МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Свободные или **собственные** колебания происходят в системе, предоставленной самой себе. Свободные колебания – всегда **затухающие**. Затухающими называются колебания, для которых амплитуда колебаний и, следовательно, энергия уменьшаются со временем. Затухание свободных колебаний механической системы происходит по причине рассеяния энергии под воздействием сил трения (не потенциальных сил сопротивления).

Вынужденные колебания происходят под действием внешней периодической силы.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени воздействий задаются самой колеблющейся системой – система сама управляет внешним воздействием.

Параметрические колебания происходят за счет повторяющегося изменения какого-либо параметра системы, например, длины нити, к которой подвешен шарик.

Кинематика колебаний: Периодические, гармонические, упругие, квазиупругие.

Смещение

Коэффициент затухания

$$x = A\,e^{-\beta t}\cos\overbrace{(\omega t + \alpha_0)}^{\text{Фаза}} \quad \text{или} \quad x = A\,e^{-\beta t}\sin(\omega t + \alpha_0).$$

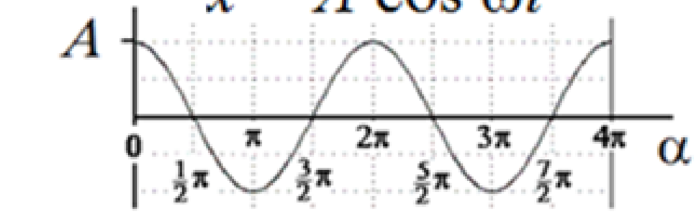
Амплитуда

Угловая частота

Начальная фаза

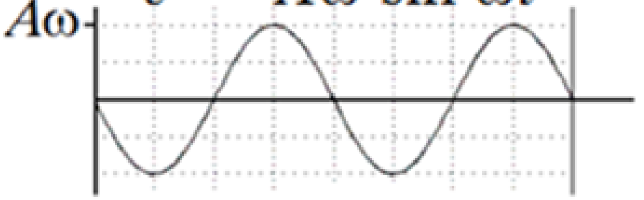
Смещение

$$x = A\cos\omega t$$



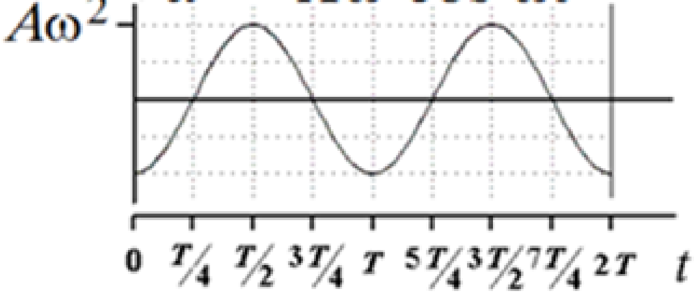
Скорость

$$v = -A\omega\sin\omega t$$



Ускорение

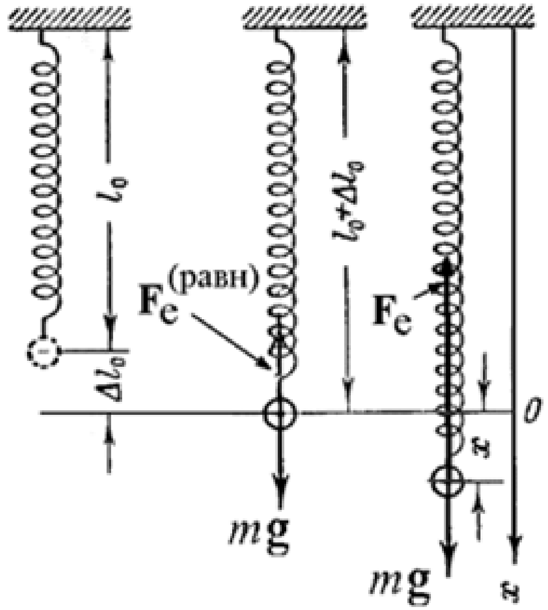
$$a = -A\omega^2\cos\omega t$$

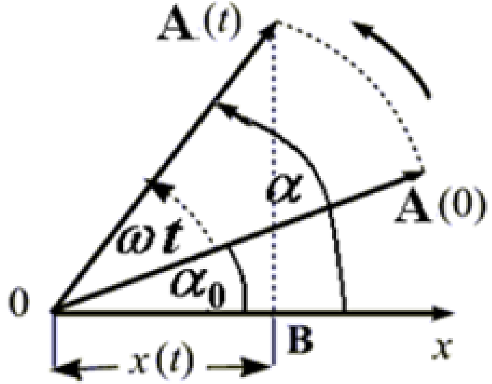


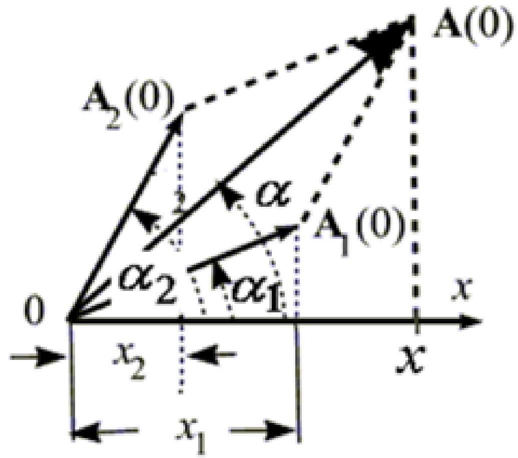
Пружинный маятник:

$$F_{\text{упр}} = F_e = -kx,$$

$$\omega = \sqrt{(k/m)}$$







СУПЕРПОЗИЦИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ,
происходящих в одном направлении

1) Частоты одинаковые:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \text{ и } x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \rightarrow x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \alpha),$$

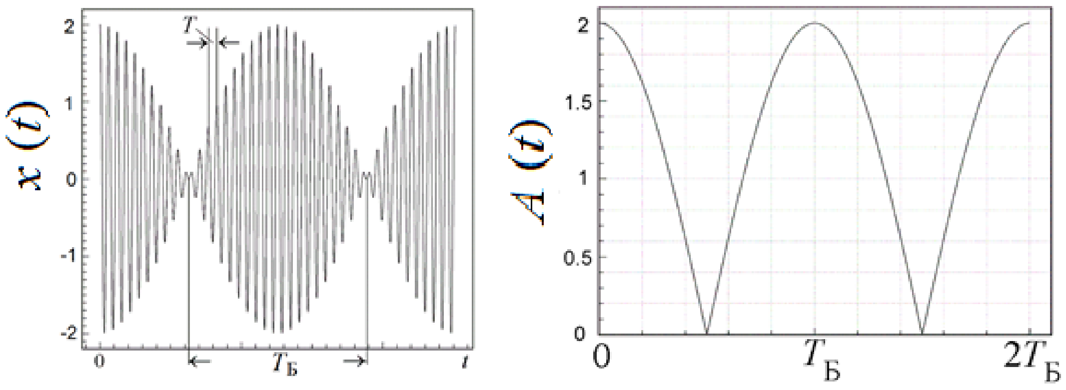
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}, \quad |A_1 - A_2| \le A \le A_1 + A_2$$

2) Частоты различные: $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) \rightarrow x = x_1 + x_2$.

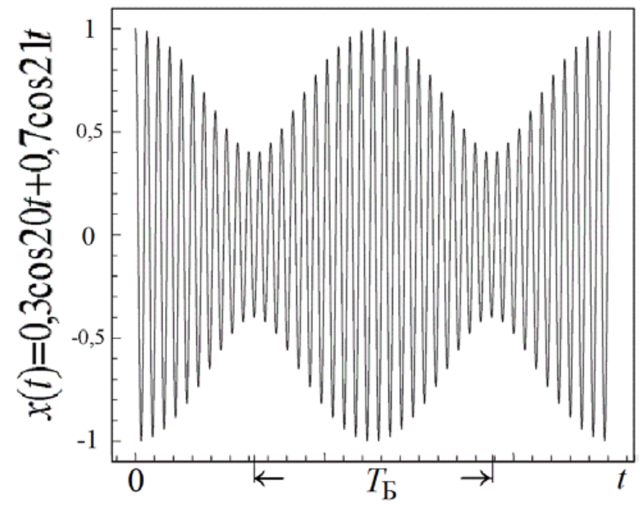
3) Частоты близкие → **БИЕНИЯ**: $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$, $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega$

$$x = 2A\cdot\cos 0{,}5\Delta\omega t\cdot\cos(\omega + 0{,}5\Delta\omega)t, \quad T_Б = 2\pi/|\Delta\omega| \text{ и } \nu_Б = |\Delta\omega|/2\pi.$$

$$x(t) = \cos(20t) + \cos(21t) = 2\cos(0{,}5t)\cos(20{,}5t)$$



$A_1 = A_2$



$A_1 \ne A_2$

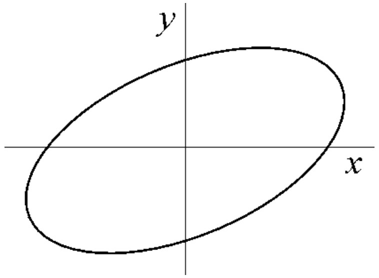
СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО-ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ.

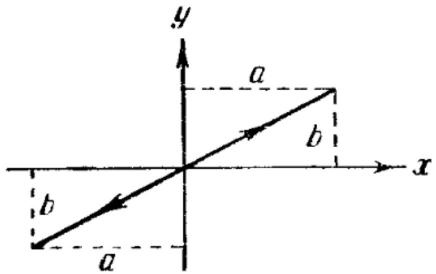
Частоты различные: траектория - сложные кривые, форма непрерывно меняется.

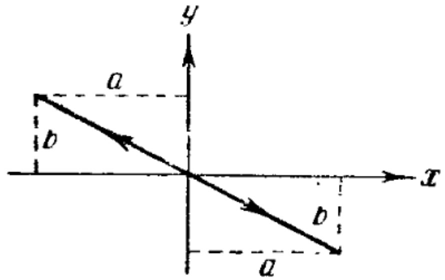
Фигуры Лиссажу наблюдаются при условии постоянства амплитуд, частот и начальных фаз складываемых колебаний.

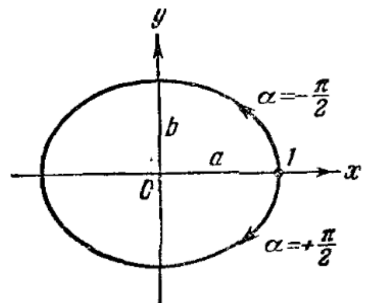
$$x = a\cos\omega t,\ y = b\cos(\omega t + \alpha),$$

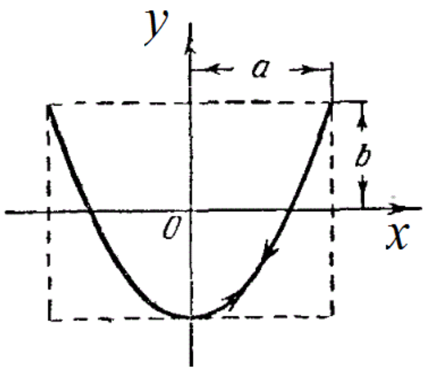
$$\boxed{(x/a)^2 + (y/b)^2 - 2\,(xy/ab)\cos\alpha \;=\; \sin^2\alpha},$$



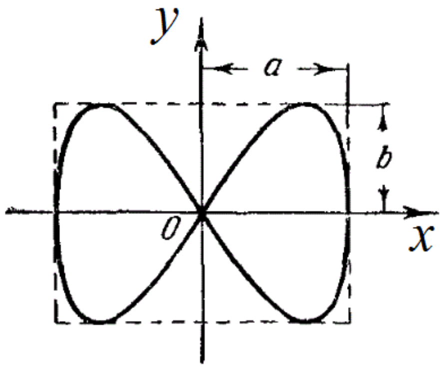




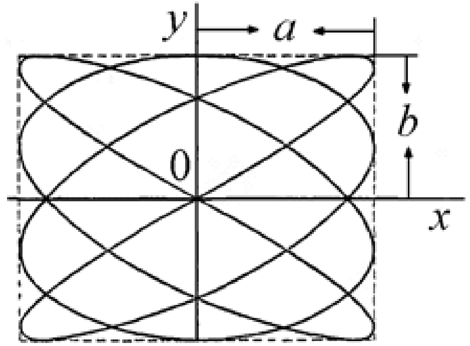




$x = a\cos\omega t$
$y = b\cos 2\omega t$



$x = a\cos\omega t$
$y = b\cos(2\omega t + \pi//2)$



$x = a\cos(4\omega t)$
$y = b\cos(3\omega t + \pi/2)$

ДИНАМИКА КОЛЕБАНИЙ

Свободные колебания под действием квазиупругой силы

$\boxed{F_e = -k \cdot x}$ – сила упругости и $\boxed{F_r = -r \cdot v = -r \cdot \dot{x}}$ – сила трения в вязкой среде ($k > 0$ и $r > 0$)

$ma = F = F_e + F_r \rightarrow$ $\boxed{m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx}$ – уравнение второго закона Ньютона

$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ – дифференциальное уравнение**,** где $\boxed{\beta = r/2m}$ – коэффициент затухания, $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$ – **собственная** угловая **частота** колебаний системы и m – масса системы.

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi / \sqrt{k/m} = 2\pi\sqrt{m/k}$$

$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ – **уравнение собственных незатухающих колебаний для** $\beta = 0$

решение $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0)$.

Энергия колебаний:

$$W_K = m\,v^2/2 = m\,[A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0)]^2/2 = (m\omega_0^2 A^2/2)\sin^2(\omega_0 t + \alpha_0)$$

$$W_\Pi = k\,x^2/2 = k\,[A\cos(\omega_0 t + \alpha_0)]^2/2 = (k\,A^2/2)\cos^2(\omega_0 t + \alpha_0).$$

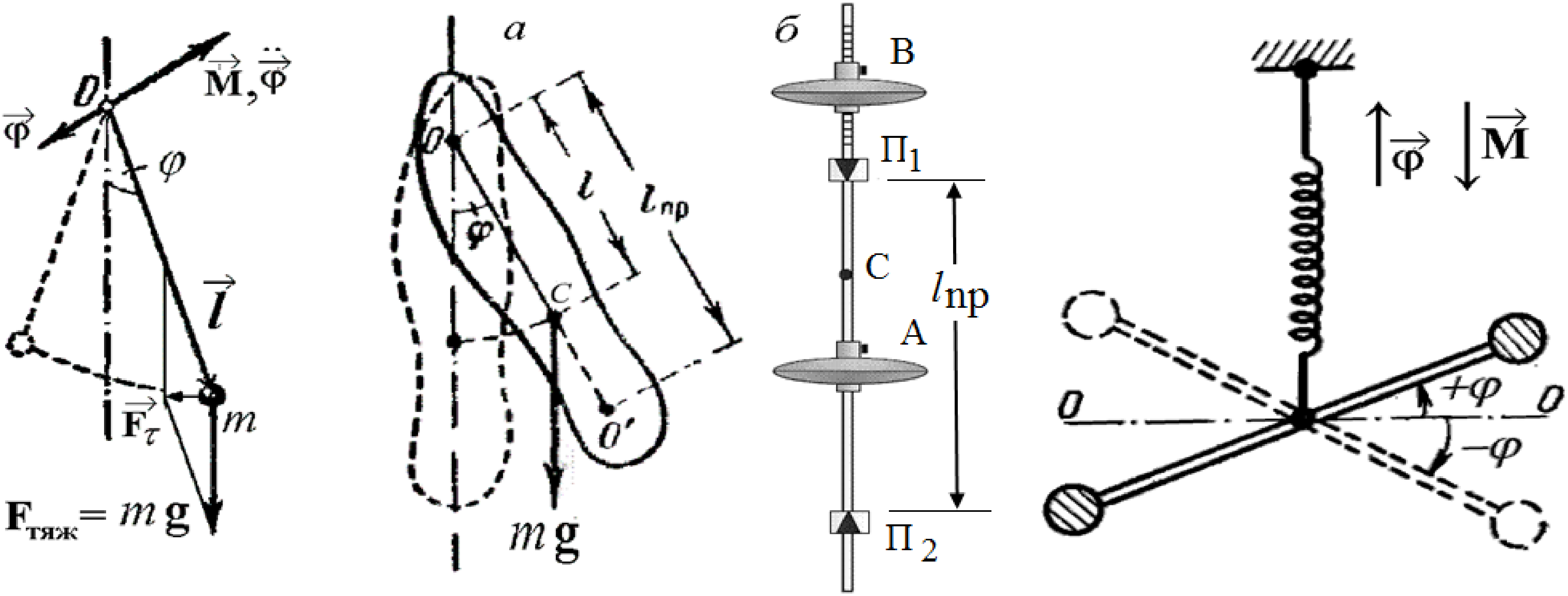
$W_K^{(max)} = m\omega_0^2 A^2/2$, когда $\alpha = \pi/2 \pm n\,\pi$, где n – целое число.

$W_\Pi^{(max)} = k\,A^2/2$, когда $\alpha = \pm n\,\pi$, где n – целое число.

Полная энергия: $W = W_K + W_\Pi = ½\, m\,\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha_0) + ½\, k\,A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha_0)$

$$\boxed{W = W_K^{(max)} = W_\Pi^{(max)} = m\,\omega_0^2 A^2/2 = k\,A^2/2} = \text{Const}$$

МАЯТНИКИ: 1 – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ, 2 – ФИЗИЧЕСКИЙ, 3 – ОБОРОТНЫЙ, 4 – КРУТИЛЬНЫЙ.



1) $\vec{\beta} = \ddot{\vec{\varphi}} = \vec{M} / I = [\vec{l}, \vec{F}_{тяж}] / I$, $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, $T_0 = 2\pi / \omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$.

2) $\omega_0 = \sqrt{g/l_{пр}}$, $T_0 = 2\pi / \omega_0 = 2\pi\sqrt{l_{пр}/g}$ → математический маятник с $l_{пр} = (I/ml)$ имеет такой же период колебаний, как и данный физический маятник.

3) $g = (2\pi/T_0)^2\, l_{пр}$.

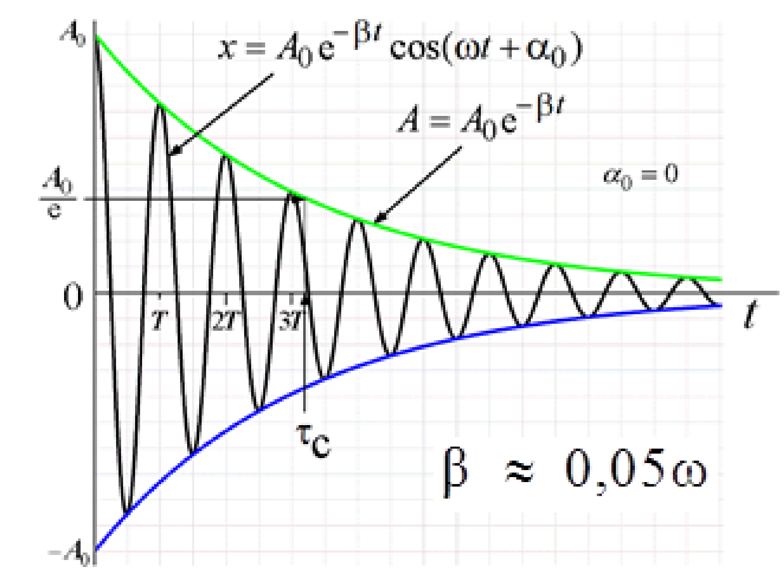
4) $\omega_0 = \sqrt{D / I}$, где D – *модуль кручения* $M = -D\varphi$.

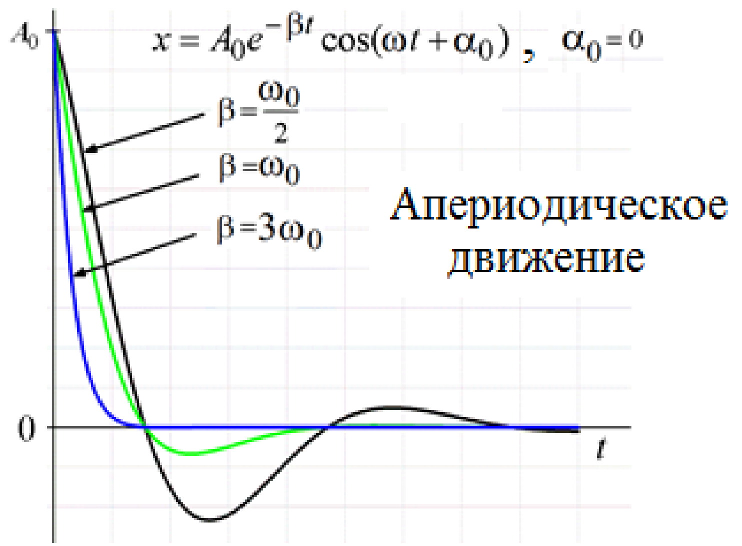
ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ:

$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$, $\boxed{x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha_0)}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\beta = r/2m$.

k – коэффициент жесткости пружины, r – коэффициент сопротивления вязкой среды

Параметры затухания	**Коэффициент затухания** $\beta = r/2m$ **Время затухания (релаксации)** $\tau_c = 1/\beta$, при $t = \tau_c$ имеем: $A(0)/A(\tau_c) = A_0/(A_0 e^{-1}) = e$ **Декремент затухания**: $D = A(t)/A(t+T) = A_0 e^{-\beta t}/A_0 e^{-\beta(t+T)} = e^{\beta T}$ **Логарифмический декремент затухания**: $\vartheta = \ln D = \ln e^{\beta T} = \beta T = T/\tau_c$ **Число колебаний**: $N_e = \vartheta^{-1} = \tau_c / T$ **Добротность** колеблющейся системы: $Q = \pi/\vartheta = \pi N_e$





Соотношения связи

$$\vartheta = \pi / Q = \beta T = T/\tau_c,$$

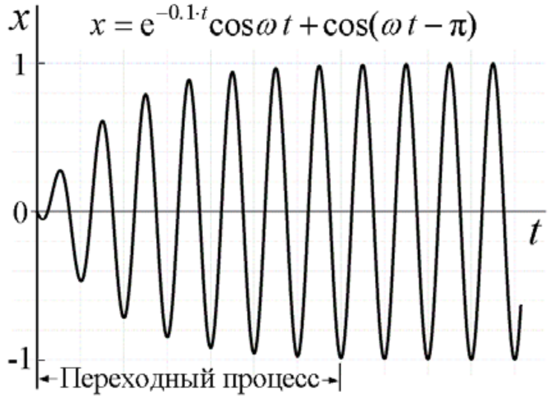
$$\beta = 1/\tau_c = \vartheta / T = \pi / Q T,$$

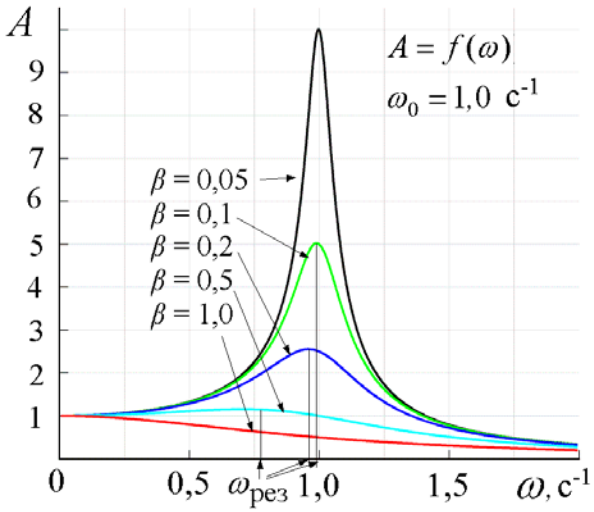
$$\tau_c = 1/\beta = T/\vartheta = Q T/\pi$$

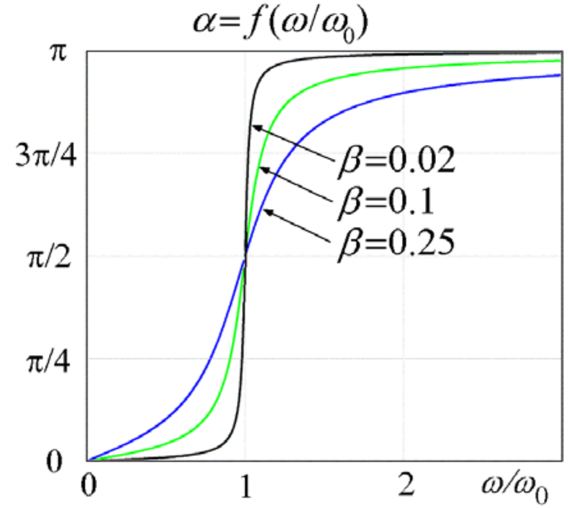
$$Q = \pi/\vartheta = \pi/\beta T = \pi\tau_c / T$$

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ: $F = F_0 \cos\omega t$, $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$, где $f_0 = F_0/m$.

$$x = A_0' e^{-\beta t}\cos(\omega' t + \alpha_0') + A\cos(\omega t - \alpha_0),\ A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad \text{и} \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$







$$\omega(A_{max}) = \omega(A_{рез}) = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},\ A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}}.$$

При малом затухании ($\beta << \omega_0$) получим: $\dfrac{A_{рез}}{x_0} \approx \dfrac{f_0}{2\beta\omega_0} : \dfrac{f_0}{\omega_0^2} = \dfrac{\omega_0}{2\beta} = \dfrac{2\pi}{2\beta T} = \pi\dfrac{1}{\beta T} = \pi\dfrac{\tau_c}{T} = \pi N_e = Q$.

Добротность Q при малом затухании показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса ($A_{рез}$) превышает смещение системы из положения равновесия ($x_0 = f_0/\omega_0^2 = F_0/k$) под действием постоянной силы, равной амплитуде вынуждающей силы (F_0).