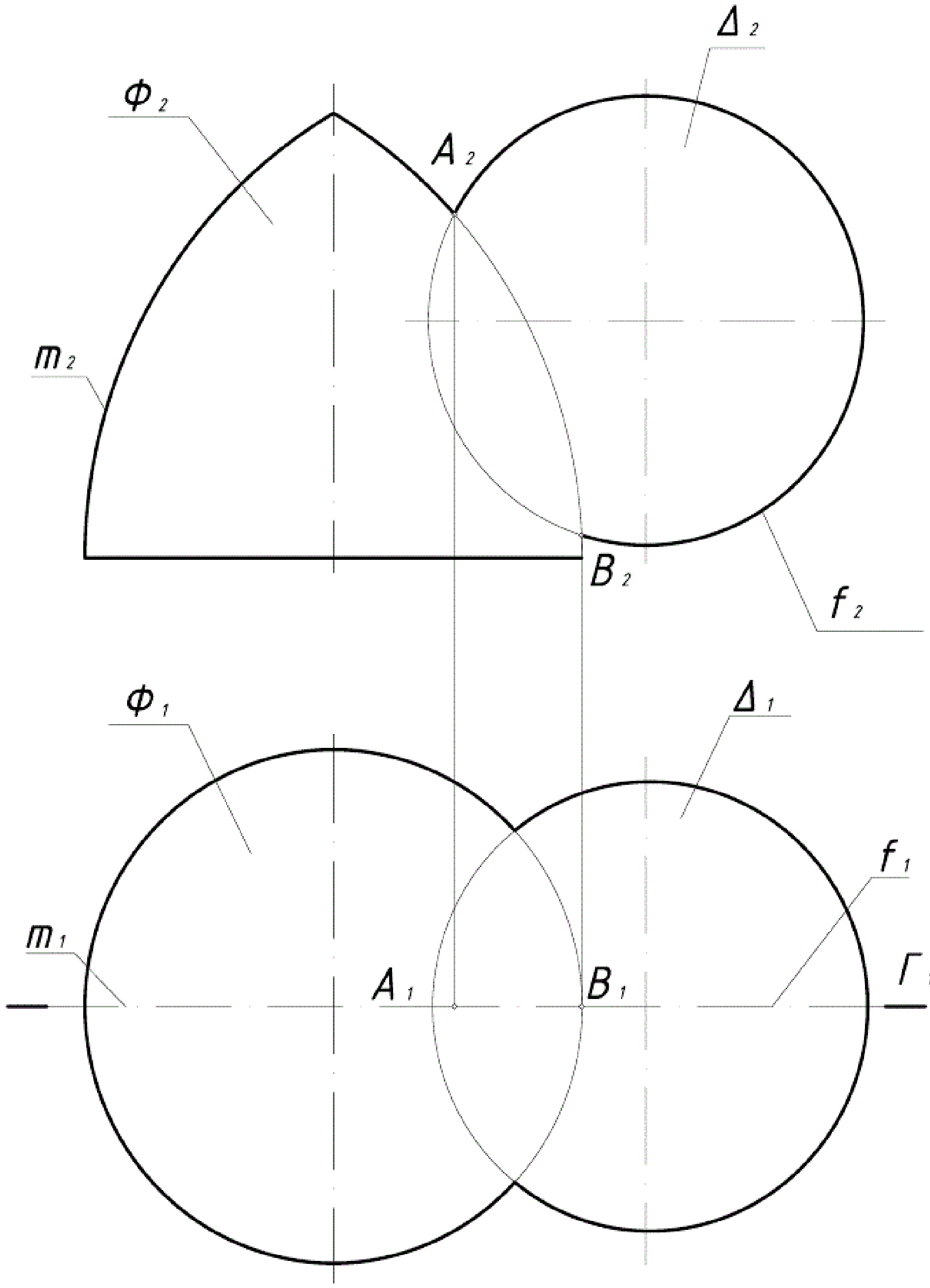


Рис. 7.2.4, а)

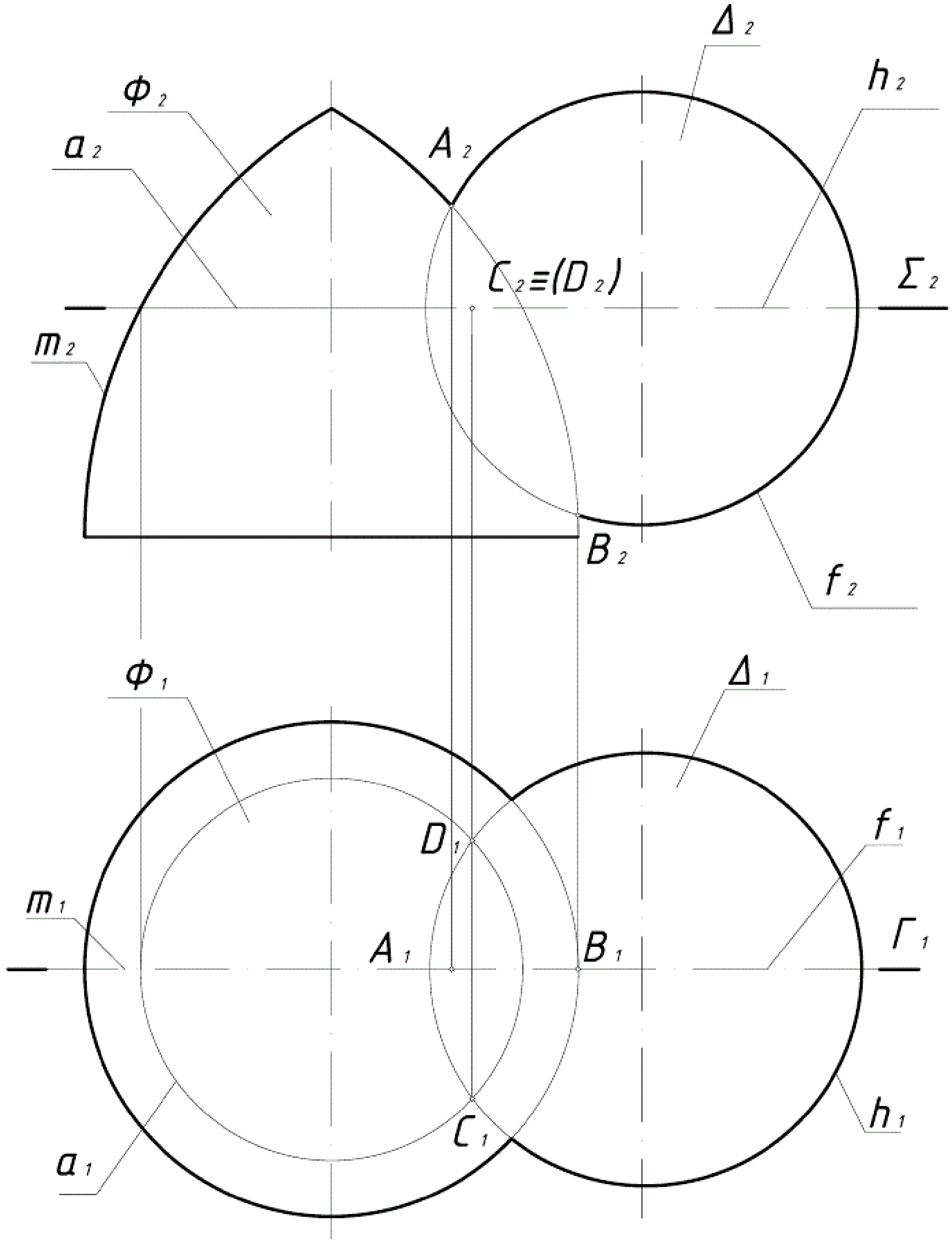


Рис. 7.2.4, б)

Все остальные точки являются промежуточными (случайными) и находятся с помощью вспомогательных секущих горизонтальных плоскостей уровня Θ и λ, проведенных в интервале между точками *А* и *В*.

Вспомогательная плоскость Θ рассекает тор по окружности b (b_1, b_2), а сферу по окружности с (c_1, c_2). Их пересечение определит точки 1 и 2 (1_1; 2_1) – промежуточные точки, фронтальные проекции которых находим по линии связи на проекциях окружностей b и c (b_2; c_2).

Аналогично определяем другие точки линии пересечения (плоскость λ, точки 3 и 4).

Определяем видимость линии пересечения. На фронтальной плоскости проекций видимая часть линии совпадает с невидимой. На горизонтальной плоскости проекций видна кривая от точек видимости C и D через точку A (рис. 7.2.4, в).

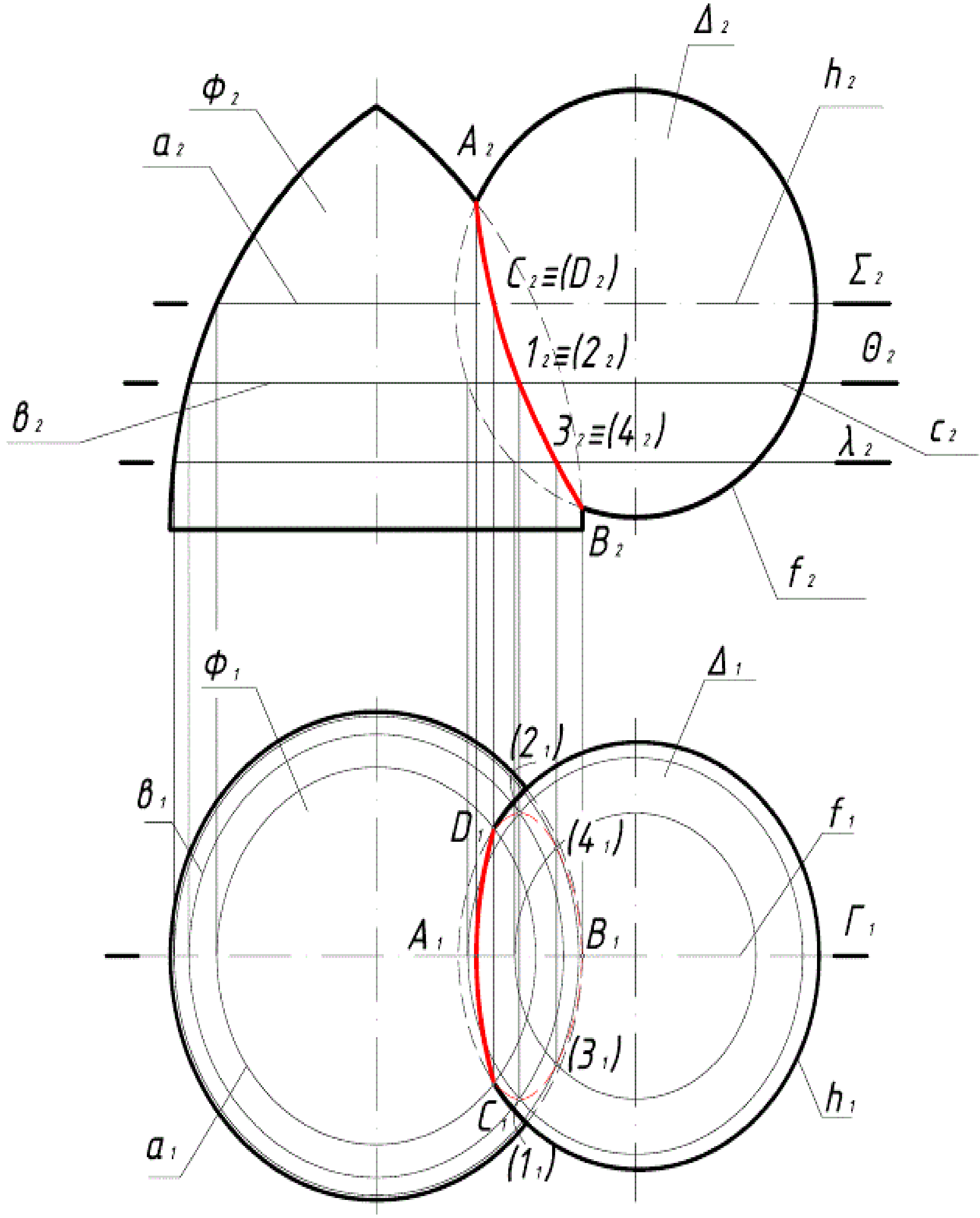


Рис. 7.2.4, в)

Лекция 8

Тени в ортогональных проекциях. Общие сведения. Положение источника света и направление световых лучей. Построение теней геометрических образов на плоскости проекций. Определение собственных теней. Тень от точки. Тени от линий общего и частного положения. Тени от плоскостей и поверхностей.

8.1 Общие сведения

В процессе архитектурного проектирования троят тени на плане и фасаде зданий для выявления их освещенности, для выявления рельефа будущего сооружения, для правильной оценки пропорций и глубин отдельных его элементов и для обнаружения в проекте композиционных ошибок.

Источником света при построении теней могут быть солнце, луна, лампа, фонарь и т.д.

Из-за большой удаленности солнца и луны от земли их принято считать бесконечно удаленными светящимися точками, а лучи, исходящие от них – параллельными друг другу. Освещение, исходящее от них, называется **солнечным.**

Освещение называется факельным, если источник света удален от объекта на незначительное расстояние. Лучи при этом образуют связку прямых.

Чаще всего построение теней осуществляется при параллельных световых лучах.

Введем следующие дополнительные обозначения:

L – источник света, l – световой луч.

Падающие тени точек, линий, поверхностей обозначаются теми же буквами, что и в натуре, с добавлением подстрочного индекса t и индекса 1, 2, 3, соответствующего плоскости проекций, на которой они построены.

$\Pi_1 \rightarrow A_{1t}, b_{1t}$

$\Pi_2 \rightarrow A_{2t}, b_{2t}$

Другие определения поясним следующим образом.

Пусть непрозрачная поверхность Ф (рис.8.1.1) освещается бесконечно удаленным источником света L. Световые луч параллельны.

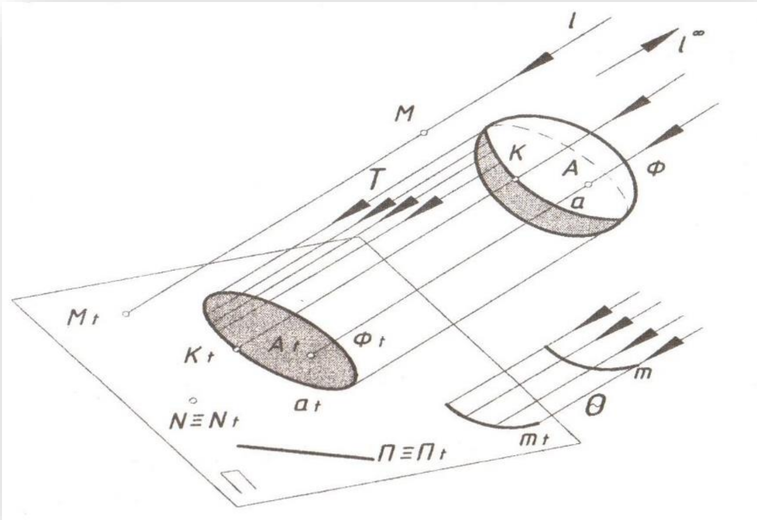


Рис. 8.1.1

Часть поверхности, обращенная в сторону источника света, освещена световыми лучами, которые, отражаясь от нее, изменяют свое направление. Часть поверхности, обращенная в противоположную сторону от источника света, находится в тени и называется собственной тенью поверхности.

Граница между освещенной частью поверхности и частью, находящейся в собственной тени, называется контуром собственной тени.

Световые лучи, не задержанные поверхность. *Ф*, освещают плоскость *П*. Лучи, задержанные и отраженные поверхностью *Ф*, не достигают плоскости *П* и на ней образуется неосвещенная часть. Эта неосвещенная часть и есть тень, отбрасываемая поверхностью *Ф* на плоскость *П*, которая называется падающей.

Граница между освещенной частью поверхности и частью, находящейся в падающей тени, называется контуром падающей тени.

Освещенная часть поверхности состоит из множества освещенных точек. Каждая точка задерживает один световой луч и отражает его, поэтому луч не достигнет другой поверхности.

Если продолжить луч, задержанный точкой *A*, принадлежащей поверхности *Ф* до пересечения с плоскостью П, то получим точку A_t, которая является тенью от точки *A*.

Тенью, падающей от точки на поверхность, является точка пересечения светового луча, проходящего через эту точку.

$A_t = l \cap П,\ K_t = l \cap П,\ M_t = l \cap П.$

Возьмем в пространстве линию mи построим от нее тень на плоскость П. Чтобы построить тень от линии на плоскость или поверхность, необходимо построить тени множества смежных точек этой линии (если она кривая). Световые лучи, проходящие через эти точки, образуют лучевую поверхность Θ.

Тенью, падающей от линии на поверхность, является линия пересечения поверхности с лучевой поверхностью, проходящей через эту линию.

$m_t = \Theta \cap \Pi$.

Если линия прямая, то лучевая поверхность будет плоскостью.

Если линия ломаная, то лучевая поверхность будет призматической.

Если линия кривая, то лучевая поверхность будет цилиндрической.

Чтобы построить падающую тень от поверхности на поверхность, достаточно построить контур падающей тени. Контур падающей тени получается при пересечении лучевой поверхности, которая обвертывает заданную, с данной плоскостью $a_t = T \cap \Pi$, где T – обвертывающая лучевая поверхность.

Линия соприкосновения обвертывающей лучевой поверхности отделяет освещенную часть поверхности от собственной тени и является контуром собственной тени.

Следовательно, контур падающей тени является тенью от контура собственной тени.

Если точка или линия лежат на поверхности, то тени от них на эту поверхность совпадают с самой точкой или линией.

Из изложенного следует, что задачи на построение теней геометрических образов сводятся к решению основных позиционных задач:

1. Построение точки пересечения прямой с поверхностью (тень от точки на плоскость; от точки на поверхность).
2. Построение линии пересечения двух поверхностей. Из всего многообразия этих задач выделим следующие случаи пересечения:

а) двух плоскостей (тень от прямой на плоскость);

б) плоскость с гранной поверхностью (тень от прямой на гранную поверхность, тень от ломаной линии на плоскость);

в) плоскости с кривой поверхностью (тень от прямой на кривую поверхность, тень от кривой лини на плоскость);

г) гранной поверхности с кривой поверхностью (тень от ломаной линии на кривую поверхность, тень от кривой линии на гранную поверхность, тень гранной поверхности на кривую поверхность, тень от кривой поверхности на гранную поверхность);

д) двух кривых поверхностей (тень от кривой линии на кривую поверхность, тень от кривой поверхности на кривую поверхность).

8.2. Положение источника света и направление световых лучей

Для построения тени необходимо знать положение источника света и направление световых лучей.

При ортогональном проецировании условно принято, что бесконечно удаленный источник света расположен сверху и сзади. При построении теней принято принимать за направление лучей направление, совпадающее с диагональю куба, грани которого совпадают с плоскостями проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$ (рис. 8.2.1).

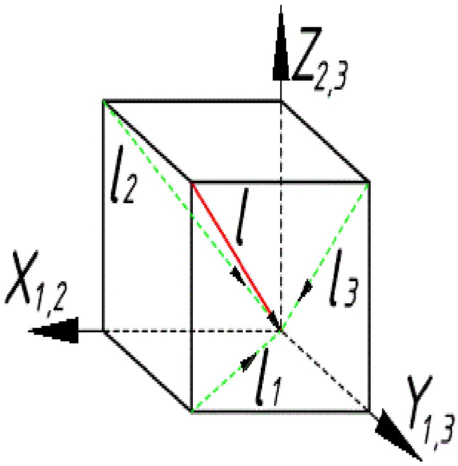


Рис. 8.2.1

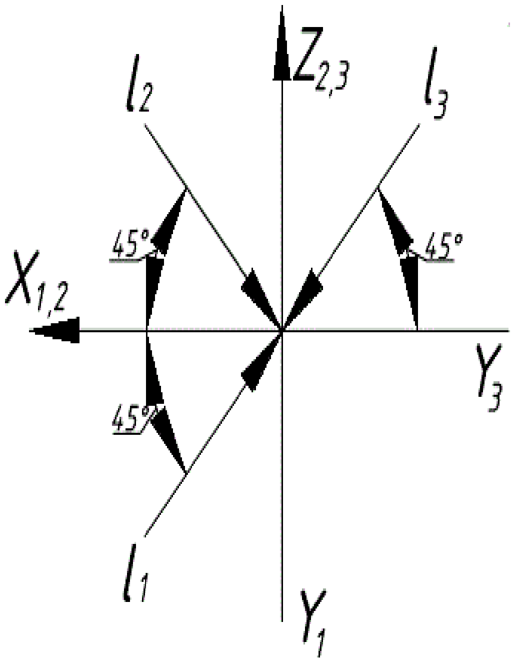


Рис. 8.2.2

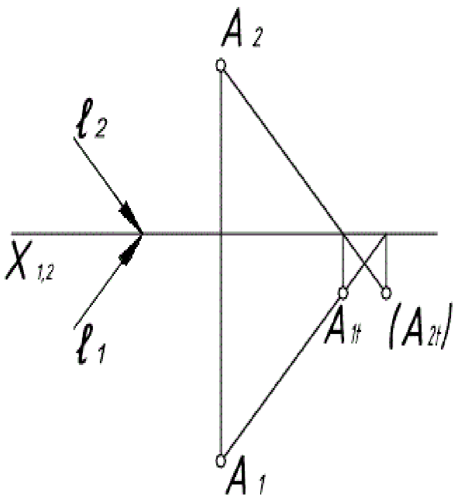
Угол наклона лучей к плоскости $П_1$ = 35°. Проекции светового луча совпадают с диагоналями граней куба и составляют с осями проекций углы 45° (рис. 8.2.2).

8.3. Построение теней геометрических образов на плоскости проекций. Определение собственных теней.

8.3.1. Тень от точки.

Тень, падающая от точки на поверхность, строится как точка пересечения поверхности со световым лучом, проходящим через данную точку.

Точка пересечения прямой с плоскостью проекций – есть след прямой. Чтобы построить тень от точки на плоскость проекций, необходимо построить видимый след светового луча.



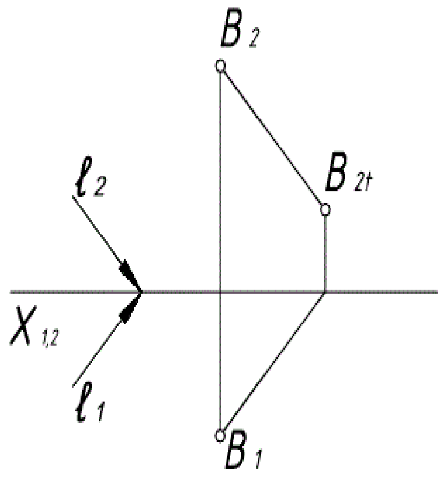


Рис.8.3.1.1 Рис. 8.3.1.2

На рис. 8.3.1.1, 8.3.1.2 построены тени точек *А* и *В*. Тень от точки *А* падает на плоскость $П_1$, т.к. видимый след луча горизонтальный. Тень от точки *В* падает на плоскость $П_2$, т.к. видимый след луча фронтальный.

Невидимый фронтальный след луча, проходящего через точку *А* – $А_{2t}$ называется мнимой тенью. Условимся заключать мнимую тень в скобки и строить только в необходимых случаях (рис. 8.3.1.1).

По расположению точки в пространстве можно определить на какую плоскость проекций падает от нее тень. Точка *А* ближе к $П_2$, тень от нее падает на $П_2$; точка *В* ближе к $П_2$, тень падает на $П_1$.

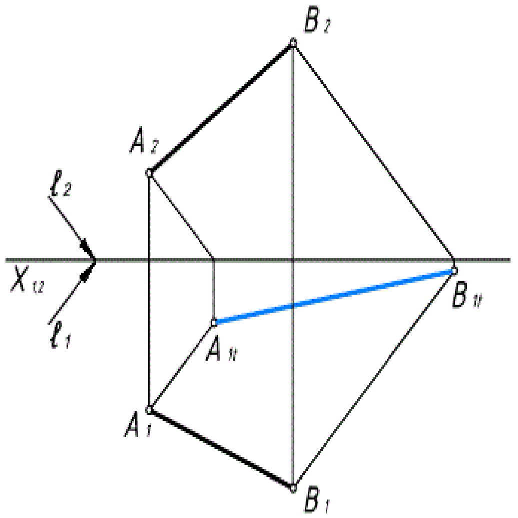
Тень от точки падает на ту плоскость проекций, к которой она ближе расположена.

8.3.2. Тени от линий общего и частного положения

Для построения тени от линии достаточно построить падающие тени от ряда ее точек и соединить их.

Если линия прямая, то достаточно построить тени двух ее точек и соединить их прямой линией.

- тень от прямой линии общего положения (рис.8.3.2.1)



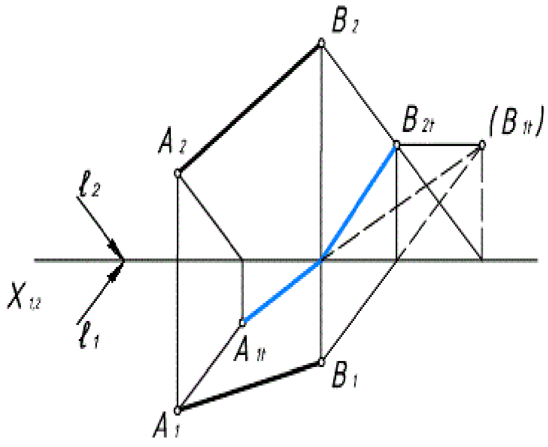


Рис. 8.3.2.1

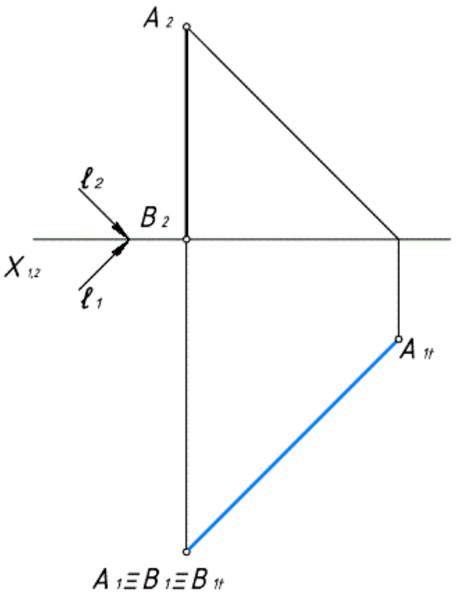
Рис.8.3.2.2

На рис. 8.3.2.2 рассмотрен пример, где тени от точек *A* и *B* падают на разные плоскости проекций. Точки, лежащие на разных плоскостях, нельзя соединить прямой линией.

Строим горизонтальный след луча, проходящего через точку *B* (B_{1t}), мнимую тень точки B на плоскость $П_1$. Прямая $A_{1t}\,(B_{1t})$ является тенью прямой *AB* на плоскость $П_1$. Но на плоскость $П_1$ тень падает только до оси X_{12}, где тень преломляется и падает на плоскость $П_2$

Из рассмотренного примера можно заключить, что тень от линии, падающая на пересекающиеся поверхности, имеет точку излома, лежащую на пересечении этих поверхностей.

- тень от проецирующей прямой (рис.8.3.2.3, 8.3.2.4)



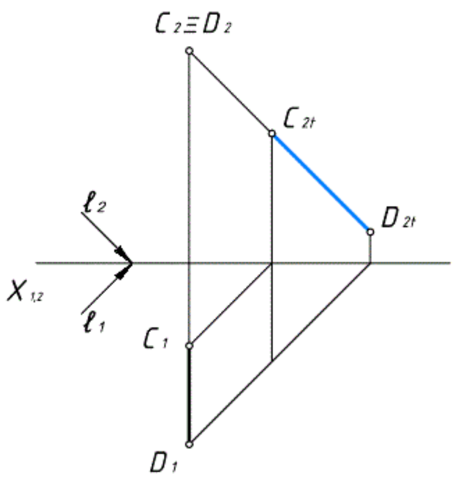


Рис.8.3.2.3

Рис. 8.3.2.4

Проекция тени, падающей от проецирующей прямой *1*, совпадает с проекцией светового луча на ту плоскость, которой она перпендикулярна.

- тень от линии уровня (рис.8.3.2.5)

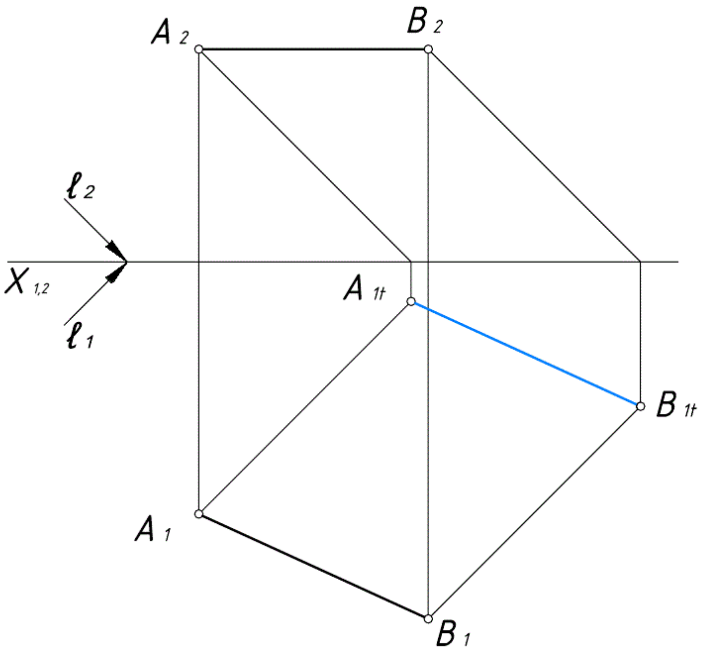


Рис. 8.3.2.5

Тень, падающая от линии параллельной плоскости проекций, равна и параллельна самой линии.

8.4. Тени от плоскостей и поверхностей

- тень от плоскости общего положения (рис. 8.4.1)

Тень любой плоской фигуры можно построить как совокупность теней характерных точек и линий, задающих эту фигуру на чертеже.

Пусть плоский треугольник *ABC* освещается световыми лучами. Ода сторона треугольника будет освещена, другая – в собственной тени. Чтобы определить освещенность плоскости, необходимо определить взаимное расположение световых лучей и плоскости. Возьмем на плоскости точку *M*, проведем к ней световой луч и определим видимость светового луча относительно плоскости, применив метод конкурирующих точек (рис.8.4.1). Сторона, к которой луч подходит с видимой стороны, освещена, а сторона, к которой луч подходит с невидимой стороны, в собственной тени. На рис.8.4.1 в собственной тени видимая сверху горизонтальная проекция.

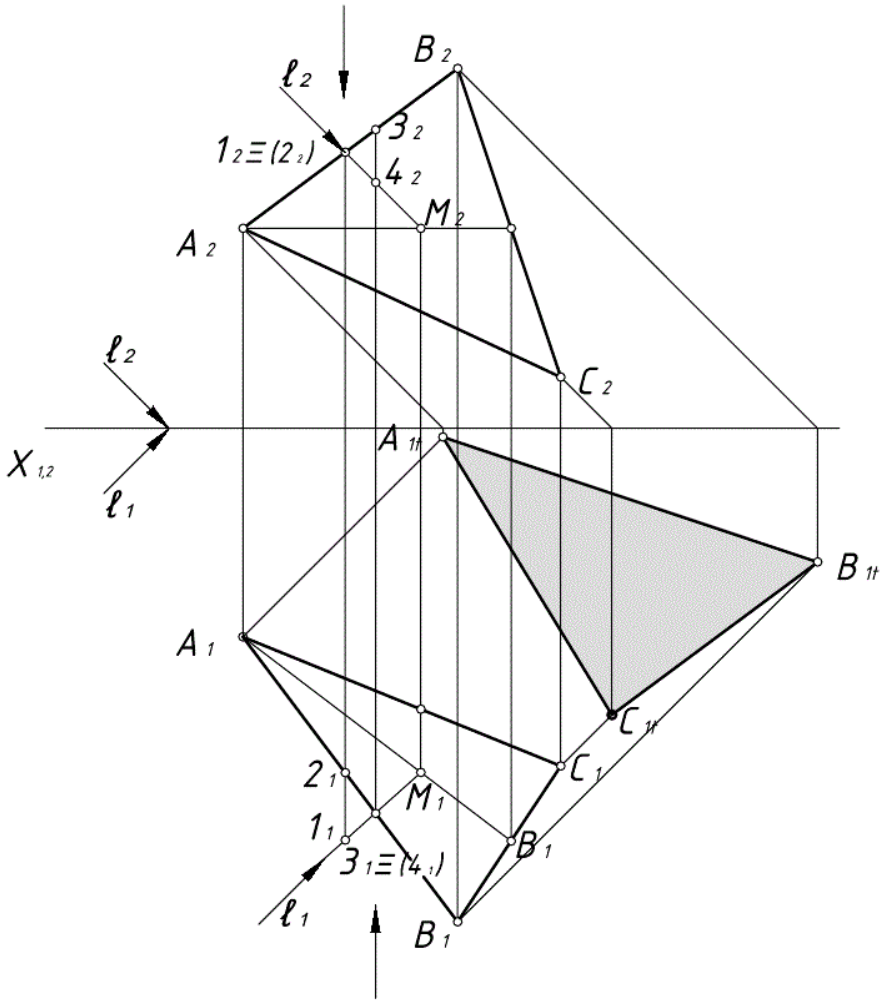


Рис.8.4.1

- тень от плоскости уровня (рис.8.4.2)

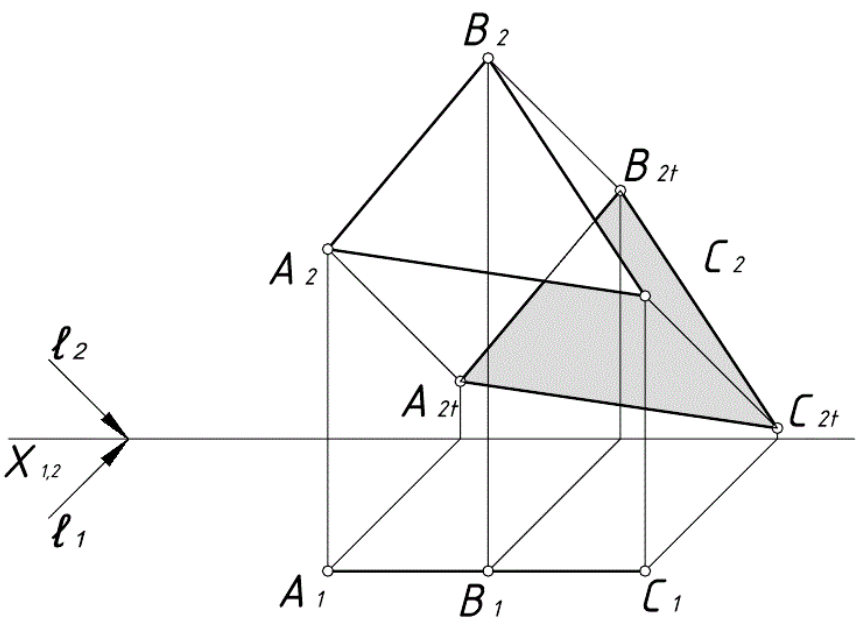


Рис.8.4.2

Контурные линии плоскости уровня являются линиями уровня, следовательно, тень, падающая от плоской фигуры на плоскость параллельную этой фигуре, тождественна самой фигуре.

- тень от призмы (рис. 8.4.3)

Возьмем колонну прямоугольного сечения.

Определим освещенность граней колонны (призмы). Верхнее основание призмы, передняя и левая боковые грани освещены. Задняя и правая боковые грани находятся в собственной тени. Нижнее основание принадлежит $П_1$ – оно само тень на плоскость $П_1$.

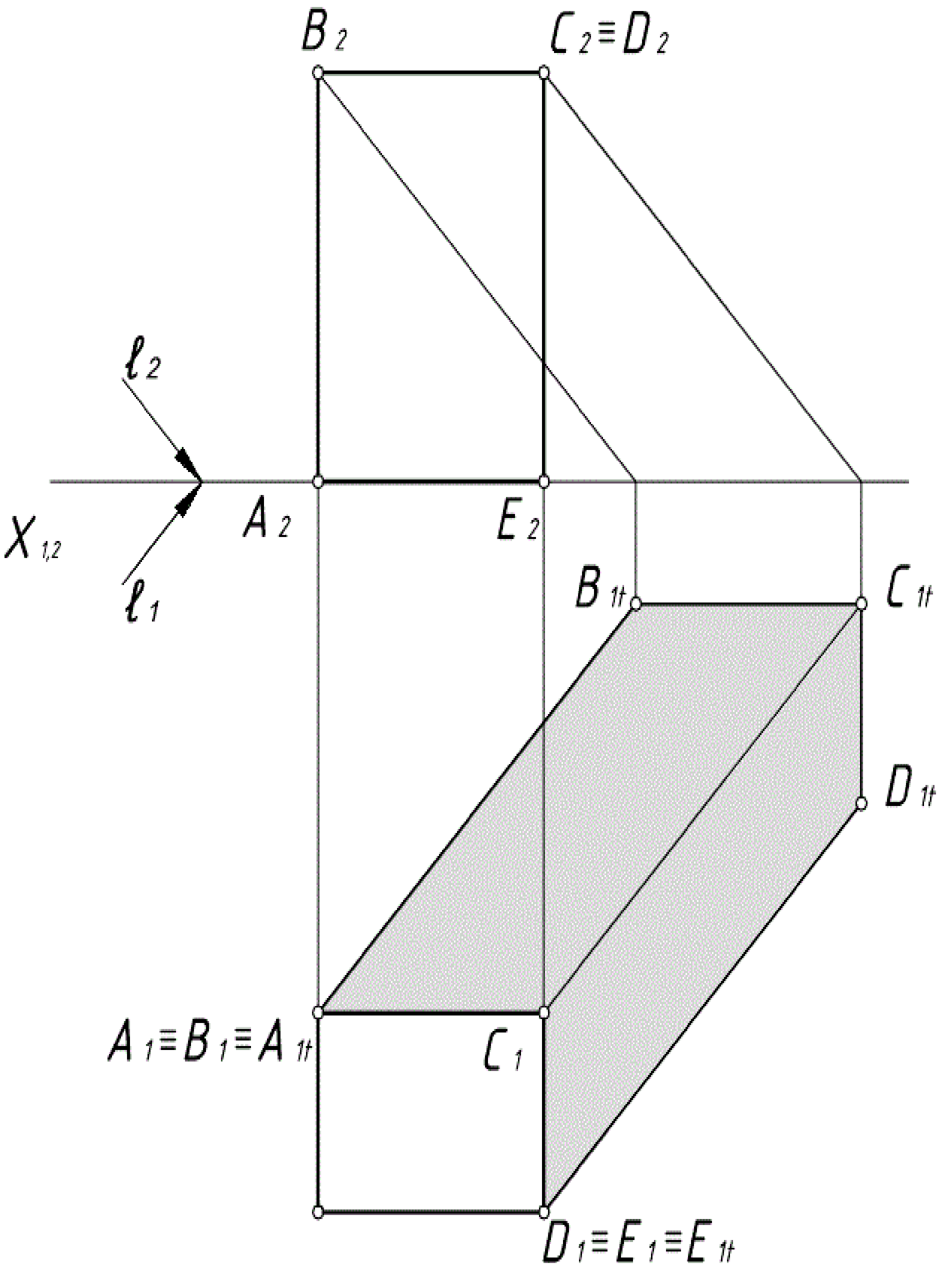


Рис. 8.4.3

- тень от пирамиды (рис. 8.4.4)

Тень от граней ограничена тенью от ребер S*A* и S*B*, следовательно, эти ребра являются контуром собственной тени. Таким образом, контур собственной тени определили по контуру падающей.

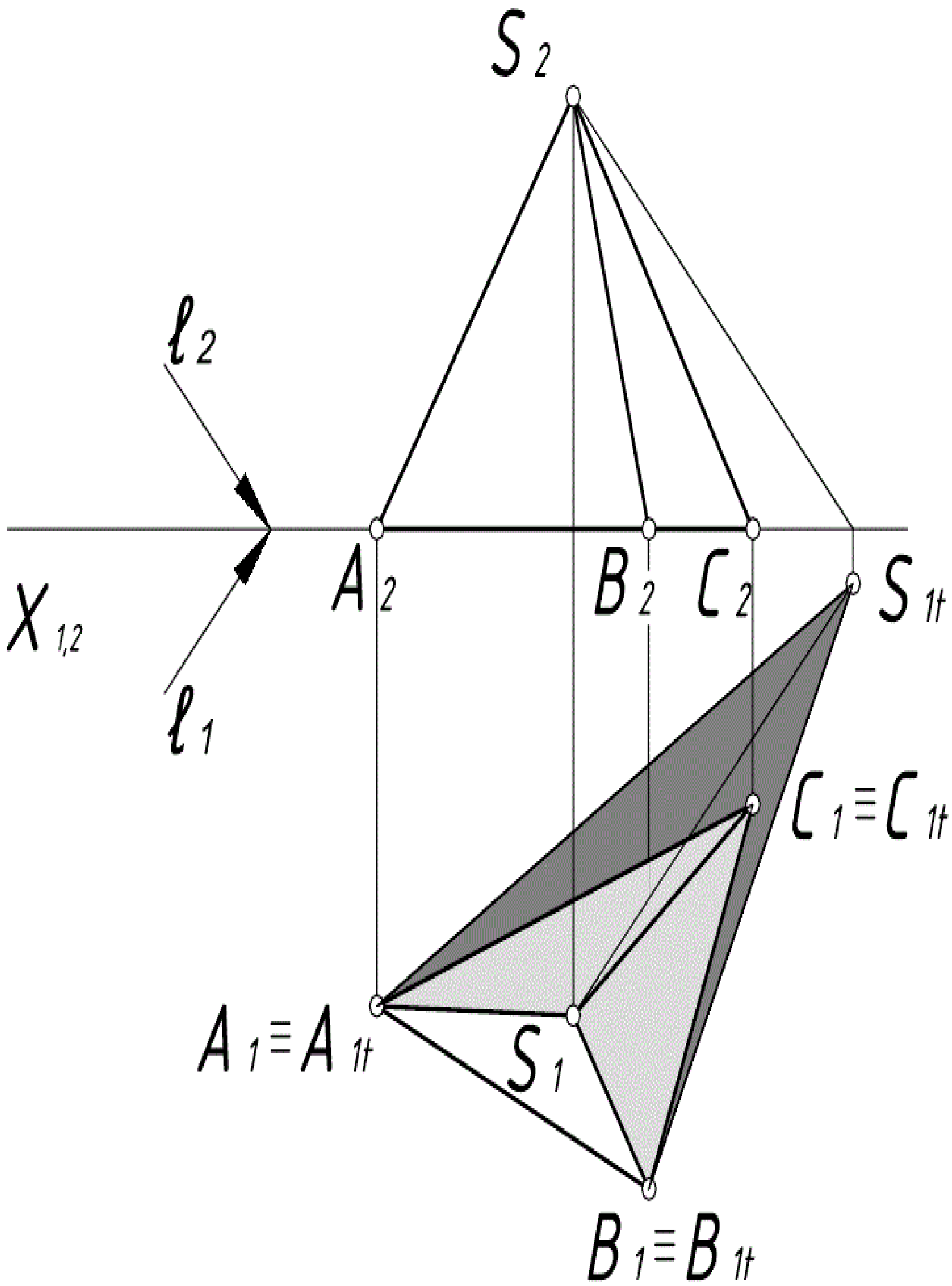


Рис.8.4.4

- тень от конуса (рис.8.4.5)

Строим падающую тень от вершины конуса на плоскость – S_{1t}. Касательные из этой точки к основанию конуса дают контур падающей тени. Одновременно точки касания определяют контур собственной тени конуса.

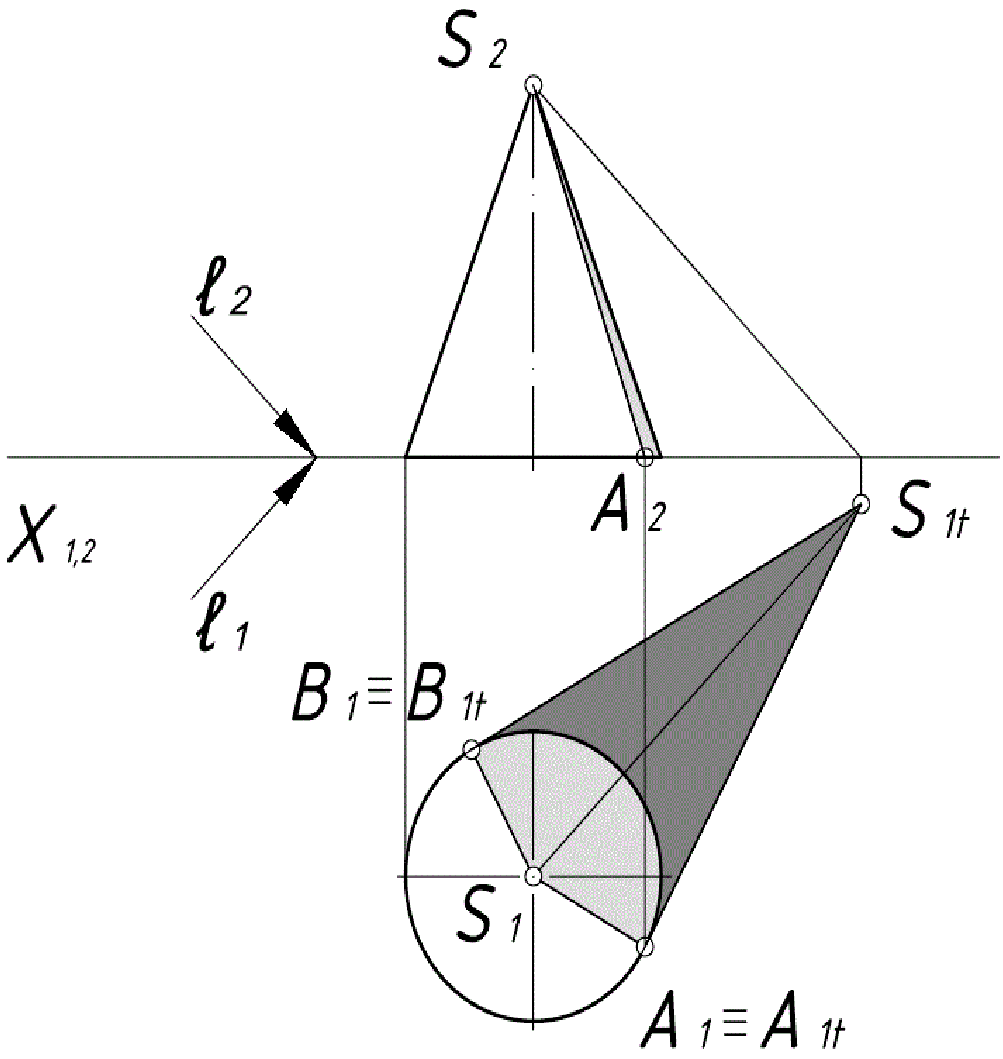


Рис.8.4.5

- тень от цилиндра (рис.8.4.6)

Строим тень от верхнего основания цилиндра и проводим касательные к тени нижнего основания. Тень верхнего основания – окружность, нижнего – само основание. Точки касания определяют контур собственной тени цилиндра.

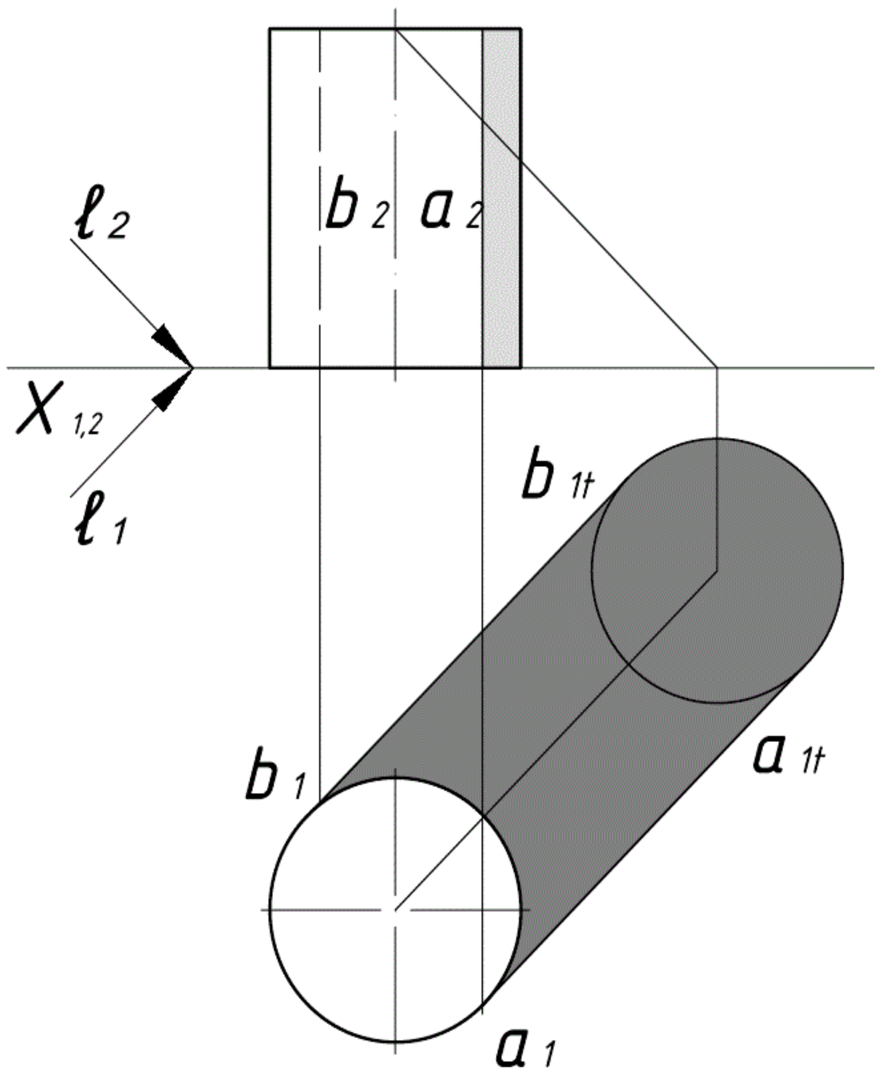


Рис.8.4.6

8.5. Построение теней, падающих от одних геометрических образов на другие

8.5.1. Тень от точки на плоскость.

Чтобы построить тень от точки на поверхность, необходимо решить задачу на пересечение прямой с поверхностью, следовательно, для решения этой задачи целесообразно воспользоваться методом секущих плоскостей. Прямая – это световой луч, проходящий через точку.

Построим тень от точки E на плоскость, заданную треугольником (рис.8.5.1.1)

а) через луч (прямую) проведем вспомогательную секущую плоскость Σ, которая перпендикулярна Π_2. $l_2 \equiv \Sigma_2$;

б) находим линию пересечения вспомогательной секущей плоскости с заданной плоскостью треугольника – это линия *1, 2*;

в) определяем точку пересечения полученной линии пересечения *1,2* и горизонтальной проекции луча (прямой) $l\ (l_1) \cap 1,2 = E_{1t} \rightarrow E_{2t}$.

Полученная точка является искомой тенью от точки *E* на плоскость, заданную треугольником.

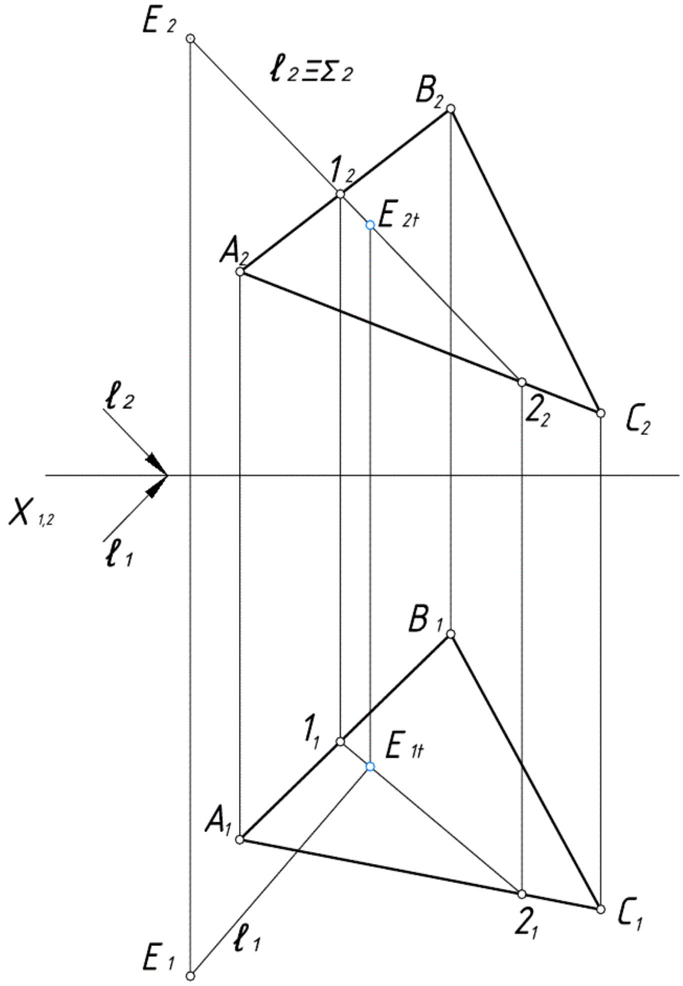


Рис. 8.5.1.1

8.5.2. Тень от точки на поверхность

Построим тень от точки на поверхность конуса, воспользовавшись методом секущих плоскостей:

а) проводим через горизонтальную проекцию луча $l\ (l_1)$ вспомогательную секущую плоскость $\Sigma\ (\Sigma_1)$;

б) находим линию пересечения вспомогательной секущей плоскости с поверхностью конуса – это линия *a* – гипербола.

в) определяем точку пересечения полученной линии пересечения *a* (гиперболы) с фронтальной проекцией луча *l* (l_2), в частности ее фронтальную проекцию E_{2t}, по линии связи определяем ее горизонтальную проекцию E_{1t}. Получаем тень от точки Е на поверхность конуса (рис.8.5.2.1).

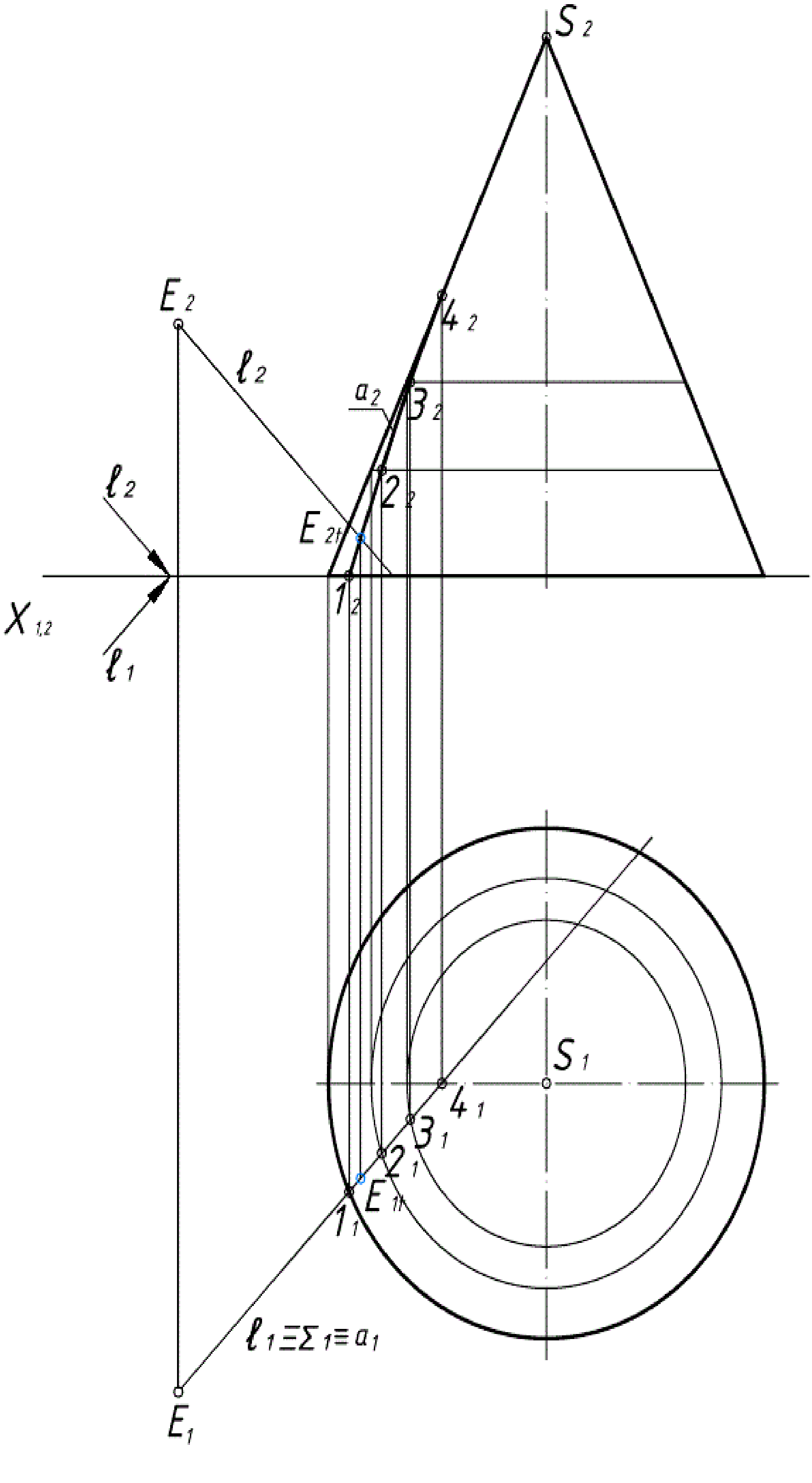


Рис. 8.5.2.1

8.5.3. Тень от прямой на поверхность.

Задача на построение тени от прямой на поверхность сводится к решению задачи на пересечение плоскости и поверхности.

Плоскость –лучевая, проходящая через прямую.

Если прямая общего положения, то и лучевая плоскость общего положения, если прямая проецирующая, то лучевая плоскость тоже проецирующая.

При построении тени от шеста, падающей на здание (рис.8.5.3.1), также использован метод секущих плоскостей. Решена задача в следующей последовательности:

- через прямую *АВ* проведена лучевая (секущая) плоскость *Σ*;

- лучевая плоскость пересекает стены и крышу здания по ломаной линии *1-2-3*.

- тень от вершины шеста попадает на эту линию;

- определяем тень от шеста на землю;

- строим собственную и падающую тени здания.

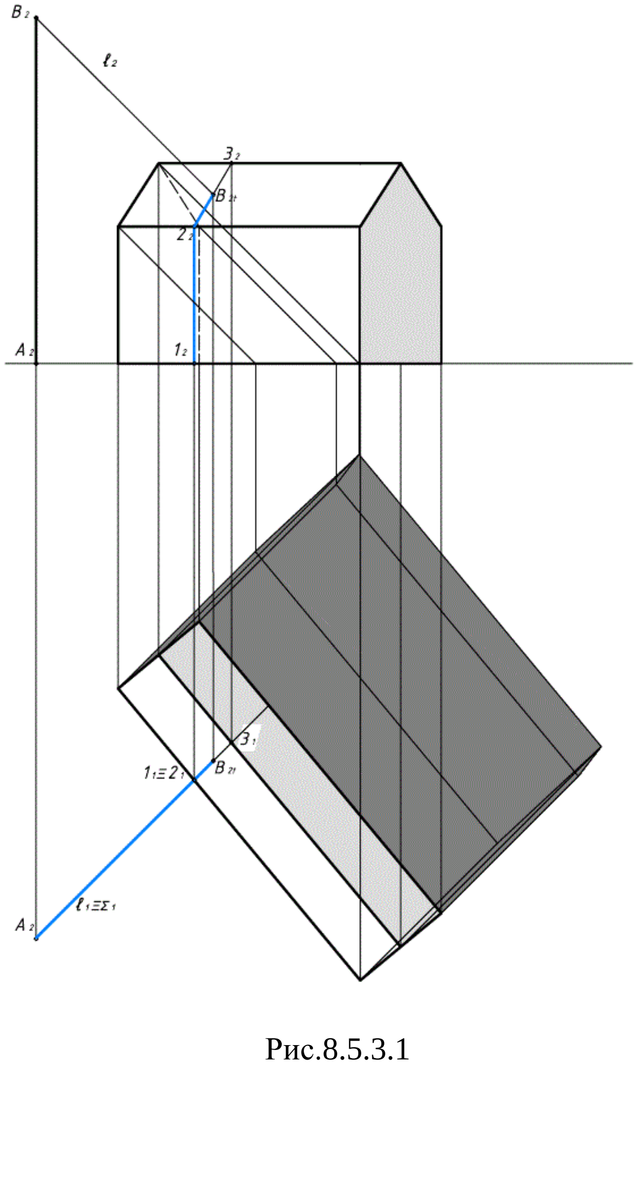


Рис.8.5.3.1

8.5.4. Метод обратного луча

Этот метод применяется для построения падающих теней от одной поверхности на другую и во многих случаях облегчает построения.

Обратным называется луч, параллельный световым лучам и идущий в обратном направлении (от падающей тени к источнику света).

Сущность способа обратных лучей – в определении точек пересечения контуров теней, падающих на землю или на стену, с последующим возвращением этих точек на заданные фигуры или поверхности.

Пусть требуется построить тень от отрезка m, падающую на треугольник *ABC* (рис. 8.5.4.1). Находим тени, падающие на землю от треугольника и отрезка и отмечаем точку пересечения падающих теней (M_{1t} и K_{1t}). Из точек M_{1t} и K_{1t} проводим обратные лучи до пересечения со сторонами треугольника в точках *M* и *K*. Отрезок *MK* – это искомая тень от прямой *m* на треугольник.

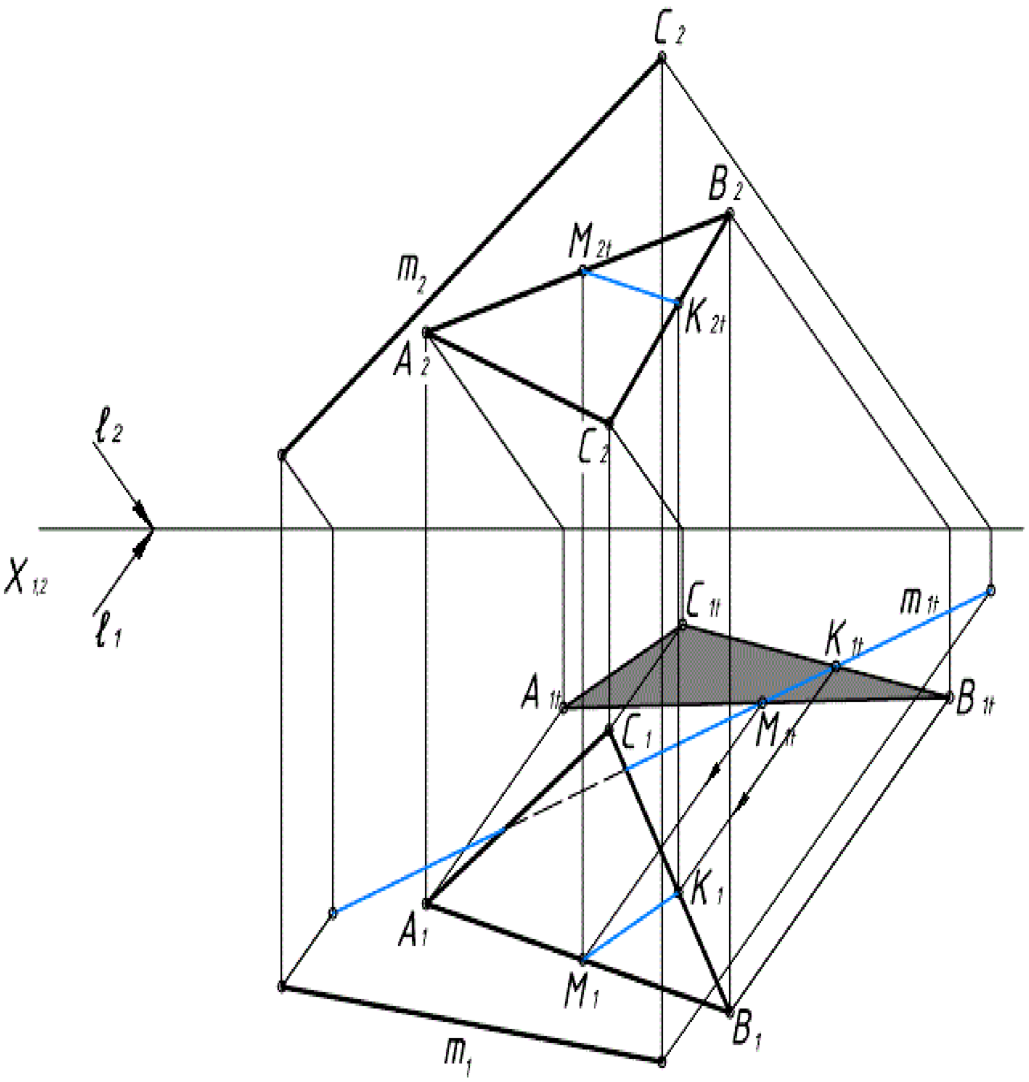


Рис. 8.5.4.1

8.5.5. Тени, падающие от поверхности на поверхность

Пример 1. Построим тень от трубы на плоскость крыши (рис.8.5.5.1).

Тень от трубы на плоскость крыши построена как тень от контура собственной тени.

Прямые *AB, BC, CD, DE* определяют контур собственной тени.

AB и *DE* горизонтально-проецирующие прямые, горизонтальные проекции теней которых совпадают с направлением световых лучей. Фронтальные проекции построены из условия принадлежности теней плоскости крыши. *BC* – прямая, параллельна плоскости крыши, следовательно, тень от нее падает параллельно самой прямой. *CD* – фронтально-проецирующая прямая, фронтальная проекция тени от нее совпадает с направлением световых лучей.

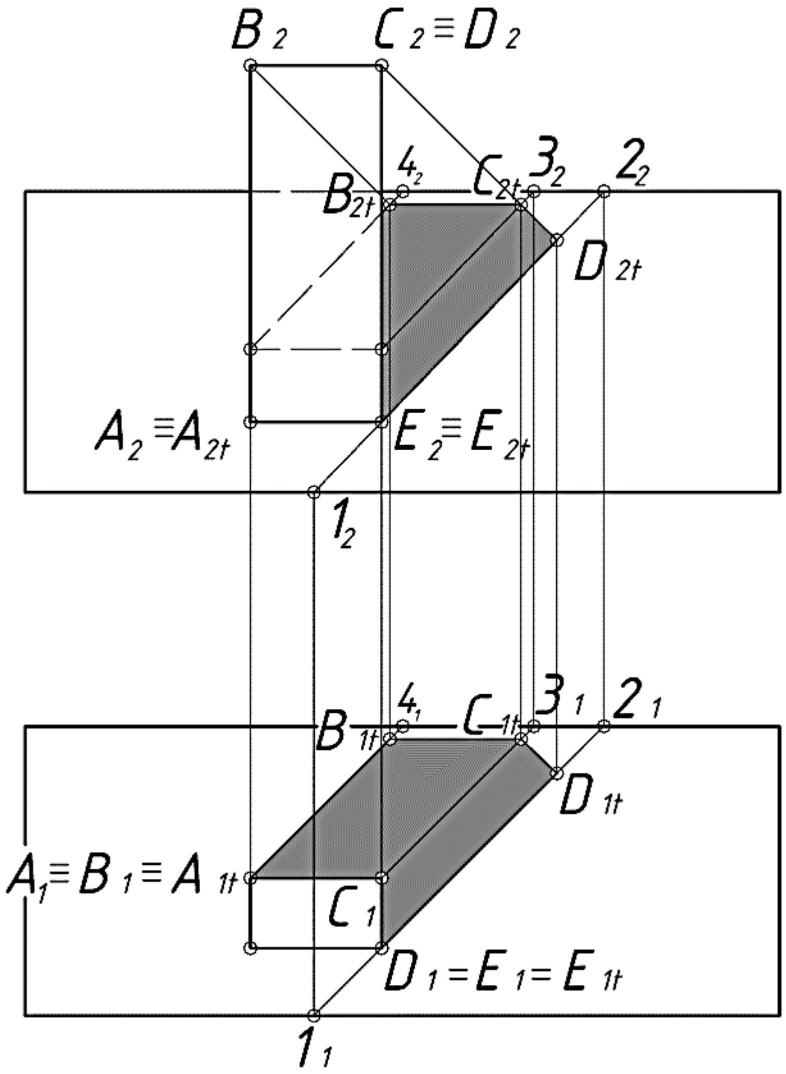


Рис.8.5.5.1

Пример 2. На рис. 8.5.5.2 изображен условный домик – крышей домика является конус, сам домик – это призма. Собственная тень призмы определяется как на рис. 8.4.3, падающая тень строится от контура собственной тени. Тень от конуса строится как на рис. 8.4.5. Помимо этого методом секущих плоскостей строится падающая тень от конуса на призму.

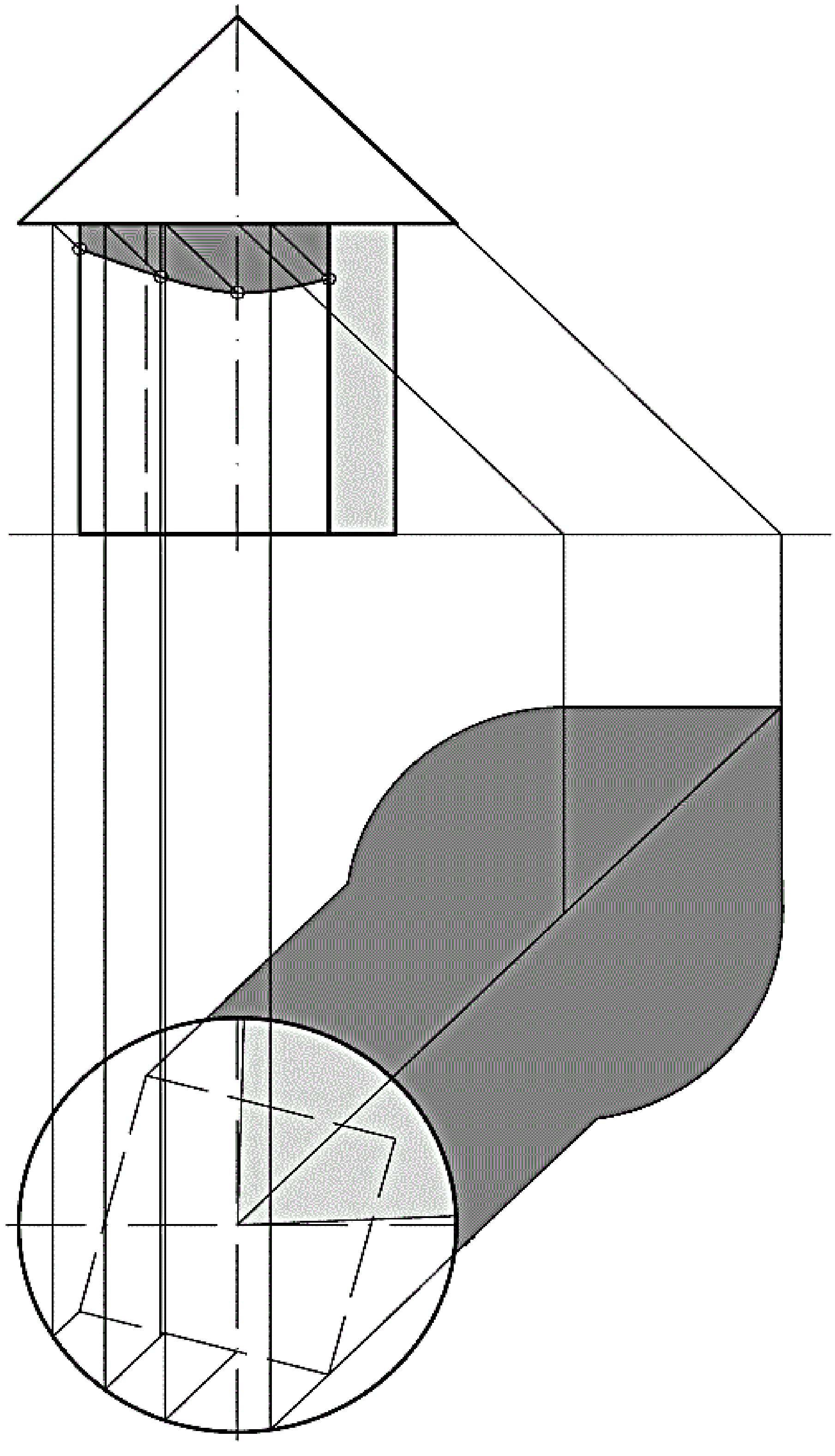


Рис. 8.5.5.2

На рис. 8.5.5.3 показан пример построения падающих и собственных теней домика.

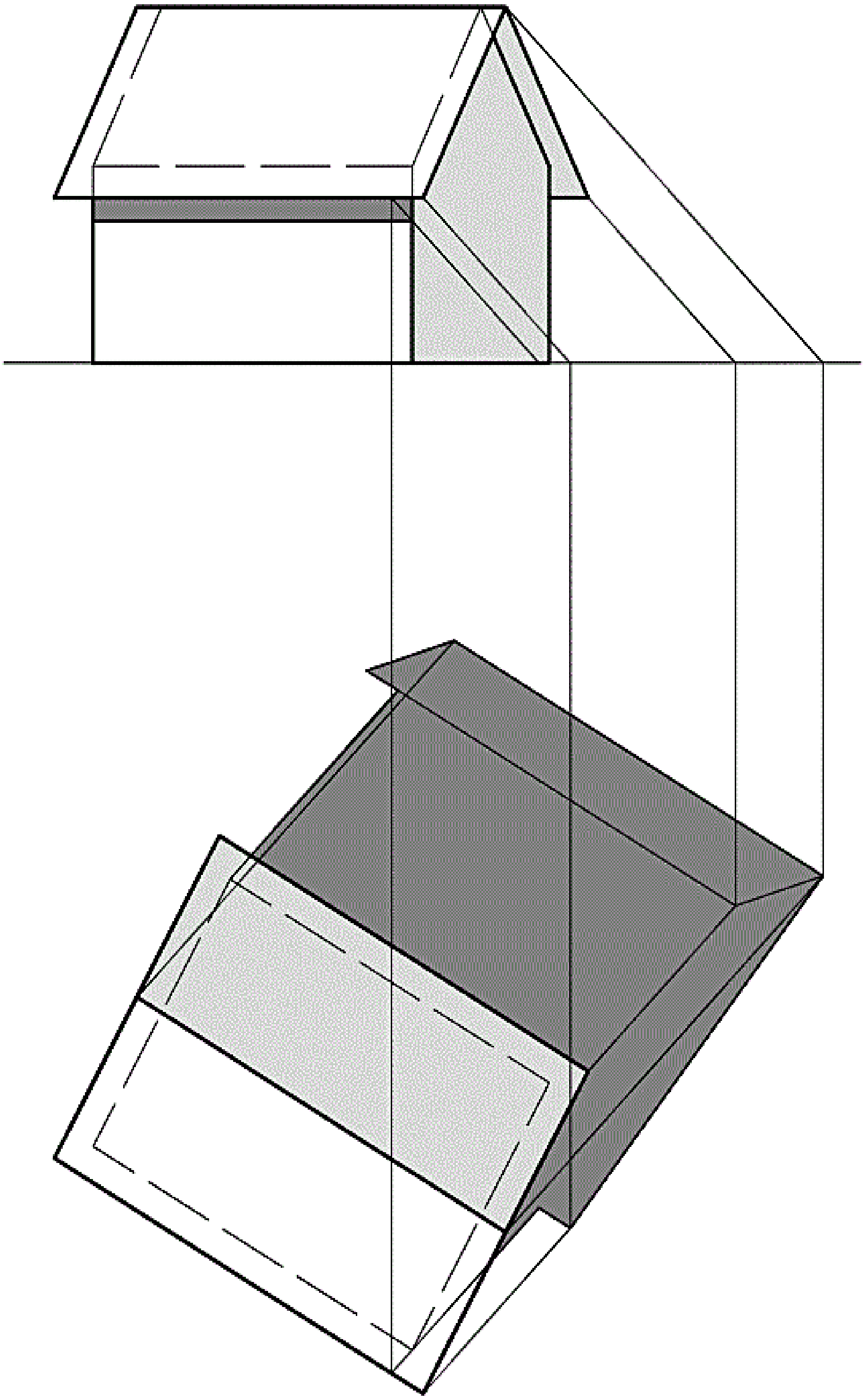


Рис.8.5.5.3

Пример построения теней для выполнения упражнения расчетно-графической работы «Тени в ортогональных проекциях» (рис. 8.5.5.4)

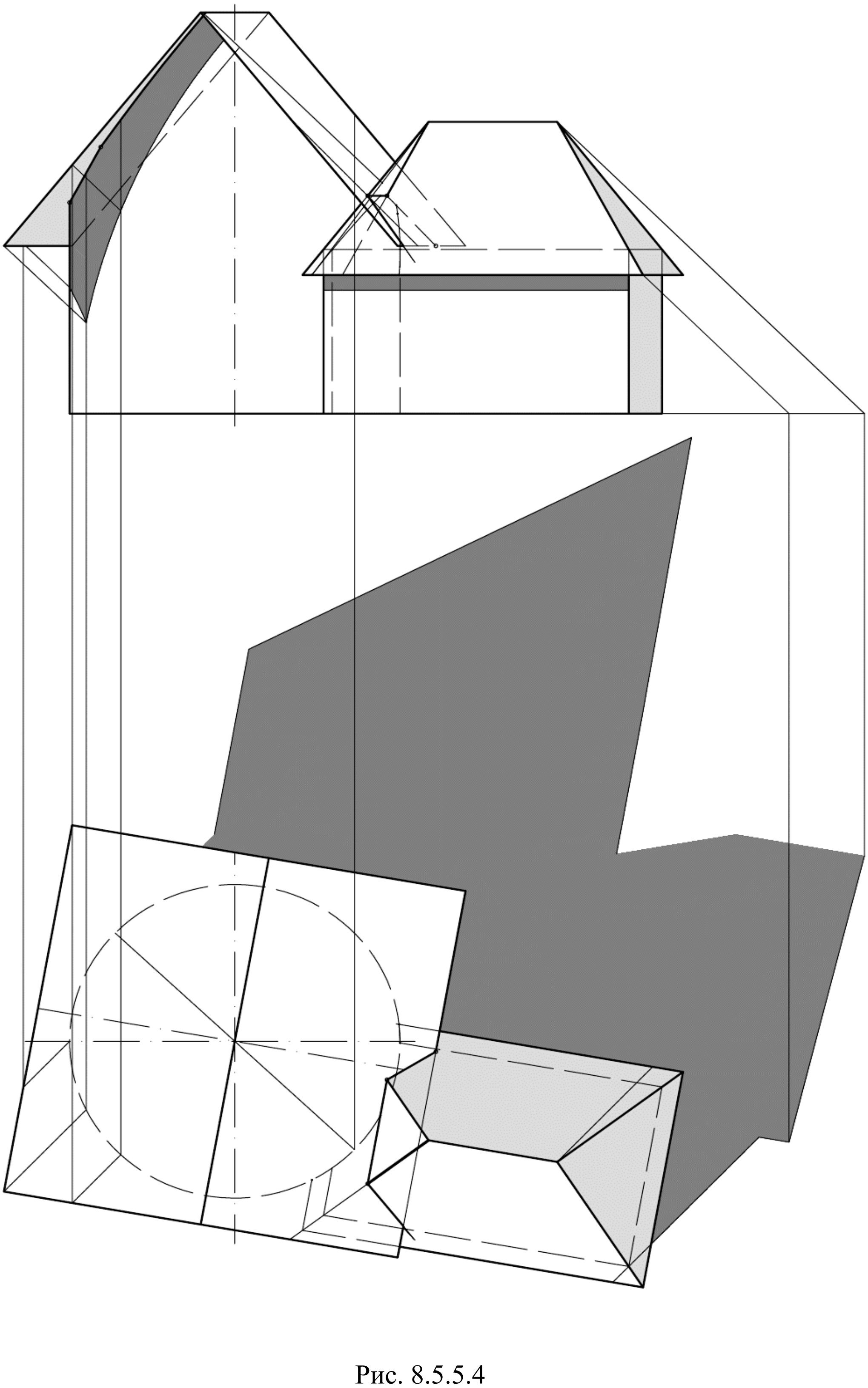


Рис. 8.5.5.4

8.6. Отмывка чертежа

Для передачи на чертеже светотеневой моделировки изображаемого предмета применяют графический прием – отмывку. Отмывка – покрытие поверхности разведенной тушью, гуашью или акварелью с постепенным переходом от более светлого тона к темному. Отмывку чертежей выполняют мягкой кистью. Лучшая бумага для отмывки – плотная крупнозернистая чертежная. Если участок на чертеже, который следует отмыть, небольшой, то лист бумаги прикрепляют кнопками к доске или подрамнику, который устанавливают с небольшим наклоном.

Перед отмывкой чертежа всю площадь, подлежащую отмывке, следует смочить водой и затем дать подсохнуть. После этого раствор туши лучше ложится.

Отмывка заключается в том, что раствор туши или краски кистью сгоняется вниз и вправо по бумаге. На кисти все время должно быть достаточное количество раствора. Начинают отмывку с верхнего левого угла, равномерно прогоняя тушь горизонтальной полосой до правого края.

Затем, набрав на кисть тушь, продолжают отмывку, опять слева направо, но уже несколько ниже. Кисть как бы помогает туши стекать последовательными рядами вниз. Остаток туши у нижнего края снимают отжатой полусухой кистью. При соблюдении указанный правил должен получится ровный однородный тон. После высыхания наносят один-два слоя таким же образом, достигая необходимой силы тона.

Лекция 9

Методы преобразования комплексного чертежа. Метод замены плоскостей проекций. Метрические задачи. Способы вращения.

9.1. Методы преобразования комплексного чертежа

В начертательной геометрии задачи решаются графически значительно проще в случае частного положения геометрической фигуры относительно плоскостей проекций.

Наиболее выгодным частным положением геометрической фигуры считают:

1. Положение перпендикулярное плоскости проекций (для решения позиционных и метрических задач);
2. Положение параллельное плоскости проекций (для решения метрических задач).

Переход от общего положения к частному можно осуществить за счет изменения взаимного положения геометрической фигуры и плоскости проекций. Это достигается двумя путями:

во-первых, перемещением фигуры в пространстве так, чтобы она заняла частное положение относительно плоскостей проекций, которые остаются неподвижными (метод плоскопараллельного перемещения);

во-вторых, перемещением плоскости проекций в новое положение по отношению к которому геометрическая фигура окажется в частном положении (метод замены плоскостей проекций).

Метод замены плоскостей проекций состоит в том, что одна из основных плоскостей проекций *($П_1$, $П_2$, $П_3$)* заменяется новой (*$П_4$, $П_5$* и т.д.), подходящим образом расположенной относительно проецируемой фигуры, но перпендикулярно оставшейся плоскости проекций.

9.2. Метод замены плоскостей проекций

Пусть задана система плоскостей проекций *$П_1$* и *$П_2$* (*$П_1$/$П_2$*). Спроецируем точку *A* на эти плоскости и найдем ее проекции *A_1* и *A_2* (рис. 9.2.1)

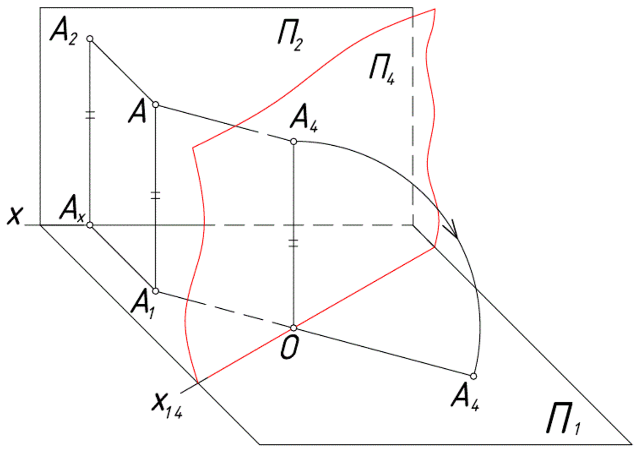


Рис. 9.2.1

Допустим, что при решении какой-либо задачи необходимо заменить плоскость $П_2$ другой плоскостью $П_4$, перпендикулярной к плоскости $П_1$ и подходящим образом расположенной к геометрическому элементу (в нашем случае к точке *A*). Новая плоскость проекций $П_4$ пересекается с плоскостью $П_1$ по новой оси $X_{1\,4}$. Построим проекции точки на все плоскости проекций.

Чтобы перейти от пространственного макета к эпюру необходимо совместить плоскость $П_4$ с плоскостью чертежа. За ось вращения принимается новая ось проекции$X_{1\,4}$. Поворот следует делать так, чтобы новые проекции не накладывались на старые (рис. 9.2.2).

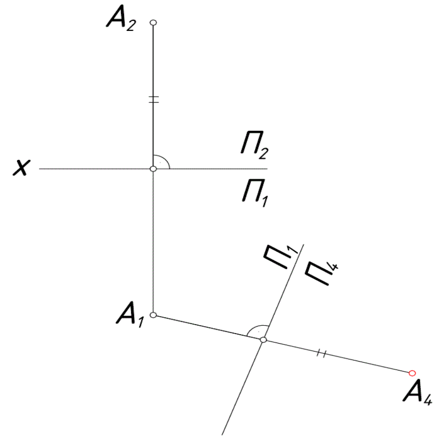


Рис. 9.2.2

Для построения на комплексном чертеже новой проекции точки необходимо:

1. В зависимости от условия задачи выбрать новую плоскость проекций;
2. Зафиксировать старую ось проекций (при ее отсутствии);
3. Построить новую ось проекций;
4. Провести от проекции точки линию связи перпендикулярную новой оси.
5. Измерить расстояние от старой оси до заменяемой проекции точки и отложить это расстояние от новой оси.

9.3. Метрические задачи

Метрические задачи – это задачи, условием которых ставится измерение различных элементов: длин отрезков, величин углов, натуральных величин геометрических фигур.

Они подразделяются на три группы:

1. Задачи линейные – задачи на измерение расстояний, между точкой и прямой, между двумя прямыми, точкой и плоскостью и т.д.
2. Задачи угловые – определяются углы между пересекающимися и скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, двумя плоскостями.
3. Задачи на определение натуральных величин геометрических элементов.

Пример 1. Задачи 3 группы. Определить натуральную величину отрезка методом замены плоскостей проекций и угол его наклона к плоскости $П_1$ (рис. 9.3.1).

Для решения задачи необходимо расположить новую плоскость проекций параллельно заданному отрезку, тогда на нее отрезок проецируется в натуральную величину. Угол φ – угол наклона отрезка к плоскости $П_1$.

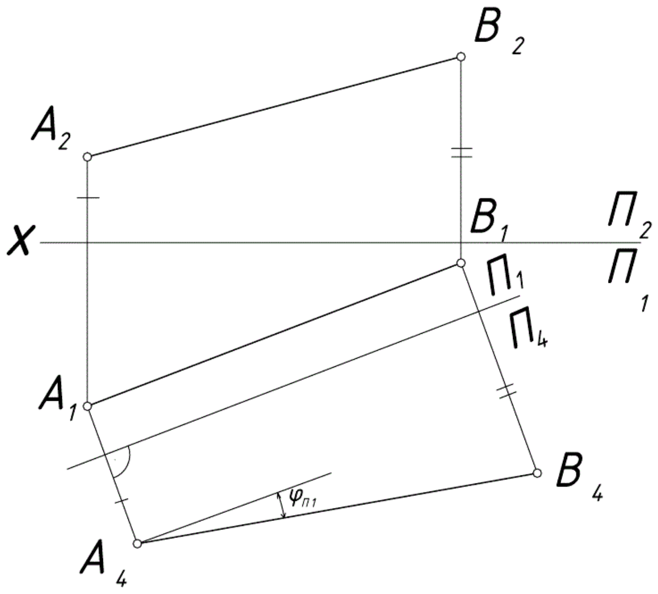


Рис. 9.3.1

Кроме того, натуральную величину отрезка можно определить методом прямоугольного треугольника.

Гипотенуза в прямоугольном треугольнике есть натуральная величина отрезка, если один катет этого треугольника является проекцией отрезка на какую-либо плоскость проекций, а второй катет равен разности расстояний концов отрезка (разности высот) (рис. 9.3.2, 9.3.3)

Пример 2. Определить натуральную величину отрезка методом прямоугольного треугольника (рис. 9.3.3).

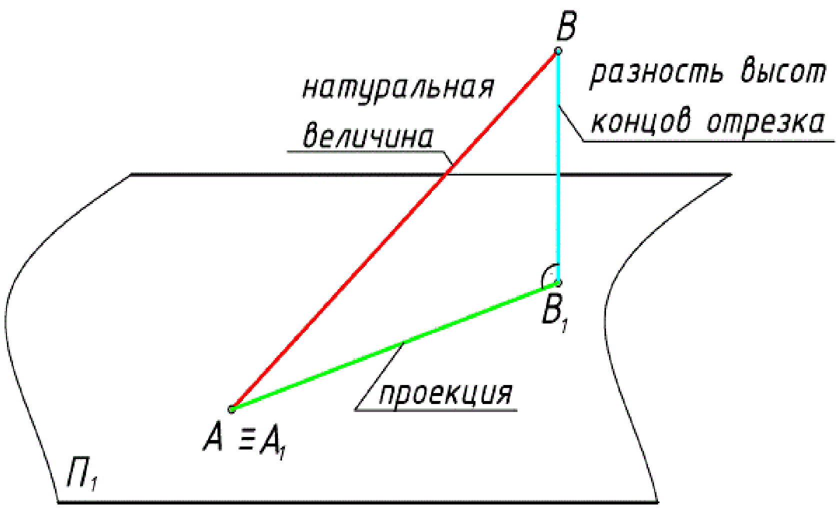


Рис. 9.3.2

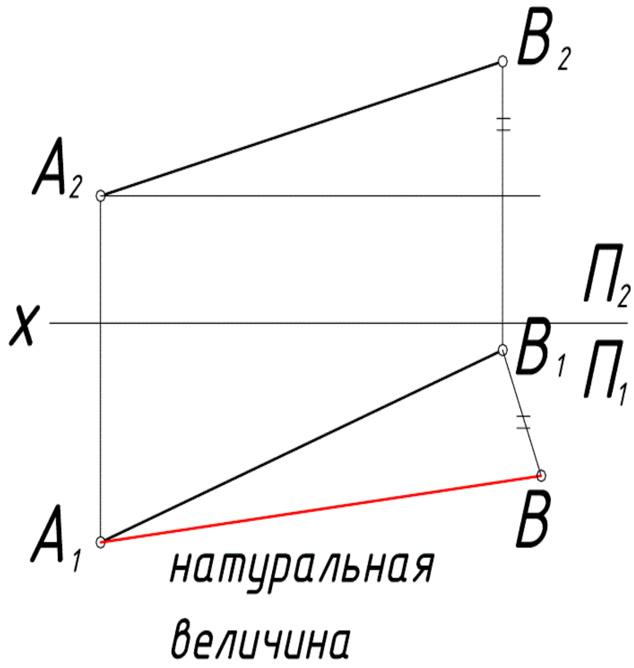


Рис. 9.3.3

Пример 3. Определить натуральную величину плоскости, заданной треугольником *ABC* методом замены плоскостей проекций.

Для решения этой задачи сначала необходимо преобразовать плоскость общего положения в проецирующую (рис. 9.3.4). Для чего проводим в плоскости треугольника линию уровня и располагаем новое поле таким образом, чтобы оно было перпендикулярно линии уровня.

Для того, чтобы получить натуральную величину плоскости, полученную проецирующую плоскость нужно преобразовать второй заменой плоскостей проекций в плоскость уровня и, следовательно, найти натуральную величину.

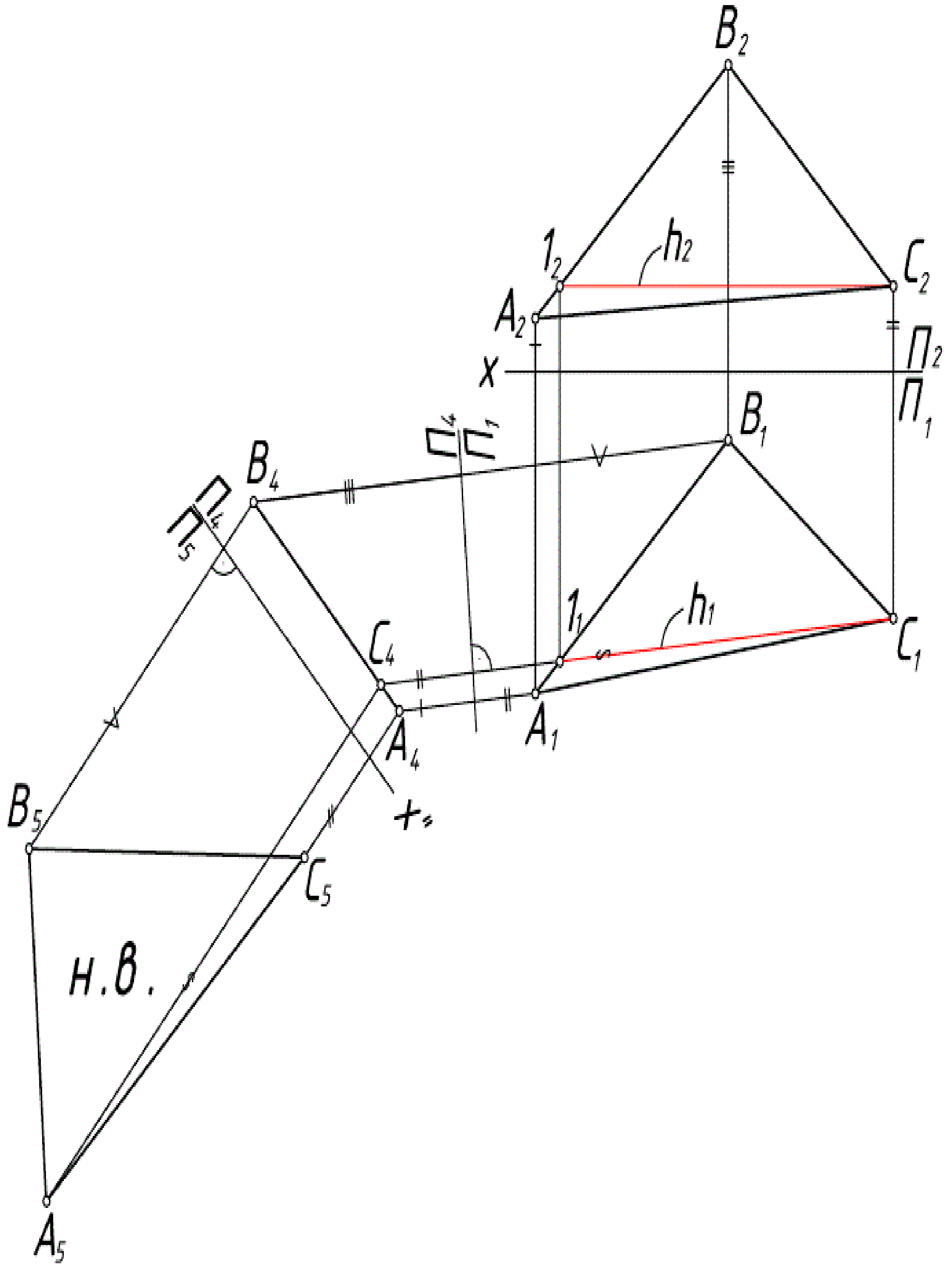


Рис. 9.3.4

Задачи 1 группы:

1. Расстояние от точки до прямой равно перпендикуляру, опущенному из точки на прямую (рис. 9.3.5).

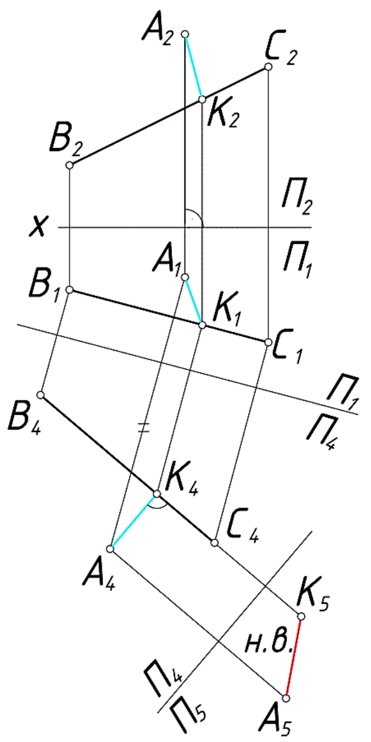


Рис. 9.3.5

2. Расстояние между параллельными прямыми равно перпендикуляру, опущенному из точки, принадлежащей одной прямой на другую (рис. 9.3.6).

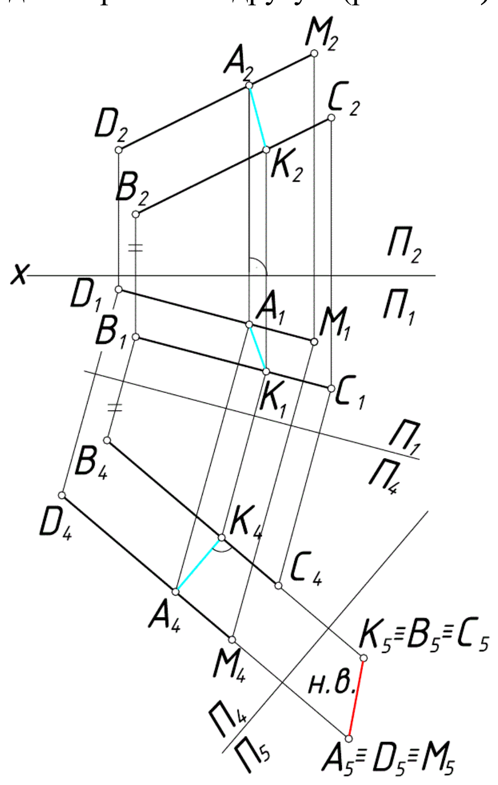


Рис. 9.3.6

3. Расстояние между скрещивающимися прямыми определяется величиной перпендикуляра, заключенного между параллельными плоскостями, которым принадлежат эти прямые (рис. 9.3.7).

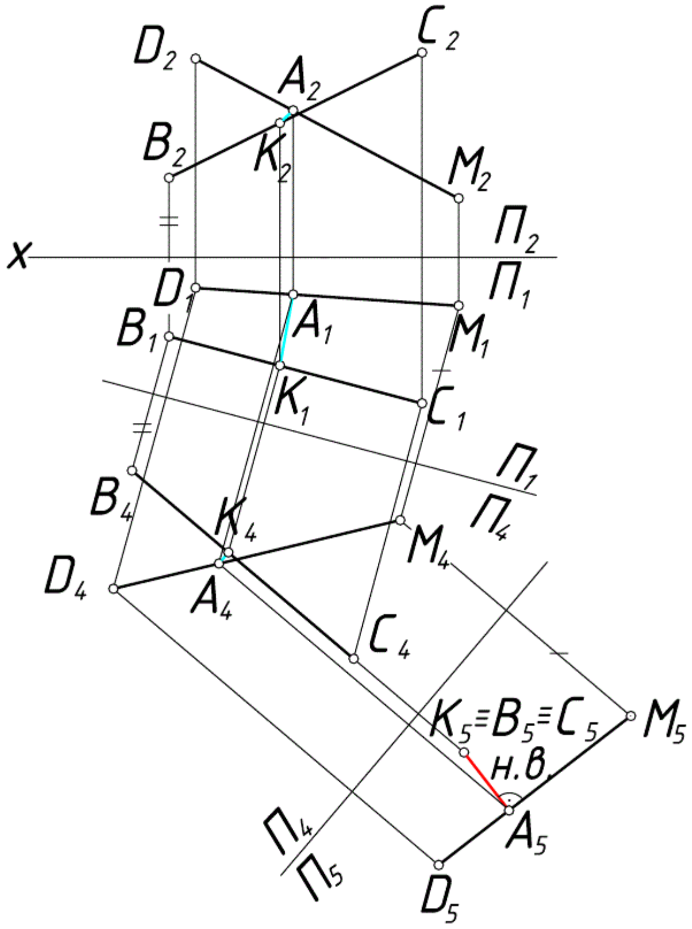


Рис. 9.3.7

4. Расстояние от точки до плоскости – есть величина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость (рис. 9.3.8)

Плоскость, заданную треугольником *ABC* преобразуем в проецирующую, для чего построим в плоскости горизонталь *h* (h_1, h_2). Перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали введем новое поле Π_1/Π_4 и строим в новой плоскости треугольник, который становится перпендикулярным Π_4. Переносим в новое поле и точку. Восстанавливаем перпендикуляр от точки к плоскости, расстояние M_4K_4 и есть натуральная величина расстояния от точки до плоскости. Возвращаем проекции перпендикуляра на плоскости Π_1 и Π_2.

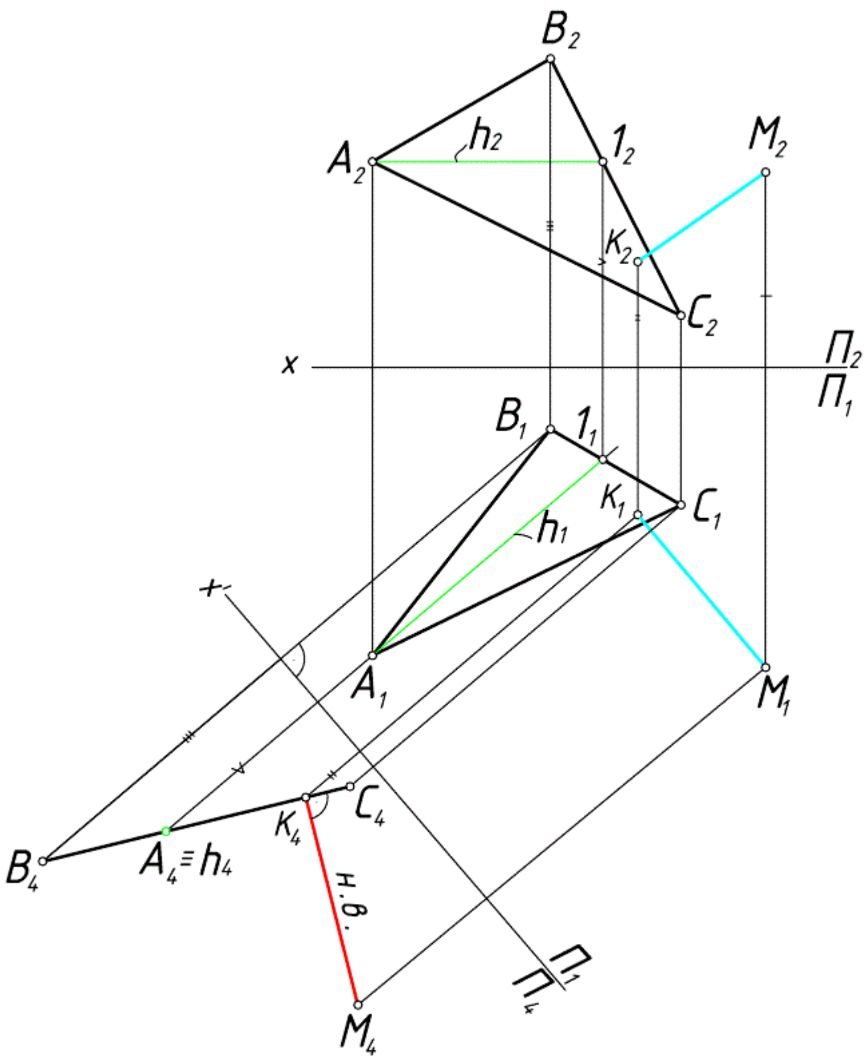


Рис. 9.3.8

9.4. Способы вращения

9.4.1. Вращение вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций

Вращение вокруг проецирующих осей является частным случаем плоскопараллельного перемещения, которое в данном курсе не рассматривается. Все точки геометрической фигуры перемещаются в пространстве в плоскостях, параллельных плоскостям проекций по окружностям.

Сущность способа заключается в том, что проецируемую фигуру путём ее поворота вокруг выбранной оси переводят в новое положение относительно плоскостей проекций, при котором легко получить решение задачи.

Все точки геометрической фигуры, не лежащие на оси вращения, вращаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения (рис. 9.4.1.1). Σ перпендикулярна *i;* А принадлежит Σ. Центр О окружности m, которую описывает точка А, является точкой пересечения оси i с плоскостью Σ; $O = i \cap Σ$. Отрезок АО является радиусом R окружности *m*.

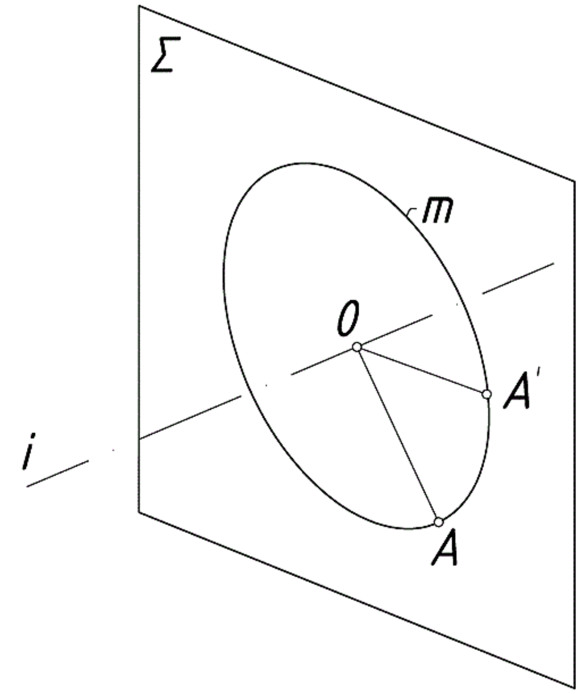


Рис. 9.4.1.1

Рассмотрим, как изменяется положение проекций точки при вращении ее вокруг оси, перпендикулярной плоскости $П_1$ (рис. 9.4.1.2)

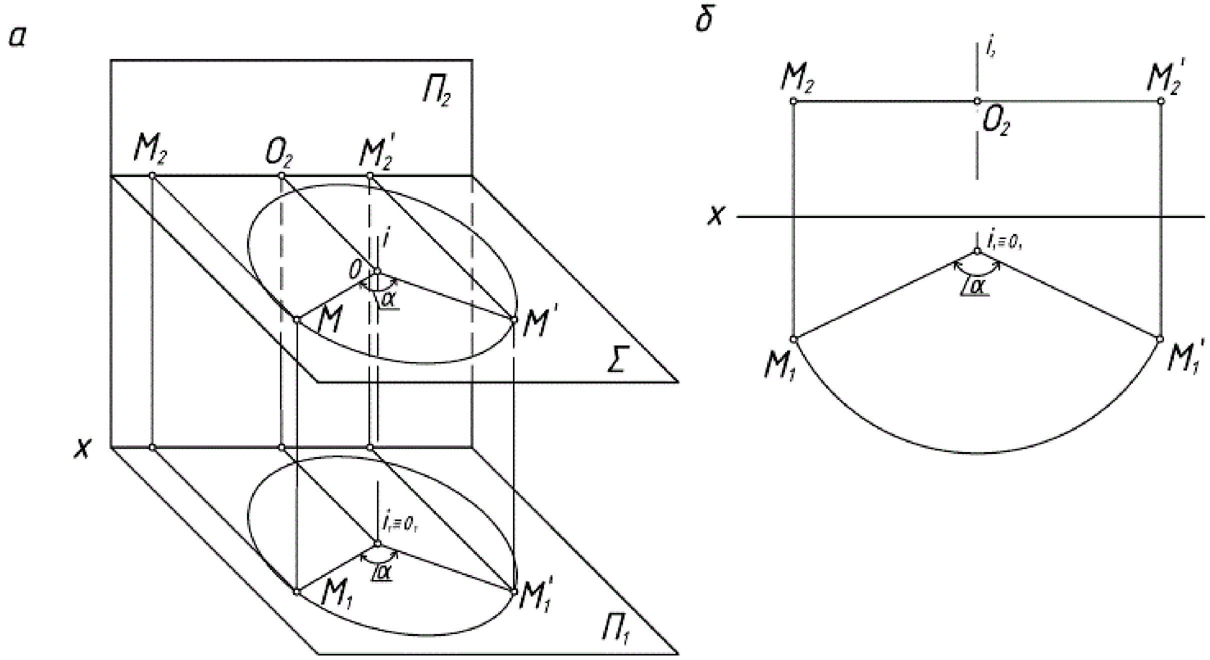


Рис. 9.4.1.2

При вращении точки M вокруг оси i на угол α, ее горизонтальная проекция M_1 перемещается по окружности того же радиуса, в ту же сторону и на тот же угол α, что и сама точка M. Траектория движения точки M в пространстве на плоскость Π_1 проецируется без искажения, так как она принадлежит плоскости Σ, параллельной Π_1. Фронтальная проекция точки M (M_2) перемещается по прямой, параллельной оси OX.

Необходимо иметь ввиду следующее:

а) точки, лежащие на оси вращения, не меняют своего положения, остальные точки вращаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения;

б) все вращающиеся точки поворачиваются в одну сторону на один и тот же угол;

в) если ось перпендикулярна некоторой плоскости проекций, то проекции на эту плоскость вращающейся фигуры в любом ее положении конгруэнтны.

Решение задачи на плоском комплексном чертеже показано на рис. 9.4.1.3. Поворачиваем отрезок AB вокруг оси i, перпендикулярной Π_1 на угол α. Для сокращения геометрических построений ось i проведем через точку прямой B.

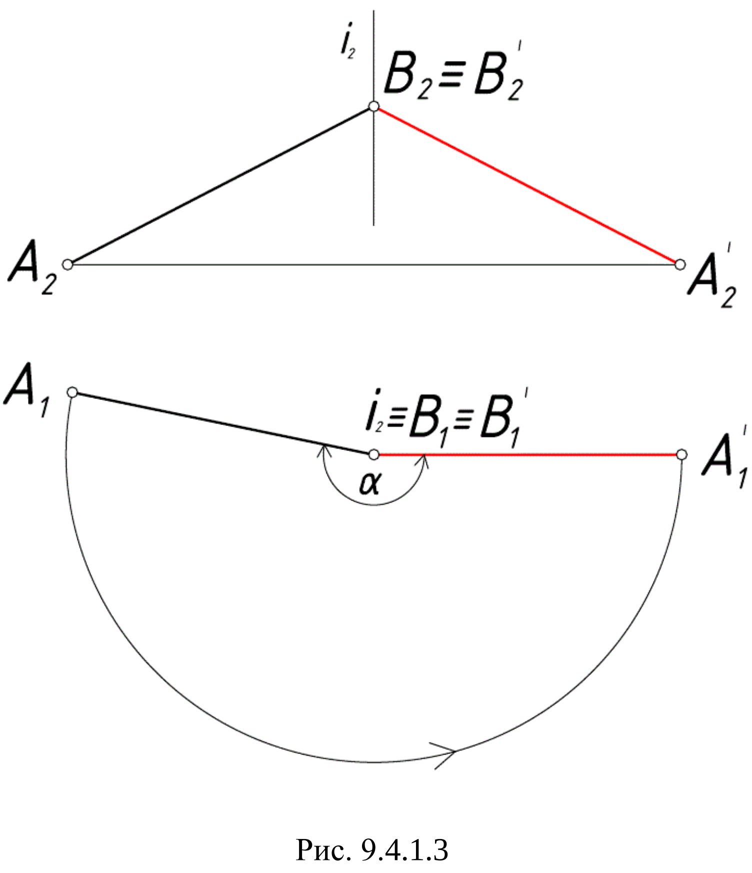


Рис. 9.4.1.3

9.4.2 Вращение вокруг линии уровня

Вращение вокруг линии уровня применяют в тех случаях, когда данную плоскую фигуру требуется совместить с какой-либо плоскостью, параллельной плоскости проекций. В таком положении плоская фигура проецируется на соответствующую плоскость проекций без искажения, т.е. в натуральную величину.

Каждая точка геометрической фигуры при ее вращении перемещается по окружности, принадлежащей плоскости, перпендикулярной оси вращения. Центр окружности находится на оси вращения.

Вращение точки вокруг горизонтальной оси h ‖ Π_1(рис. 9.4.2.1).

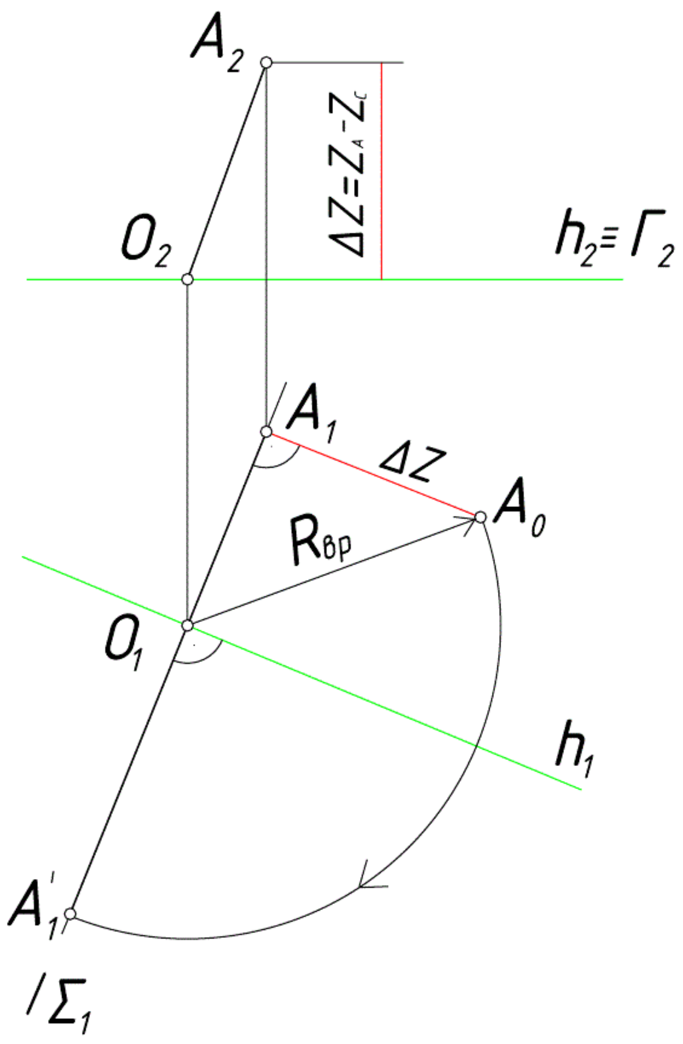


Рис. 9.4.2.1

1. Выбираем ось вращения – горизонталь *h*.
2. Проводим плоскость с которой совмещается точка. Плоскость называется плоскостью совмещения, и ее проекция совпадает с проекцией оси вращения. $h_2 \equiv \Gamma_2$.
3. Проведём плоскость в которой вращается точка. Плоскость называется плоскостью вращения и располагается перпендикулярно оси вращения. $\Sigma_1 \perp h_1$.

4. Отмечаем центр вращения - *O* (*O*$_1$ *O*$_2$).
5. Определяем натуральную величину радиуса поворота методом прямоугольного треугольника.
6. Поворачиваем точку до ее совмещения с плоскостью вращения Σ.

Пример. Определить натуральную величину треугольника *ABC* (рис. 9.4.2.2), используя метод вращения вокруг горизонтали.

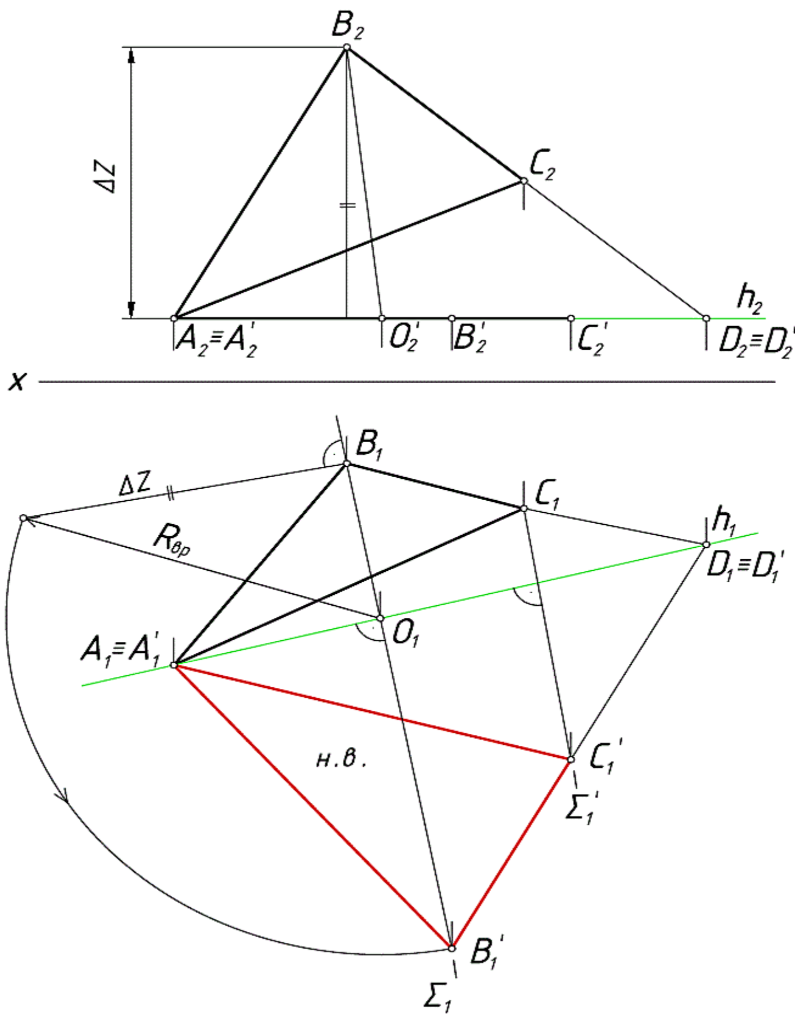


Рис. 9.4.2.2

Точки *D* и *A* не меняют своего положения, так как они принадлежат оси вращения, а горизонтальные проекции точек *B* и *C* перемещаются по прямым, перпендикулярным оси вращения. Положение точки *B'* после поворота определено описанным выше способом. В результате поворота треугольник занял положение параллельное плоскости *П*$_1$ и проецировался на эту плоскость без искажения. Фронтальная проекция треугольника после поворота – прямая линия, параллельная оси координат.

Литература

1. Тени, аксонометрия, перспектива: электронный конспект лекций / В.А. Короткий. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – 127 с.
2. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов/ Н.Н. Крылов, Г.С. Иконникова, В.Л. Николаев, Е.В. Васильев; Под ред. Н.Н. Крылова. – 9-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 224 с.
3. Тени в ортогональных проекциях: Методические указания к выполнению задания «Тени в ортогональных проекциях» / Составители: Ахмедова А.А., Коробова А.Г., Калинин А.А. – Наб. Челны: ИНЭКА, 2007. – 30 с.
4. Начертательная геометрия: учеб.для студентов высш.учеб. заведений/ А.А. Павлова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Гуманитар.изд.центр ВЛАДОС, 2005. – 301 с.
5. Методика решения задач по начертательной геометрии. Позиционные задачи: Учебное пособие для лабораторных занятий и самостоятельной работы студентов по начертательной геометрии /Составители: Ахметов Н.Д., Коробова А.Г., Рзаева Т.В., Валиахметова Л.Н.- Набережные Челны: Изд-во НЧИ К(П)ФУ, 2016. - 88 с.
6. Позиционные задачи. Методические указания к практическим занятиям/Изд-е 3-е переработанное. М.Б. Шастина, А.Г. Коробова, И.Е. Исаева. Набережные Челны: КамПИ, 2004г. – 30 с.
7. Позицион мэсьэлэлэр. Методические указания/ Ахметов Н.Д., Коробова А.Г. – Наб. Челны: Изд-во КамПИ – 2003г. – 44 с.
8. Начертательная геометрия: учебное пособие для студентов 1-го курса / Н.Д. Ахметов, Л.А. Феоктистова, Т.В. Рзаева. - Набережные Челны: Изд-во НЧИ КФУ, 2014. - 128 с.
9. Начертательная геометрия. Методические указания и контрольные задания для студентов 1-го курса. (Учебно-методическое пособие) Набережные Челны: Изд-во НЧИ КФ, 2014. - 119с.
10. Начертательная геометрия: конспект лекций: В 2 ч./ Ю.И. Садовский [и др.]. - Минск: БНТУ, 2009. - Ч.1:" Метод Монжа. Позиционные задачи" 2009.
11. Начертательная геометрия. Краткий курс по темам графических работ: учебное пособие/ Е.И. Белякова, П.В. Зеленый; Под ред. П.В. Зеленого. - Минск: БНТУ, 2010. – 229с.