С. Р. Насыров

ВВЕДЕНИЕ
В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ.

Казань
2008

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

С. Р. Насыров

ВВЕДЕНИЕ
В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Казань
2008

УДК 517.1

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
механико-математического факультета КГУ

Научный редактор
доктор физико-математических наук, профессор А. Н. Шерстнев

Насыров С.Р. Введение в математический анализ. Пределы и непрерывность. – Казань: Казанский государственный университет, 2008. – 88 с.

Настоящее учебное пособие содержит подготовительный материал, необходимый для изучения основ дифференциального и интегрального исчисления функций одной вещественной переменной. В нем систематически излагаются темы, связанные с пределами числовых последовательностей, пределами вещественных функций одной вещественной переменной, непрерывными функциями. Кроме того, даются основы теории множеств и топологии вещественной прямой. Материал соответствует курсу "Математический анализ" для классических университетов (первая половина первого семестра).

1 Множества и функции

1.1 Множества

Множество — это совокупность объектов, которые обладают каким-либо общим свойством.

Замечание. Множество — это базовое понятие в математике, оно не определяется. Можно только пояснить, что оно означает.

Объекты, которые объединены в множество, называются его *элементами* или *точками*. Если A — множество, a — объект этого множества, то пишут $a \in A$ и говорят, что *элемент* a *принадлежит множеству* A или что a — *точка множества* A.

Если объект a не принадлежит множеству A, то пишут $a \notin A$ или $a \overline{\in} A$.

Пусть даны два множества A и B. Будем говорить, что множество A является *подмножеством* B или *частью* множества B, если любой элемент множества A является элементом множества B. При этом пишут $A \subset B$. Если множество A не является подмножеством B, то пишут $A \not\subset B$.

Для наглядности множества изображают на диаграммах в виде кружочков, овалов, прямоугольников или других плоских фигур, содержащихся в некотором прямоугольнике X. Этот прямоугольник также является множеством, которое содержит рассматриваемые множества. Такое множество называется *универсумом*.

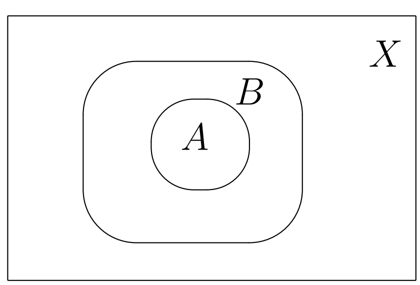

Рис. 1.

Например, если рассматриваются подмножества множества $\mathbb{R}$, то в качестве универсума X можно взять $\mathbb{R}$. Подобные диаграммы называют *диаграммами Венна* по имени их изобретателя — австрийского математика. На рис. 1 изображена диаграмма Венна, иллюстрирующая понятие подмножества. На этой диаграмме A является меньшим кружочком, а B — бо́льшим.

Два множества A *и* B *совпадают* (пишут $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов. Очевидно, что $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

Для удобства вводят понятие *пустого множества*. Это такое множество, которое не содержит ни одного элемента. Обозначается пустое множество символом $\emptyset$.

Если A — множество всех элементов из X, удовлетворяющих свойству $\mathcal{C}$, то в этом случае пишут $A = \{x \in X \mid x \text{ удовлетворяет } \mathcal{C}\}$. Вместо черты $|$ часто употребляют знак двоеточия. Иногда множества описывают, перечисляя в фигурных скобках через запятую его элементы.

Примеры. 1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ — множество натуральных чисел.

2. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$ — множество целых чисел.

3. $\mathbb{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ — множество рациональных чисел.

4. $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

5. $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Перечислим кванторы (логические значки), которые употребляются для сокращения записи: $\forall$ (*любой* или *для любого*), $\exists$ (*существует* или *существует такой, что*), $\Longrightarrow$ (*следует*), $\Longleftrightarrow$ (*тогда и только тогда* или *эквивалентно*).

1.2 Числовые промежутки

Числовая прямая — это некоторая прямая, на которой выбрано положительное направление, некоторая начальная точка (начало координат или нуль) и масштаб. Из школьного курса математики известно, что любому числу из $\mathbb{R}$ можно сопоставить единственную точку на этой прямой. Таким образом, числовая прямая — это геометрический образ для более наглядного представления действительных чисел. Впрочем, часто эту прямую отождествляют с множеством действительных чисел и множество $\mathbb{R}$ называют числовой прямой.

Рассмотрим различные виды числовых промежутков на прямой.

1. *Отрезок* или *сегмент* $[a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$.

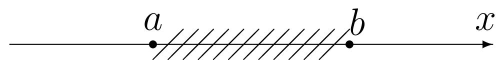

Рис. 2

2. *Интервал* $(a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

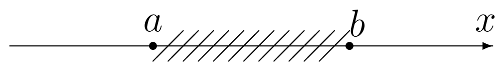

Рис. 3

3. *Полуинтервал* или *полуотрезок, полусегмент* $[a;b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$.

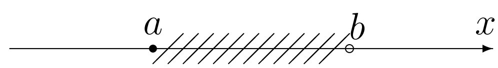

Рис. 4

4. *Полуинтервал* $(a;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$.

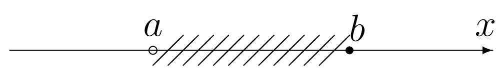

Рис. 5

Промежутки типов 1–4 называются ограниченными числовыми промежутками. Кроме того, есть 5 типов неограниченных.

5. $[a;+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$.

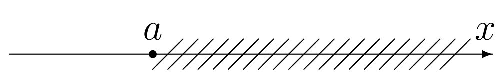

Рис. 6

6. $(a;+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.

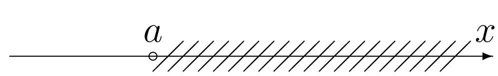

Рис. 7

7. $(-\infty;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$.

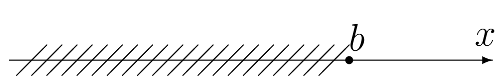

Рис. 8

8. $(-\infty; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.

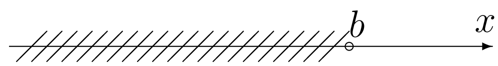

Рис. 9

9. $(-\infty; +\infty) =: \mathbb{R}$.

1.3 Основные операции над множествами

Пусть X — некоторое множество (универсум), будем рассматривать его подмножества A, B, $C, \ldots$.

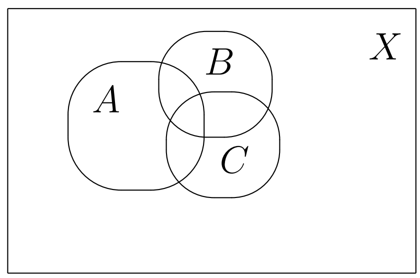

Рис. 10.

1. **Операция объединения.** Пусть A, B — два подмножества в X. *Объединением* этих множеств называется множество

$$A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

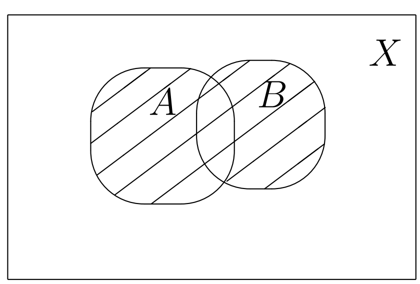

Рис. 11.

2. **Операция пересечения.** *Пересечением* множеств A, $B \subset X$ называется множество

$$A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

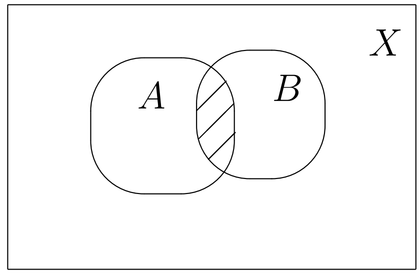

Рис. 12.

Свойства операций объединения и пересечения.

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность).

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность).

3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность).

Доказательство. Докажем первое равенство пункта 3) (второе доказать самостоятельно!).

а) Рассмотрим любой элемент $x \in A \cup (B \cap C)$. По определению, тогда $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если же $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Значит, опять-таки $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, откуда $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Вывод: $x \in A \cup (B \cap C) \Longrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Значит, $A \cup (B \cap C) \subset$ $\subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

б) Пусть теперь $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Значит, $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup (B \cap C)$. Если же $x \notin A$, то из условий $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$ следует, что $x \in B$ и $x \in C$. Значит, $x \in B \cap C$, откуда $x \in A \cup (B \cap C)$. Вывод: $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Longrightarrow x \in A \cup (B \cap C)$. Это означает, что $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Из а) и б) следует нужное равенство.

3. **Операция разности.** Пусть A, $B \subset X$. *Разностью* множеств A и B называется множество

$$A \setminus B := \{x \in X \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

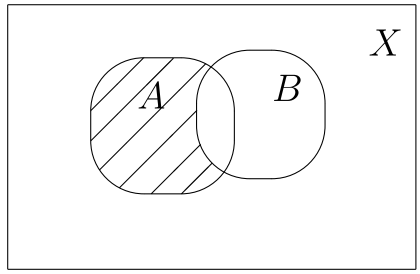

Рис. 13.

Простейшие свойства.

1) $A \setminus A = \emptyset$.

2) $A \setminus \emptyset = A$.

3) Если $A \subset B$, то $A \setminus B = \emptyset$.

4. **Операция дополнения.** Пусть $A \subset X$. *Дополнением* множества A называется множество

$$A^c := \{x \in X \mid x \notin A\} = X \setminus A.$$

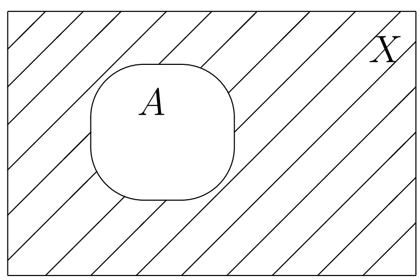

Рис. 14.

Замечание 1. Операция дополнения зависит от универсума X!

Простейшие свойства.

1) $\emptyset^c = X \setminus \emptyset = X$.

2) $X^c = X \setminus X = \emptyset$.

3) $(A^c)^c = \{x \in X \mid x \notin A^c\} = \{x \in X \mid x \in A\} = A$.

4) $A \setminus B = A \cap B^c$. Доказательство. $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$.

5) $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$. Доказательство. $x\in(A\cap B)^c \Leftrightarrow x\notin A\cap B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ неверно, что $x\in A$ и $x\in B$ одновременно $\Leftrightarrow x\notin A$ или $x\notin B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in A^c$ или $x\in B^c \Leftrightarrow x\in A^c\cup B^c$.

6) $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$. Доказательство. $x\in(A\cup B)^c \Leftrightarrow x\notin A\cup B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ неверно, что $x\in A$ или $x\in B \Leftrightarrow x\notin A$ и $x\notin B \Leftrightarrow x\in A^c$ и $x\notin B^c \Leftrightarrow x\in A^c\cap B^c$.

Замечание 2. Свойства 5) и 6) называются законами де Моргана. Подумайте и объясните, почему при отрицании "и" меняется на "или", а "или" на "и"!

7) $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$. Доказательство. $A\setminus(B\cap C) \overset{4)}{=}$ $= A\cap(B\cap C)^c \overset{5)}{=} A\cap(B^c\cup C^c) \overset{\text{дистр.}}{=} (A\cap B^c)\cup(A\cap C^c) \overset{4)}{=} (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

8) $A\setminus(A\setminus B) = A\cap B$. Доказательство. $A\setminus(A\setminus B) \overset{4)}{=} A\cap(A\cap B^c)^c \overset{5)}{=}$ $= A\cap(A^c\cup B^{cc}) = A\cap(A^c\cup B) \overset{\text{дистр.}}{=} (A\cap A^c)\cup(A\cap B) = A\cap B$.

5. **Произведение двух множеств.** Пусть A, B — два множества. *Их произведением (декартовым)* называется множество

$$A\times B := \{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}.$$

Элементами $A\times B$ являются упорядоченные пары элементов (x,y), первый из которых принадлежит A, а второй — B. Рассмотрим два элемента $z_k = (x_k,y_k)\in A\times B$, $k=1,\ 2$. Пары z_1 и z_2 совпадают тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Элементы x, y называются *компонентами* или *координатами* элемента (пары) $z=(x,y)$.

Примеры. 1) $\mathbb{R}\times\mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$ — числовая плоскость.

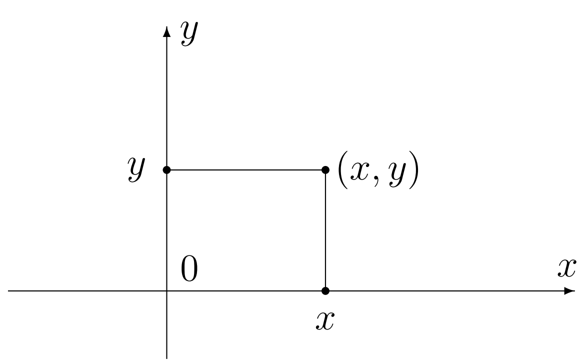

Рис. 15.

2) Произведение отрезков $[a;b]\times[c;d]$. Если интерпретировать пары действительных чисел как точки плоскости, то произведение $[a;b]\times[c;d]$ является прямоугольником.

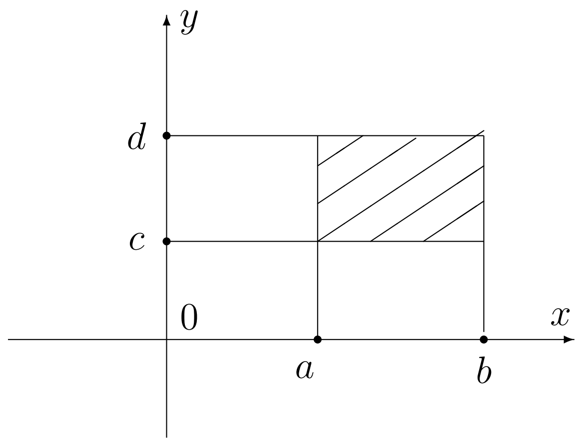

Рис. 16.

3) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^2$.

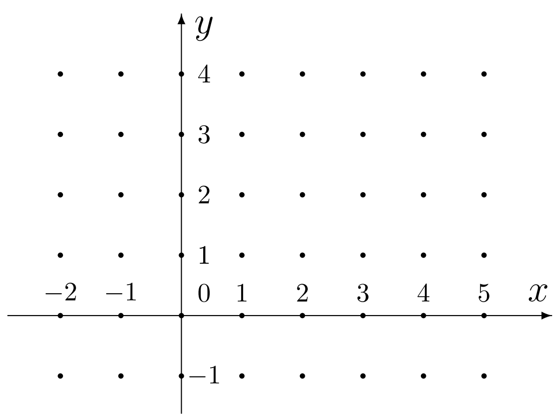

Рис. 17.

6. **Произведение конечного числа множеств.** Пусть A_1, $A_2,\ldots,A_n$ — система из n множеств. *Декартовым произведением* множеств A_1, A_2, $\ldots$, A_n называется множество $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$, состоящее из упорядоченных наборов $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ таких, что $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2,\ldots,x_n\in X_n$. Если $z=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, то x_i называется i-й *компонентой* или *координатой* z.

Если $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$, то произведение $A\times A\times\cdots\times A$ называется n-й степенью множества A и обозначается A^n. Например,

$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\,\text{раз}} = \mathbb{R}^n$ есть *вещественное n-мерное евклидово пространство*, $\underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n\,\text{раз}} = \mathbb{C}^n$ — *комплексное n-мерное евклидово пространство.*

1.4 Функции (отображения)

Понятие функции — основное понятие в математике. Пусть X, Y — два множества. *Функцией f, определенной на множестве X, со значениями в множестве Y или функцией из X в Y или отображением множества X в множество Y* называется соответствие, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет некоторый элемент $y \in Y$. При этом пишут $f : X \to Y$.

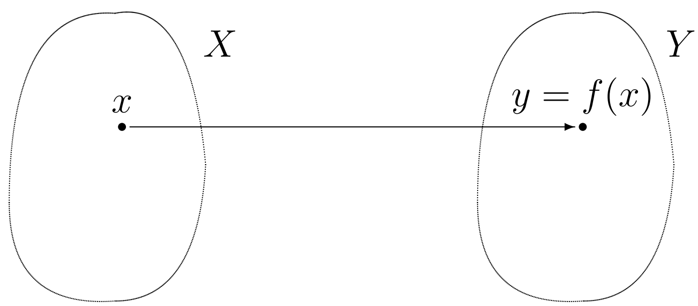

Рис. 18.

Подчеркнем, что элементу x сопоставляется только один элемент y. Этот элемент называется *значением функции f в точке x* или *на элементе x*, в свою очередь x называется *аргументом функции f*. Пишут $y = f(x)$.

1.5 Образ и прообраз множества

Пусть $f : X \to Y$ и $A \subset X$. *Образом множества A* при отображении f называется множество

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

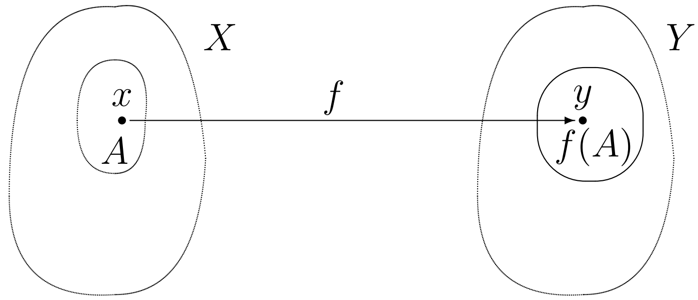

Рис. 19.

Пример. Пусть $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $A = [-1; 3]$. Тогда образ $f(A) = [0; 9]$.

Пусть множество $B \subset Y$. *Прообразом множества* B при отображении f называется множество $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Пример. Пусть $f(x) = x^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B = [0; 9]$. Тогда прообраз $f^{-1}(B) = [-3; 3]$.

Замечание. Из приведенных примеров следует, что если $B = f(A)$, то не всегда отсюда следует, что $A = f^{-1}(B)$. Тем не менее, для любой функции $f : X \to Y$ справедливы свойства (докажите их самостоятельно!):

1) $f(f^{-1}(B)) = B$ для любого множества $B \subset Y$.
2) $A \subset f^{-1}(f(A))$ для любого множества $A \subset X$.
3) $f(\emptyset) = \emptyset$.
4) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

1.6 Типы функций: сюръекции, инъекции, биекции

Пусть $f : X \to Y$. Тогда говорят, что функция действует из множества X **в** множество Y.

Определение 1. Если $f(X)$ совпадает с Y, т. е. для любого $y \in Y$ существует по крайней мере одно $x \in X$ такое, что $f(x) = y$, то отображение f называют *сюръекцией* или отображением X **на** Y. Отображение f сюръективно тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = y$ имеет по крайней мере одно решение для любой правой части $y \in Y$.

Определение 2. Если для любого $y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет не более одного решения, то отображение f называется *взаимно-однозначным* или *инъекцией*. Отображение f инъективно тогда и только тогда, когда для любых x_1, $x_2 \in X$ из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$.

Определение 3. Отображение f называется *биекцией*, если f одновременно сюръективно и биективно, т. е. f — взаимно-однозначно отображает X на Y. Отображение f биективно тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет одно и только одно решение.

Мы можем схематично изобразить функцию, рисуя два множества X и Y и соединяя для всех $x \in X$ точки x и $f(x) = y$ стрелками.

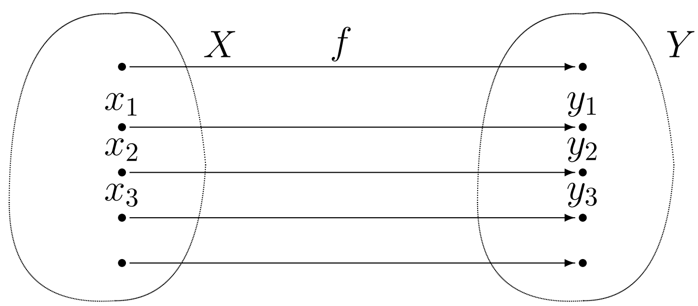

Рис. 20.

Тогда отображение f сюръективно, если концы стрелок заполняют все множество Y; f инъективно, если концы разных стрелок не совпадают, когда их начала различны; f биективно, если выполнены оба предыдущих условия.

Если f биективно, то определим обратную функцию $f^{-1} : Y \to X$, действующую по правилу: $x = f^{-1}(y)$, если $f(x) = y$. Эта обратная функция определяется путем "обращения направления стрелок": если для "прямой" функции стрелка идет из точки x в точку y, то для обратной стрелка идет из y в x.

1.7 Сужение отображения

Пусть $f(x)$ — некоторое отображение из X в Y и A является подмножеством X. *Сужением* отображения f на множество A называется отображение $f|_A : A \to Y$, действующее по правилу $f|_A(x) = f(x)$, $x \in A$. Таким образом, $f|_A$ действует точно так же, как и f, однако область определения f **у́же**, чем у f. Этим объясняется название понятия "сужение".

Пример. Пусть $f : \mathbb{R} \to [-1; 1]$, $f(x) = \sin x$. Тогда f является сюръекцией, но не биекцией. Однако если сузить f на отрезок $A = [-\pi/2; \pi/2]$, то $g = f|_A$ — биекция. Обратная к ней функция g^{-1} — это функция $\arcsin$.

1.8 График отображения

Пусть $f : X \to Y$. *Графиком функции* f называется множество

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

Таким образом, график состоит из всевозможных пар $(x, f(x))$, когда x пробегает все множество X.

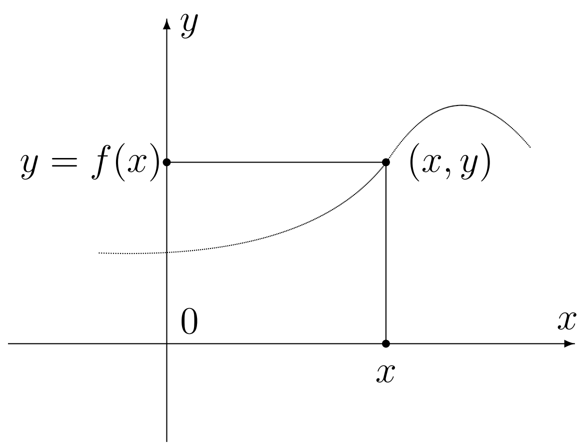

Рис. 21.

1.9 Суперпозиция отображений (сложная функция)

Пусть даны три множества X, Y Z, и функция f действует из X в Y, а функция g — из Y в Z. Тогда можно определить *суперпозицию* $g \circ f$ функций f и g или *сложную функцию* как отображение, действующее по правилу $g \circ f(x) := g(f(x))$, $x \in X$. На диаграмме сложная функция получается объединением (составлением) стрелок: если стрелка для f соединяет x и y, а стрелка для g — y и z, то стрелка для $g \circ f$ соединяет x и z.

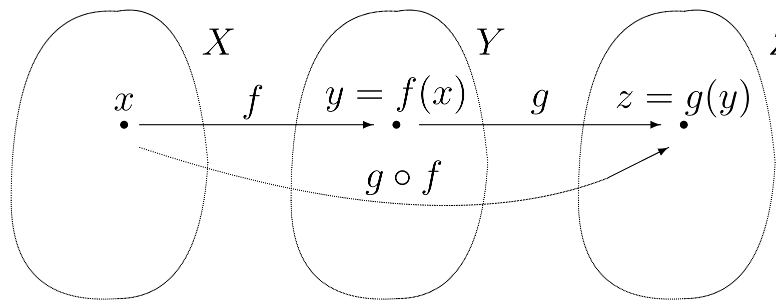

Рис. 22.

Пример. Рассмотрим функцию $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, действующую по правилу $h(x) = \sqrt{e^x + 2}$. Эта функция является суперпозицией функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x + 2$, и $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Здесь $\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел.

2 Последовательности и семейства

2.1 Последовательности

Рассмотрим числа

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

где знаменатели дробей принадлежат множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Это — пример последовательности действительных чисел. Более общий пример получится, если рассмотреть произвольную функцию $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и числа

$$x(1), x(2), x(3), \ldots, x(n), \ldots .$$

(Если $x(n) = 1/n$, то получаем предыдущий пример.) Это дает основание для введения следующего определения, играющего важнейшую роль в математике.

Последовательностью в множестве X называется отображение $x : \mathbb{N} \to X$. Таким образом последовательность — это произвольная функция, заданная на множестве натуральных чисел.

Как правило, вместо $x(n)$ пишут x_n, т. е. аргумент n функции x записывается без скобок в виде нижнего индекса. Отметим, что отображение x не обязано быть инъективным!

Последовательность $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется (*вещественной*) *числовой последовательностью*. Для последовательностей используют различные обозначения: $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, (x_n) или даже просто x_n.

Примеры. 1) Рассмотрим числовую последовательность

$$\left(1,\ \frac{1}{2}\ , 1,\ \frac{1}{3}\ , 1,\ \frac{1}{4}\ , \ldots, 1,\ \frac{1}{n}\ , \ldots\right).$$

Множество значений последовательности

$$x(\mathbb{N}) = \left\{1,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ , \ldots,\ \frac{1}{n}\ , \ldots\right\}.$$

2) Для последовательности $(-1,\ 1, -1,\ 1, \ldots, -1,\ 1, \ldots)$ множество значений $x(\mathbb{N}) = \{1; -1\}$.

В обоих приведенных примерах функция x не является инъективной.

Пусть $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ — некоторая последовательность элементов в X. Пусть $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Пример. Пусть $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^{n-1}, \ldots)$ — последовательность степеней двойки. Тогда последовательности

$$(1, 4, 16, 64, \ldots, 2^{2n-2}, \ldots) \quad \text{и} \quad (2, 4, 16, 256, \ldots, 2^{2^{n-1}}, \ldots)$$

являются ее подпоследовательностями.

2.2 Семейства элементов. Объединение и пересечение семейства множеств.

Пусть T, X — два множества. *Семейством элементов в* X, индексированным множеством T, называется любое отображение $x : T \to X$. Семейство обозначается $(x_t)_{t\in T}$ или просто (x_t). (Как и в случае последовательностей, здесь $x_t = x(t)$.)

Понятие семейства является естественным обобщением понятия последовательности. Последовательность — это семейство, индексируемое множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Пусть $(x_t)_{t\in T}$ — некоторое семейство элементов в X и $L \subset T$. Тогда можно рассмотреть сужение $x|_L$. Это сужение, т. е. семейство $(x_t)_{t\in L}$ называется *подсемейством* семейства $(x_t)_{t\in T}$.

Пусть $(A_t)_{t\in T}$ — некоторое семейство множеств. Предполагается, что все A_t являются подмножествами некоторого универсума X.

Объединением семейства множеств $(A_t)_{t\in T}$ называется множество

$$\bigcup_{t\in T} A_t := \{x \in X \mid \exists t \in T \text{ такое, что } x \in A_t\}.$$

Пересечением семейства множеств $(A_t)_{t\in T}$ называется множество

$$\bigcap_{t\in T} A_t := \{x \in X \mid x \in A_t \ \forall t \in T\}.$$

Если $T = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, то пишут

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{n=1}^{m} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m,$$

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{n=1}^{m} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m.$$

Если $T = \mathbb{N}$, то пишут

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots,$$

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots.$$

Для семейств справедливы следующие *обобщения законов де Моргана:*

1) $\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)^c = \bigcap_{t\in T} A_t^c$,

2) $\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^c = \bigcup_{t\in T} A_t^c$.

Доказательство. 1) $x \in \left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{t\in T} A_t \Leftrightarrow$ неверно, что существует такой индекс $t \in T$, что $x \in A_t \Leftrightarrow$ для всех индексов $t \in T$ имеем $x \notin A_t \Leftrightarrow \forall t \in T (x \in A_t^c) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{t\in T} A_t^c$.

2) $x \in \left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{t\in T} A_t \Leftrightarrow$ неверно, что для любого $t \in T$ выполняется условие $x \in A_t \Leftrightarrow$ существует $t \in T$ такое, что $x \notin A_t$ $\Leftrightarrow \exists t \in T (x \in A_t^c) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{t\in T} A_t^c$.

2.3 Равномощные множества

Два множества A, B называются *равномощными*, если существует биекция $f : A \to B$. Если A и B равномощны, то пишем $A \sim B$. Отметим свойства введеного отношения $\sim$.

1) $A \sim A$ для любого множества A (рефлексивность). В качестве биекции $f : A \to A$ можно взять тождественное отображение id_A, которое определено следующим образом: $\mathrm{id}_A(x) = x,\ x \in A$.

2) Для любых множеств A и B если $A \sim B$, то $B \sim A$ (симметричность). Для доказательства достаточно заметить, что если $f : A \to B$ — биекция, то $f^{-1} : B \to A$ также биекция.

3) Для любых трех множеств A, B и C, если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивность).

Доказательство. Если $f : A \to B$ и $g : B \to C$ — биекции, то $g \circ f : A \to C$ — также биекция.

Множество A называется *конечным*, если оно равномощно множеству $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$. При этом число m называется *количеством элементов* в A.

По определению количество элементов в $\emptyset$ полагается равным нулю.

Множество называется *бесконечным*, если оно не пусто и не конечно.

Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$, т. е. существует биекция $f : \mathbb{N} \to A$. Счетное множество A можно отождествить с последовательностью с попарно различными членами, т. е. $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$.

2.4 Теоремы о счетных множествах

Теорема 1. *У любого бесконечного множества существует счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть A — бесконечное множество. Так как $A \neq \emptyset$, то существует элемент $a_1 \in A$. Множество $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$, так как A — бесконечное множество. Значит, существует элемент $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Множество $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$, так как A — бесконечное множество. Поэтому существует $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$. Продолжая этот процесс по индукции строим последовательность (a_n) такую, что $a_n \in A \setminus \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}\}$. Тогда все a_n попарно различны и $B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ — счетное подмножество множества A. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если A — счетное множество и B — его бесконечное подмножество, то B также счетно.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$. Найдем минимальный номер n_1 такой, что $a_{n_1} \in B$. Далее найдем минимальный номер n_2 такой, что $n_2 > n_1$ и $a_{n_2} \in B$. Продолжим этот процесс. По индукции строим последовательность $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Если n_k определен, то n_{k+1} определим как минимальный номер такой, что $n_{k+1} > n_k$ и $a_{n_{k+1}} \in B$. В результате, перебирая все натуральные n, мы встретим среди a_n все элементы из B. Таким образом, $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\}$. Значит элементы множества B совпадают с членами некоторой последовательности, которые попарно различны. Следовательно, B счетно. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если $A_1,\ A_2, \ldots, A_k$ — счетные множества, то их объединение $\cup_{i=1}^k A_i$ также счетно.*

Доказательство. Так как A_i — счетные множества, то можно записать их в виде $A_i = \{a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, \ldots a_{ni}, \ldots\}$, $1 \le i \le k$. Запишем элементы всех множеств A_i в виде бесконечной таблицы с k строками:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} & \ldots \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{n2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & \ldots & a_{nk} & \ldots \end{array}$$

Будем пересчитывать элементы множества $B = \cup_{i=1}^k A_i$ следующим образом. Любой элемент этого множества встречается по крайней мере один раз в этой таблице. Если множества A_i между собой не пересекаются, то элементы множества B можно представить в виде членов последовательности, выписывая элементы таблицы в том порядке, в котором они встречаются, если двигаться вниз по столбцам, сначала по первому, затем — по второму и т. д.:

$$B = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2k}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk}, \ldots\}.$$

Если же некоторые множества между собой пересекаются, то может оказаться, что некоторое из a_{ji} уже встречалось ранее при обходе таблицы описанным выше образом. В этом случае мы не выписываем его дважды и просто пропускаем этот элемент. Ясно, что множество B бесконечно, поэтому процесс никогда не закончится. Таким образом, B счетно. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если $A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots, A_n, \ldots$ — счетное семейство счетных множеств, то множество $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ также счетно.*

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы выпишем элементы множеств $A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots, A_n, \ldots$ в виде бесконечной таблицы, однако теперь у этой таблицы и число строк и число столбцов будут бесконечными:

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} & \ldots \\
a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{n2} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} & \ldots & a_{nk} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Элементы таблицы можно выписать в виде последовательности $(a_{11}, a_{12}, a_{21},\quad a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots)$. Порядок расположения элементов a_{ji} следующий. Сначала выписываем элементы a_{ji}, у которых сумма $j+i$ равна 2, затем 3, 4 и т. д. по возрастанию. Если у элементов a_{ji} a_{kl} одинаковая сумма индексов: $j+i = k+l$, то раньше выписываем элемент, у которого меньше первый индекс. Таким образом мы выпишем все элементы таблицы. Как и при доказательстве теоремы 3, если какой-либо элемент уже встречался ранее, его второй раз не выписываем. В результате элементы множества $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ представлены как элементы последовательности с попарно различными членами, значит это множество счетно. Теорема доказана.

Теорема 5. *Если $A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots, A_k$ — конечное число счетных множеств, то их произведение $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ также счетно.*

Доказательство. По определению $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ состоит из упорядоченных наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ таких, что $a_i \in A_i$, $1 \le i \le k$. Докажем индукцией по числу множеств k, что $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ счетно.

Пусть $k = 1$. Тогда $A = A_1$ по условию теоремы счетно.

Предположим, что теорема доказана для любых счетных $(k-1)$

множеств. Тогда $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{k-1}$ счетно. Представим A в виде

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \bigcup_{a_k^* \in A_k} B(a_k^*), \tag{1}$$

где $B(a_k^*) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k^*) \mid a_i \in A_i, 1 \le i \le k-1\}$.

Для любого $a_k^* \in A_k$ множество $B(a_k^*) \sim A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{k-1}$. Биекция между $B(a_k^*)$ и $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{k-1}$ осуществляется по правилу: $f : (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k^*) \mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$. Так как по предположению индукции множество $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{k-1}$ счетно, то и $B(a_k^*)$ также счетно. Таким образом, в силу (1) и теоремы 4 множество A счетно. Теорема доказана.

2.5 Примеры счетных и несчетных множеств

1) Множество $\mathbb{Z}$ счетно. Действительно, представим это множество в виде $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$, где $\mathbb{N}' = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$. Множество $\mathbb{N}'$ счетно (постройте биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}'$!). По теореме 3 множество $\mathbb{Z}$ счетно.

2) Множество $\mathbb{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z}, n \ne 0\}$ счетно. Построим инъективное отображение $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Для любого ненулевого числа $q \in \mathbb{Q}$ выберем его представление в виде несократимой дроби $q = m/n$, где $n > 0$. Сопоставим q пару $\varphi(q) := (m, n)$. По определению полагаем $\varphi(0) = (0, 1)$. Ясно, что φ —инъекция, поэтому $\mathbb{Q} \sim \varphi(\mathbb{Q})$. Докажем, что $\varphi(\mathbb{Q})$ счетно. Так как $\mathbb{Q}$ бесконечно, то и равномощное ему множество $\varphi(\mathbb{Q})$ также бесконечно. По теореме 5 множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ счетно. Значит, $\varphi(\mathbb{Q})$ является бесконечным подмножеством счетного множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. По теореме 2 множество $\varphi(\mathbb{Q})$ счетно. Поэтому и $\mathbb{Q}$ счетно.

3) Множества $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ счетны для любого $n \in \mathbb{N}$ по теореме 5.

4) Множество A многочленов $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k$ с рациональными коэффициентами a_k счетно. Действительно, $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k — множество многочленов с рациональными коэффициентами, степень которых равна k. Множество A_k равномощно $\mathbb{Q}^{k+1}$. Биекция между этими множествами строится по правилу:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k \mapsto (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Значит, A_k — счетные множества, и по теореме 4 множество A счетно.

Множество называется *несчетным*, если оно бесконечно и не является счетным.

5) Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно.

Доказательство. Известно, что любое действительное число однозначно представимо в виде бесконечной десятичной дроби, у которой отсутствует период (9), если число рациональное. При этом допускается период (0).

Предположим, что $\mathbb{R}$ счетно. Тогда по теореме 1 множество $[0;1)$ —также счетное множество. Занумеруем его элементы натуральными числами, т. е. представим $[0;1)$ в виде $[0;1) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Для каждого x_k запишем указанное выше десятичное представление этого числа:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & = & 0, & a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & \ldots & a_1^{(k)} & \ldots \\
x_2 & = & 0, & a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} & \ldots & a_2^{(k)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_n & = & 0, & a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & a_n^{(3)} & \ldots & a_n^{(k)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Построим дробь, которая соответствует числу x из множества $[0;1)$, в записи которой отсутствует период (9) и которая не встречается среди x_k. Пусть $b^{(1)}$ — любая цифра, отличная от $a_1^{(1)}$ и 9, $b^{(2)}$ — любая цифра, отличная от $a_2^{(2)}$ и 9, и т. д., $b^{(n)}$ — любая цифра, отличная от $a_n^{(n)}$ и 9. Тогда $x = 0, b^{(1)} b^{(2)} b^{(3)} \ldots b^{(k)} \ldots$ является искомым числом. С одной стороны, $x \in [0;1)$, с другой стороны, x не совпадает ни с одним элементом x_n из этого множества. Полученное противоречие доказывает несчетность $\mathbb{R}$.

6) Любой числовой промежуток, отличный от точки, является несчетным множеством.

3 Числовая прямая

3.1 Аксиоматическое построение числовой прямой

Для более точного представления о числовой прямой $\mathbb{R}$ следует более четко определить это понятие. Рассмотрим свойства числовой прямой, которые кладутся в основу ее аксиоматического определения.

1) $\mathbb{R}$ — поле (характеристики 0), т. е. на $\mathbb{R}$ введены две бинарные операции — сложение "$+$" и умножение "$\cdot$", причем $\mathbb{R}$ является коммутативной группой по сложению, а $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ — коммутативной группой по умножению (0 — нейтральный элемент относительно операции сложения). При этом имеет место дистрибутивность сложения относительно умножения.

2) На $\mathbb{R}$ определено отношение порядка "$<$", удовлетворяющее условиям:

а) $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$ выполняется одно и только одно из условий:

$$x < y,\ y < x \quad \text{или} \quad x = y.$$

б) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ из условий $x < y$, $y < z$ следует, что $x < z$ (транзитивность).

3) Согласованность отношения порядка с арифметическими операциями.

а) $\forall x,\ y,\ c \in \mathbb{R}$ $(x < y \ \Rightarrow\ x + c < y + c.)$

б) $\forall x,\ y,\ c \in \mathbb{R}$ $(x < y$ и $c > 0 \ \Rightarrow\ cx < cy$.

4) Аксиома Архимеда. Обозначим через 1 единичный элемент группы $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Этот элемент является образующим циклической группы $\mathbb{Z}$ (по сложению). Поскольку характеристика поля равна 0, группа бесконечна. Она содержит элементы $1,\ 1+1 =: 2,\ 2+1 =: 3, \ldots, (n-1)+1 =: n$ и т. д.. Обратные к ним элементы (относительно операции умножения) обозначим $1/n$. Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Аксиома Архимеда. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $1/n < \varepsilon$.

5) Существование точной верхней грани.

Приведем несколько необходимых определений. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Элемент $a \in A$ называется *наибольшим элементом* множества A, если $x \le a$ для любого $x \in A$. Элемент $a \in A$ называется *наименьшим элементом* множества A, если $x \ge a$ для любого $x \in A$.

Пример. Рассмотрим множество $A = [0; 1)$. Наименьший элемент множества A — это точка 0. Наибольшего элемента в A не существует.

Итак, не всегда множество обладает минимальным и максимальным элементами. Однако можно определить понятие точной верхней (нижней) грани, которое в некотором смысле заменяет понятие максимального (минимального) элемента.

Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Точка $y \in \mathbb{R}$ называется *мажорантой множества* A, если $x \leq y$ для любого $x \in A$. Множество A называется *ограниченным сверху*, если существует по крайней мере одна мажоранта множества A.

Если среди мажорант множества существует наименьшая c, то говорят, что c — это *точная верхняя грань* или *супремум множества* A. Пишут $c = \sup A$ или $c = \sup_{x \in A} x$.

Аналогично точка $y \in \mathbb{R}$ называется *минорантой множества* A, если $x \geq y$ для любого $x \in A$. Множество A называется *ограниченным снизу*, если существует по крайней мере одна миноранта множества A.

Если среди минорант множества существует наибольшая d, то говорят, что d — это *точная нижняя грань* или *инфимум множества* A. Пишут $d = \inf A$ или $d = \inf_{x \in A} x$.

Пример. Рассмотрим множество $A = [0; 1)$. Множество его мажорант — это $[1; +\infty)$. Оно содержит наименьший — точку 1. Таким образом, $\sup A = 1$. Множество минорант — $(-\infty; 0]$. Значит, $\inf A = 0$.

Упражнение. Доказать, что множество мажорант (минорант) любого непустого множества либо пусто, либо является бесконечным числовым промежутком.

Следующее условие аксиоматизируется, т. е. кладется в основу модели числовой прямой.

Существование точной верхней грани. Любое непустое ограниченное сверху множество обладает точной верхней гранью.

Справедлива

Теорема. *Пусть* $(\mathbb{R}_1, <_1, +_1, \cdot_1)$ *и* $(\mathbb{R}_2, <_2, +_2, \cdot_2)$ — *две модели числовой прямой, удовлетворяющие аксиомам* 1)–5). *Тогда существует биекция* $\varphi : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2$ *такая, что*

1) *φ является изоморфизмом полей, т. е. для любых x, $y \in \mathbb{R}_1$*

$$\varphi(x +_1 y) = \varphi(x) +_2 \varphi(y), \quad \varphi(x \cdot_1 y) = \varphi(x) \cdot_2 \varphi(y);$$

2) *φ сохраняет отношение порядка, т. е. для любых x, $y \in \mathbb{R}_1$ если $x <_1 y$, то $\varphi(x) <_2 \varphi(y)$.*

Таким образом, фактически аксиомы 1)–5) определяют $\mathbb{R}$ единственным образом.

Отметим, что можно использовать вместо аксиомы 5) другие эквивалентные ей условия. Например, можно заменить 5) условием

$5')$ Если A, $B \subset R$ — два непустых множества и для любых $x \in A$, $y \in B$ имеет место неравенство $x \leq y$, то $\exists c : \forall x \in A,\ y \in B\ (x \leq c \leq y)$.

Теорема. *Аксиомы* 5) *и* $5')$ *эквивалентны.*

Доказательство. $5) \Rightarrow 5')$. Предположим, что у любого непустого ограниченного сверху множества существует точная верхняя грань. Пусть $A,\ B \neq \emptyset$ и $\forall x \in A,\ y \in B\ (x \leq y)$. Тогда любое $y \in B$ является мажорантой множества A. Пусть $c = \sup A$. Тогда $\forall x \in A\ (x \leq c)$, т. к. c — мажоранта множества A. С другой стороны $\forall y \in B\ (c \leq x)$, т. к. y — мажоранта множества A, а c — наименьшая мажоранта множества A. Значит, имеет место 5).

$5') \Rightarrow 5)$. Пусть A — непустое ограниченное сверху множество в $\mathbb{R}$. Тогда множество B его мажорант непусто и $\forall x \in A,\ y \in B\ (x \leq \leq c \leq y)$. В силу $5')$ имеем: $\exists c : \forall x \in A,\ y \in B\ (x \leq c \leq y)$. Из левого неравенства следует, что c — мажоранта множества A, а из правого – что c — наименьшая мажоранта. Таким образом, существует $\sup A = c$. Теорема доказана.

3.2 Характеристические свойства супремума и инфимума

Теорема 1 (характеристическое свойство точной верхней грани). *Пусть A — непустое ограниченное сверху множество и c — некоторая мажоранта множества A. Следующие два условия эквивалентны:*

1) $c = \sup A$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in A\ (y > c - \varepsilon)$.

Доказательство. $1) \Rightarrow 2)$. Пусть $c = \sup A$. Так как $\varepsilon > 0$, то $c - \varepsilon < c$. Значит, $c - \varepsilon$ не является мажорантой A, т. к. c — наименьшая мажоранта. Это означает, что не для всех $x \in A$ выполняется неравенство $x \leq c - \varepsilon$. Поэтому $\exists y \in A\ (y > c - \varepsilon)$.

1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что c — мажоранта A и имеет место 2). Покажем, что c – наименьшая мажоранта. Предположим противное. Тогда существует такая мажоранта d множества A, что $d < c$. Обозначим $\varepsilon = c - d$. Тогда для любого $x \in A$ выполняется неравенство $x \le d$, т. е. $x \le c - \varepsilon$. Это противоречит 2). Теорема доказана.

Теорема 2. *Если A — непустое ограниченное снизу множество в $\mathbb{R}$, то существует инфимум множества A.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$-A = \{x \in A \mid -x \in A\}.$$

Это множество непусто и ограничено сверху. Значит, существует $\inf(-A) = y$. Тогда $-y = \sup A$. Теорема доказана.

Теорема 3 (характеристическое свойство точной нижней грани). *Пусть A — непустое ограниченное снизу множество и d — некоторая мажоранта множества A. Следующие два условия эквивалентны:*

1) $d = \sup A$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in A \ (y < d + \varepsilon)$.

Упражнение. Докажите теорему 3.

3.3 Расширенная числовая прямая

В математическом анализе часто бывает удобно рассматривать расширение числовой прямой. Как правило, это расширение осуществляется добавлением одной или двух точек, которые называются бесконечно удаленными или просто бесконечностями. Мы рассмотрим модель, в которой добавляется две *бесконечно удаленные точки* — $+\infty$ и $-\infty$. При этом расширенную числовую прямую можно представлять как отрезок бесконечной длины, концами которого являются точки $+\infty$ и $-\infty$.

Итак, *расширенная числовая прямая* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

На $\overline{\mathbb{R}}$ можно определить арифметические операции (не для всех комбинаций точек) и отношение порядка:

1) Операция сложения (вычитания). Для любого $x \in \mathbb{R}$ полагаем

$$x + (+\infty) = x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$

$$x + (-\infty) = x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

Операция сложения коммутативна.

2) Операция умножения. Если $x > 0$, то по определению

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty, \quad x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty.$$

Если $x < 0$, то полагаем

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty, \quad x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty.$$

Кроме того, определим произведение бесконечно удаленных точек:

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Операция умножения также коммутативна.

3) Операция деления. По определению $x : (+\infty) = x : (-\infty) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

4) Отношение порядка. Для любого $x \in \mathbb{R}$ полагаем по определению $-\infty < x < +\infty$.

Для некоторых точек арифметические операции не определены, например, неопределенностями являются $(+\infty) - (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$, $\pm\infty / \pm\infty$ и некоторые другие. Почему это так, можно понять после ознакомления со свойствами пределов числовых последовательностей и функций.

Будем говорить, что непустое *множество* $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ *ограничено сверху*, если $\exists y \in \mathbb{R}$: $\forall x \in A$ $(x \leq y)$. Как и в случае множеств в $\mathbb{R}$ обозначим через $\sup A$ наименьшую мажоранту. Если непустое множество A ограничено сверху, $A \neq \{-\infty\}$, то в силу аксиомы 5) модели числовой прямой существует конечный $\sup A$. Если $A = \{-\infty\}$, то полагаем $\sup A = -\infty$. Наконец, если A не ограничено сверху, то по определению полагаем $\sup A = +\infty$.

Таким образом, у любого $A \neq \emptyset$ существует конечный или бесконечный супремум. Аналогично определяется инфимум непустых множеств в $\overline{\mathbb{R}}$. (Дайте строгое определение!) На расширенной числовой прямой он всегда существует.

Примеры. 1) $\sup \mathbb{N} = +\infty$, $\inf \mathbb{N} = 1$.

2) $\sup \mathbb{R} = +\infty$, $\inf \mathbb{R} = -\infty$.

Замечание. Существует еще одна модель расширенной числовой прямой, когда к $\mathbb{R}$ подсоединяется одна бесконечно удаленная точка, обозначаемая ∞.

4 Предел числовой последовательности

4.1 Окрестности точек в $\mathbb{R}$

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. *Окрестностью* или *ε-окрестностью точки a* называется множество $O_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Итак, ε-окрестность точки a — это интервал с центром в точке a ширины 2ε.

Теорема. *У любых двух различных точек a, $b \in \mathbb{R}$ существуют окрестности $O_\varepsilon(a)$ и $O_\varepsilon(b)$, которые не пересекаются.*

Доказательство. Пусть $a \neq b$ и $\varepsilon = |a-b|/2$. Тогда пересечение $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(a) = \emptyset$. Предположим противное. Тогда $\exists c \in O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(a)$, и справедливы неравенства $|c-a| < \varepsilon$, $|c-b| < \varepsilon$. В силу неравенства треугольника $|a-b| \leq |a-c| + |c-b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a-b|$. Получаем, что $|a-b| < |a-b|$ — противоречие. Теорема доказана.

4.2 Определение предела числовой последовательности

Определение предела числовой последовательности является важнейшим понятием математического анализа и требует хорошего осознания. Без знания и глубокого понимания этого понятия невозможно понять определения предела функции в точке, производной и интеграла.

Начнем с примера. Рассмотрим последовательность

$$(1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots).$$

Возьмем маленькую окрестность $O_\varepsilon(0)$ точки 0, например, пусть $\varepsilon = 10^{-6}$. Мы видим, что первые члены этой последовательности не лежат в $O_\varepsilon(0)$, однако, начиная с номера 1000001, все члены последовательности находятся в этой окрестности. Число ε можно взять другим, можно его уменьшить, но все равно все члены последовательности лежат в $O_\varepsilon(0)$, начиная с некоторого номера. Приведем примеры. Если $\varepsilon = 10^{-9}$, то $x_n \in O_\varepsilon(0)$ при $n \geq 10^9 + 1$. Если $\varepsilon = 10^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$ то $x_n \in O_\varepsilon(0)$ при

$n \geq 10^k + 1$. Наконец, для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем $x_n \in O_\varepsilon(0)$ при $n \geq N$, где N — любое натуральное число, большее $1/\varepsilon$. Таким образом, последовательность x_n неограниченно приближается к точке 0 по мере возрастания номеров n.

Теперь дадим определение предела последовательности.

Определение. Пусть (x_n) — числовая последовательность и точка $a \in \mathbb{R}$. Говорят, что *последовательность* (x_n) *сходится* к a или *предел последовательности* (x_n) равен a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, т. е. $x_n \in O_\varepsilon(a)$.

Замечание. Номер N определяется не единственным образом. Ясно, что если существует N такое, что для любого $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ и натуральное число $M > N$, то для любого $n \geq M$ также выполняется это неравенство. Отсюда следует, что если множество $\mathcal{N}$ таких номеров N непусто, то в $\mathcal{N}$ существует наименьший элемент $N^* = N^*(\varepsilon)$ и $\mathcal{N} = \{N^*, N^* + 1, N^* + 2, \ldots\}$. Нетрудно также показать, что если $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $N^*(\varepsilon_1) \geq N^*(\varepsilon_2)$. Иногда этот факт описывают словами, говоря, что чем меньше ε, тем труднее выбрать номер N^*. Отметим также, что во многих доказательствах ниже в качестве числа $N = N(\varepsilon)$ берется какой-нибудь из элементов бесконечного множества $\mathcal{N}$, не обязательно наименьший, т. е. $N^*(\varepsilon)$.

Если предел последовательности (x_n) равен a, то говорят также, что *последовательность* (x_n) *сходится к* a и пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$, $n \to \infty$.

Примеры. 1) Пусть $x_n = 1/n^2$. Покажем, что $x_n \to 0$, $n \to \infty$. Для этого покажем, что $|1/n^2 - 0| = 1/n^2 < \varepsilon$ при $n \geq N(\varepsilon)$ для некоторого $N(\varepsilon)$. Множество решений неравенства $1/n^2 < \varepsilon$ — это объединение двух промежутков $(-\infty; -1/\sqrt{\varepsilon})$ и $(1/\sqrt{\varepsilon}; +\infty,)$. Поскольку это множество содержит бесконечный промежуток вида $(a; +\infty)$, то искомое $N(\varepsilon)$ существует. В качестве $N(\varepsilon)$ можно взять любое натуральное число, большее $1/\sqrt{\varepsilon}$, например, $[1/\sqrt{\varepsilon}] + 1$. Здесь $[x]$ означает целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

2) Пусть $x_n = 1/a^n$, $a > 1$. Покажем, что $x_n \to 0$, $n \to \infty$. Имеем

$$\left|\frac{1}{a^n} - 0\right| = \frac{1}{a^n} < \varepsilon \Longleftrightarrow a^n > \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow n > \log_a \frac{1}{\varepsilon},$$

так как $a > 1$. Следовательно,

$$\left|\frac{1}{a^n} - 0\right| = \frac{1}{a^n} < \varepsilon$$

при $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon) = [\log_a \frac{1}{\varepsilon}] + 1$, если $\varepsilon < 1$. При $\varepsilon \geq 1$ можно положить $N(\varepsilon) = 1$.

4.3 Простейшие свойства пределов последовательностей

Теорема 1 (единственность предела). *Если числовая последовательность сходится и к точке a, и к точке b, то $a = b$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b,$$

но $a \neq b$. Выберем ε настолько малым, что $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \emptyset$. Так как $x_n \to a$, то $\exists N' \in \mathbb{N}$: $x_n \in O_\varepsilon(a)$ при $n \geq N'$. Аналогично, так как $x_n \to b$, то $\exists N'' \in \mathbb{N}$: $x_n \in O_\varepsilon(b)$ при $n \geq N''$. Пусть $N = \max(N', N'')$. Если $n \geq N$, то $n \geq N'$ и $n \geq N''$, значит, $x_n \in O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(a)$. Это противоречит тому, что пересечение $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(a)$ пусто. Теорема доказана.

Определение. *Числовая последовательность* (x_n) называется *ограниченной*, если существует такая константа $C > 0$, что $|x_n| \leq C$ $\forall n \geq 1$.

Теорема 2. *Если последовательность x_n сходится к некоторому пределу a, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $(x_n) \to a$, $n \to \infty$. Выберем $\varepsilon = 1$. По определению предела последовательности существует номер N_1 такой, что $\forall n \geq N_1$ выполняется неравенство $|x_n - a| < 1$. Тогда

$$|x_n| \leq |x_n - a| + |a| \leq |a| + 1, \quad n \geq N_1.$$

Пусть C — максимальное из чисел $|a| + 1$, $|x_1|$, $|x_2| \ldots, |x_{N_1}|$. Тогда $|x_n| \leq C$, $n \geq 1$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если последовательность* $x_n \to a$, *то любая ее подпоследовательность* x_{n_k} *сходится к* a.

Докажите самостоятельно.

Теорема 4. *Если из любой подпоследовательности* (x_{n_k}) *последовательности* (x_n) *можно выделить подпоследовательность* $(x_{n_{k_j}})$, *сходящуюся к точке* a, *то и вся последовательность* (x_n) *сходится к* a.

Доказательство. Предположим противное. Тогда неверно, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N \ (|x_n - a| < \varepsilon)$. Значит, $\exists \varepsilon > 0\colon \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N$ $(|x_n - a| \geq \varepsilon)$. Пусть $N = 1$. Тогда $\exists n_1 \geq 1\colon (|x_{n_1} - a| \geq \varepsilon)$. Пусть $N = n_1 + 1$. Тогда $\exists n_2 \geq n_1 + 1\colon (|x_{n_2} - a| \geq \varepsilon)$. По индукции строим последовательность $n_k \geq n_{k-1} + 1\colon (|x_{n_k} - a| \geq \varepsilon)$. Таким образом, мы построили подпоследовательность (x_{n_k}), удовлетворяющую условию: все ее члены лежат вне $O_\varepsilon(a)$. Поэтому никакая ее подпоследовательность $(x_{n_{k_j}})$ не может сходиться к a. Теорема доказана.

Упражнение. Запишем определение предела последовательности с использованием кванторов:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq N \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Что получится, если изменить некоторые из кванторов $\forall$ на $\exists$, а $\exists$ — на $\forall$? Что получится, если заменить знак $<$ на $\geq$? Рассмотрите все возможные варианты расстановки кванторов и знаков неравенства (всего возможно 16 различных вариантов). Что означают эти варианты? Пример одного из возможных случаев:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N}: \ \exists n \geq N \ |x_n - a| \geq \varepsilon.$$

4.4 Принцип стягивающихся отрезков

Теорема. *Пусть*

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \cdots \supset [a_n; b_n] \supset \cdots$$

— последовательность вложенных друг в друга отрезков.

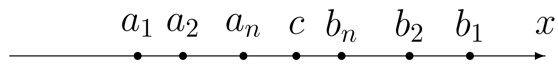

Рис. 23.

Если их длины $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам, т. е.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{c\}.$$

Доказательство. 1) Существование c. Имеем

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots ,$$

$$b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \cdots \ge b_n \ge \cdots .$$

Рассмотрим множества $A = \cup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}$, $B = \cup_{n=1}^{\infty}\{b_n\}$. Для любых $a_k \in A$, $b_l \in B$ имеем неравенство $a_k \le b_l$. Действительно, выберем наибольшее из чисел k, l. Пусть, например, $k \le l$. тогда $a_k \le$ $\le b_k \le b_l$. По аксиоме $5')$ модели числовой прямой существует точка $c \in \mathbb{R}$ такая, что для любых k, $l \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $a_k \le c \le b_l$. В частности, для любого $k \in \mathbb{N}$ $(a_k \le c \le b_k)$. Значит точка c принадлежит всем отрезкам $[a_k, b_k]$.

2) Единственность c. Предположим, что таких точек две, и они между собой не совпадают, т. е. c, $c' \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$, $c \ne c'$. Тогда отрезок с концами c, c' содержится в отрезке $[a_n; b_n]$ для всех n. Значит, $\delta = |c - c'| \le b_n - a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\varepsilon = \delta/2$. По определению предела для этого ε существует номер N такой, что при $n \ge N$ выполняется неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда при $n \ge N$

$$\delta \le b_n - a_n < \varepsilon = \delta/2,$$

т. е. $\delta < \delta/2$. Это противоречит тому, что $\delta > 0$. Теорема доказана.

Второе доказательство несчетности $\mathbb{R}$. Применим принцип стягивающихся отрезков для обоснования другого доказательства несчетности $\mathbb{R}$. Достаточно доказать, что $[0; 1]$ — несчетное множество. Предположим противное. Тогда точки $[0; 1]$ можно занумеровать, т. е. представить $[0; 1]$ в виде $[0; 1] = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$. Разобьем $[0; 1]$ на три части $[0; 1/3]$, $[1/3; 2/3]$ и $[2/3; 1]$. Существует по крайней мере один из этих отрезков, который не содержит точки a_1. Обозначим его через $[c_1; d_1]$. Разобьем это отрезок на три равные части и выберем ту из них, которая не содержит точки a_2. Обозначим эту часть через $[c_2; d_2]$. Продолжая этот процесс по индукции построим последовательность отрезков такую, что $[c_n; d_n] \subset [c_{n-1}; d_{n-1}]$, $a_n \notin [c_n; d_n]$ и $d_n - c_n \to 0$, $n \to \infty$.

По принципу стягивающихся отрезков существует точка $x \in \in \cap_{n=1}^{\infty}[c_n; d_n]$. Ясно, что $x \in [0; 1]$. Значит, существует такое n, что $x = a_n$. С другой стороны, по построению $a_n \notin [c_n; d_n]$. Это противоречит тому, что $a_n = x$ и $x \in [c_n; d_n]$. Несчетность $\mathbb{R}$ доказана.

4.5 Теорема Больцано-Вейерштрасса

По теореме 2 о пределе последовательностей любая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное неверно: существуют ограниченные последовательности, которые не сходятся.

Пример. Последовательность $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ограничена, т. к. $|x_n| \leq 1$, $n \geq 1$. Однако x_n не сходится, так как у нее существуют подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам ($x_{2n} \to 1$, $x_{2n-1} \to -1$).

Тем не менее, справедлива следующая

Теорема Больцано-Вейерштрасса. *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть x_n — ограниченная последовательность. Тогда существует константа C такая, что $|x_n| \leq C$, $n \geq 1$. Значит, $\forall n \geq 1$ $(x_n \in \Delta_1)$, где $\Delta_1 = [-C; C]$). Разобьем Δ_1 на две равные отрезка. По крайней мере один из этих отрезков содержит бесконечное число членов последовательности x_n. Обозначим этот отрезок через Δ_2 (если оба отрезка содержат бесконечное число членов x_n, то в качестве Δ_2 берем любой из отрезков). Отрезок Δ_2 разбиваем точно так же на два равных отрезка, из которых выбираем тот, который содержит бесконечное число членов последовательности. Обозначим его через Δ_3. Продолжая этот процесс по индукции строим последовательность вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$ таких, что каждый отрезок Δ_n содержит бесконечное число членов x_n. Длины отрезков Δ_n равны $l(\Delta_n) = C/2^{n-2}$.

При $n \to \infty$ $l(\Delta_n) \to 0$ (докажите это, исходя из определения предела последовательности!). По принципу стягивающихся отрезков существует точка $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$.

Покажем, что существует подпоследовательность x_{n_k}, которая сходится к точке a. Так как в Δ_1 содержится бесконечное число членов последовательности x_n, то $\exists n_1 \in \mathbb{N}$: $x_{n_1} \in \Delta_1$. Так как в Δ_2 содержится бесконечное число членов последовательности x_n, то $\exists n_2 \in \mathbb{N}$: $n_2 > n_1$ и $x_{n_2} \in \Delta_2$. По индукции строим последовательность номеров n_k такую, что $n_k > n_{k-1}$ и $x_{n_k} \in \Delta_k$, $k \geq 2$. Докажем, что $x_{n_k} \to a$, $k \to \infty$. Действительно, так как для любого k точки x_{n_k} и a лежат на отрезке Δ_k, то $|x_{n_k} - a| \leq l(\Delta_k)$. Из того, что $\lim_{k\to\infty} l(\Delta_k) = 0$ следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$: $\forall k \geq N$ $(l(\Delta_k) < \varepsilon)$. Тогда при $k \geq N$ $|x_{n_k} - a| \leq l(\Delta_k) < \varepsilon$. Значит, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Теорема доказана.

5 Топология вещественной прямой

5.1 Граница множества, открытые и замкнутые множества, внутренность и замыкание

При рассмотрении различных множеств на прямой $\mathbb{R}$ важную роль играет понятие границы множества. Граница множества A разбивает $\mathbb{R}$ на две части — внутренность A и внешность A. К внутренности относятся все точки A, не являющиеся граничными. Внешность A — это все те точки из $\mathbb{R}$, которые не являются ни граничными, ни внутренними. Граница множества A делится на два подмножества — множество граничных точек, которые принадлежат множеству A, и множество граничных точек, которые не принадлежат A. Одно из этих множеств может оказаться пустым. Если все граничные точки A принадлежат множеству A, то множество A называется замкнутым, если же ни одна граничная точка A не принадлежит A, то A называется открытым. Таким образом, все множества на прямой делятся на три типа: замкнутые, открытые и множества, которые не являются ни открытыми, ни замкнутыми.

Заметьте, что мы до сих пор не дали строгого определения границы. Для того, чтобы лучше понять это определение, представим себе множество A на диаграмме Венна (в качестве универсума удобно взять не прямоугольник, а всю плоскость) и попытаемся провести географическую интерпретацию. Будем представлять A как некоторую страну на географической карте, а дополнение A^c — как территорию остальных стран (чужая территория). По аналогии со случаем вещественной прямой можно ввести понятие ε-окрестности $O_\varepsilon(a)$ точки a на диаграмме (карте). По определению, это круг с центром в точке a радиуса ε. (Как можно будет убедиться далее, это определение имеет строгий математический смысл!) Какая же точка a на карте является граничной точкой множества (страны) A? Нетрудно сообразить, что в любой окрестности граничной точки a содержатся как точки страны A (своей территории), так и точки из A^c (чужой территории), т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad O_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \text{ и } O_\varepsilon(a) \cap A^c \neq \emptyset. \tag{1}$$

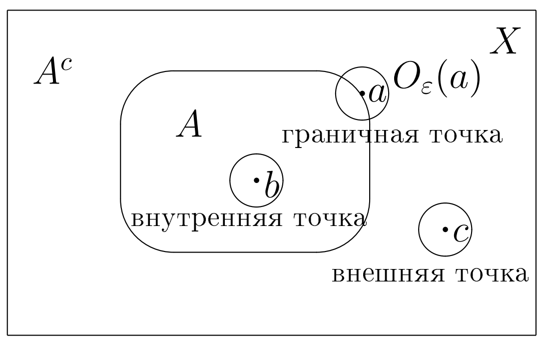

Рис. 24.

Утверждение "a — не граничная точка множества A" означает, что $\exists \varepsilon > 0$: $O_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$ или $O_\varepsilon(a) \cap A^c = \emptyset$. Если $\exists \varepsilon > 0$: $O_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$, то $O_\varepsilon(a) \subset A^c$. В этом случае ε-окрестность точки a состоит из точек "чужой" территории. Такая точка называется внешней. Если же $\exists \varepsilon > 0$: $O_\varepsilon(a) \cap A^c = \emptyset$, то $O_\varepsilon(a) \subset A$. В этом случае ε-окрестность точки a состоит из точек своей территории. Такие точки называется внутренними.

На рис. 24 точка a является граничной, точка b внутренней, а точка c — внешней.

Теперь можно дать строгие определения для множеств **на вещественной прямой.**

Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Точка $a \in A$ называется *граничной точкой множества* A, если имеет место (1).

Точка a называется *внутренней точкой множества* A, если $\exists\varepsilon > 0\colon O_\varepsilon(a) \subset A$, и *внешней точкой* A, если $\exists\varepsilon > 0\colon O_\varepsilon(a) \subset A^c$.

Множество граничных точек A называется *границей множества* A и обозначается A^Γ или ∂A. Множество внутренних точек A называется *внутренностью* A и обозначается A°.

Упражнения. 1) Доказать, что $A^\Gamma = (A^c)^\Gamma$.

2) Доказать, что $\mathbb{R} = A^\Gamma \cup A^\circ \cup (A^c)^\circ$. Из каких точек состоит $(A^c)^\circ$?

Множество A называется *открытым*, если оно не содержит ни одной своей граничной точки:

$$A \text{ открыто } \Leftrightarrow A \cap A^\Gamma = \emptyset \Leftrightarrow A = A^\circ.$$

Множество A называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки, т. е. $A^\Gamma \subset A$.

Примеры. 1) Множество $\mathbb{R}$ является одновременно открытым и замкнутым, так как $\mathbb{R}^\Gamma = \emptyset$.

2) Пустое множество $\emptyset$ является одновременно открытым и замкнутым, так как $\emptyset^\Gamma = \emptyset$.

3) Отрезок $[a;b]$ $(a < b)$ является замкнутым множеством, т. к. его граница $[a;b]^\Gamma = \{a,b\} \subset [a;b]$.

4) Интервал $(a;b)$ $(a < b)$ является открытым множеством, т. к. его граница $(a;b)^\Gamma = \{a,b\}$ не пересекается с $(a;b)$.

5) Числовые промежутки $[a;b)$, $(a;b]$ не являются ни открытыми, ни замкнутыми, так как их граница $\{a,b\}$ пересекается и с ними, и с их дополнениями.

Упражнение. Объясните, почему кроме $\mathbb{R}$ и $\emptyset$ на прямой не существует множеств, которые одновременно являются открытыми и замкнутыми.

Замыканием множества $A \subset \mathbb{R}$ называется множество $A \cup A^\Gamma$. Замыкание A обозначается $\overline{A}$ или A^-. Из определений вытекает, что $a \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ $(O_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset)$. Точки множества $\overline{A}$ называются *точками прикосновения* множества A. Ясно, что $A \subset A \cup A^\Gamma = \overline{A}$.

Теорема. *Следующие условия эквивалентны:*

1) A *замкнуто*;

2) $A = \overline{A}$;

3) A^c *открыто.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Множество A замкнуто $\Rightarrow$ $\overline{A} = A \cup A^\Gamma \subset \subset A \cup A = A$, следовательно, $\overline{A} \subset A$. Так как всегда $A \subset \overline{A}$, то $\overline{A} = A$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A = \overline{A} = A \cup A^\Gamma$. Тогда $A^\Gamma \subset \overline{A} = A$, т. е. $A^\Gamma \subset A$. Значит, A замкнуто.

1) $\Rightarrow$ 3). Пусть A — замкнутое множество, т. е. $A^\Gamma \subset A$. Докажем, что A^c открыто. Рассмотрим любую точку a множества A^c. Так как $A^\Gamma \subset \subset A$, то $A^c \subset (A^\Gamma)^c$, значит, $a \in (A^\Gamma)^c$, т. е. $a \notin A^\Gamma$. Но $A^\Gamma = (A^c)^\Gamma$, поэтому $a \notin (A^c)^\Gamma$. Итак, ни одна точка a множества A^c не является его граничной точкой. Значит, A^c — открытое множество.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть A^c открыто. Тогда множество A^c не содержит ни одной граничной точки, т. е. $(A^c)^\Gamma \cap A^c = \emptyset$. Значит $(A^c)^\Gamma \subset A$. Но $(A^c)^\Gamma = A^\Gamma$, поэтому $A^\Gamma \subset A$. Это означает, что A замкнуто. Теорема доказана.

5.2 Свойства открытых множеств

Теорема 1. *Если $(A_i)_{i \in I}$ — семейство открытых множеств в $\mathbb{R}$, то их объединение $\bigcup_{i \in I} A_i$ также открыто.*

Доказательство. Пусть $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Докажем, что a — внутренняя точка множества $\bigcup_{i \in I} A_i$. Так как $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, то $\exists j \in I : a \in A_j$. Множество A_j открыто, поэтому a — внутренняя точка множества A_j, т. е. $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $O_\varepsilon(a) \subset A_j$. Значит, $O_\varepsilon(a) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Таким образом, a — внутренняя точка множества $\bigcup_{i \in I} A_i$. Теорема доказана.

Замечание. Пересечение бесконечного семейства открытых множеств может не быть открытым. Например, пересечение

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{n}\,; 1 + \frac{1}{n} \right) = [-1; 1]$$

не открыто, хотя все интервалы $\left(-1 - \frac{1}{n}\,; 1 + \frac{1}{n}\right)$ открыты. Однако для конечных семейств справедлива

Теорема 2. *Если множества* A_1, $A_2, \ldots, A_n$ *открыты, то* $\bigcap_{i=1}^n A_i$ *— открытое множество.*

Доказательство. Пусть точка $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Тогда $\forall i = 1, \ldots, n$ $(a \in \in A_i)$. Так как множества A_i открыты, то $\forall i = 1, \ldots, n$ $\exists \varepsilon_i > 0$ такое, что $O_{\varepsilon_i}(a) \subset A_i$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$. Тогда $\varepsilon > 0$ и так как $\varepsilon \le \varepsilon_i$, то $O_\varepsilon(a) \subset O_{\varepsilon_i}(a) \subset A_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$. Следовательно, $O_\varepsilon(a) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$, откуда следует, что a — внутренняя точка множества $\bigcap_{i=1}^n A_i$. Таким образом, $\bigcap_{i=1}^n A_i$ открыто, и теорема доказана.

Отметим без доказательства следующую теорему о структуре открытых множеств на числовой прямой.

Теорема 3. *Пусть A — непустое открытое множество в $\mathbb{R}$. Тогда существует не более чем счетное число попарно непересекающихся интервалов A_i, $i \in I$ (ограниченных или неограниченных) таких, что $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.*

5.3 Свойства замкнутых множеств

Теорема 1. *Если $(A_i)_{i \in I}$ — семейство замкнутых множеств в $\mathbb{R}$, то их пересечение $\bigcap_{i \in I} A_i$ также замкнуто.*

Доказательство. Достаточно доказать, что дополнение множества $\bigcap_{i \in I} A_i$ открыто. В силу законов двойственности $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$. Множества A_i^c открыты, так как A_i замкнуты. Значит, множество $\bigcup_{i \in I} A_i^c$ открыто по теореме 1 предыдущего пункта. Теорема доказана.

Замечание. Объединение произвольного семейства замкнутых множеств не обязано быть замкнутым. Например,

$$\bigcup_{n=2}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}\,; 1 - \frac{1}{n}\right] = (-1; 1)$$

не является замкнутым множеством, хотя все множества $[-1 + \frac{1}{n}\,; 1 - \frac{1}{n}]$ замкнуты.

Теорема 2. *Если множества* A_1, $A_2, \ldots, A_n$ *— замкнутые множества, то* $\bigcup_{i=1}^n A_i$ *— замкнутое множество.*

Доказательство. В силу закона двойственности де Моргана для семейств $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$. Так как множества A_i^c открыты, то по теореме 2 об открытых множествах $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$ — открытое множество. Значит, множество $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ замкнуто. Теорема доказана.

5.4 Характеризация точек прикосновения и предельных точек через последовательности

Точка прикосновения множества A — это точка из замыкания $\overline{A} = A \cup A^{\Gamma}$. Другими словами, точка a является *точкой прикосновения* множества A тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ пересечение $O_\varepsilon(a) \cap A$ непусто.

Теорема 1. *Точка a является точкой прикосновения множества A тогда и только тогда, когда существует последовательность x_n точек множества A, сходящаяся к точке a.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть a — точка прикосновения множества A. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $(O_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset)$. Пусть $\varepsilon = 1/n$. Тогда $O_{1/n}(a) \cap A \neq \emptyset$. Выберем $x_n \in O_{1/n}(a) \cap A$. Последовательность x_n лежит в A и $|x_n - a| < 1/n$. Значит, $x_n \to a$ (расписать подробнее, почему).

Достаточность. Пусть x_n — последовательность элементов из множества A, которая сходится к точке a. Докажем, что a — точка прикосновения множества A. По определению предела $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon :$ $\forall n \geq N_\varepsilon$ $(|x_n - a| < \varepsilon)$. Пусть n — произвольный фиксированный номер, больший N_ε. Тогда $x_n \in A$ и $x_n \in O_\varepsilon(a)$, откуда следует, что $O_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$. Теорема доказана.

Точка a называется *изолированной точкой* множества A, если $\exists \varepsilon > 0$: $(O_\varepsilon(a) \cap A = \{a\})$. Очевидно, что любая изолированная точка A принадлежит множеству A.

Точка a называется *предельной точкой* множества A, если $\forall \varepsilon > 0$ в ε-окрестности точки a содержится по крайней мере одна точка, отличная от a, т. е. $\overset{\vee}{O}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$, где $\overset{\vee}{O}_\varepsilon(a) = O_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ — *проколотая окрестность* точки a. Отметим, что предельная точка множества не обязана принадлежать этому множеству.

Примеры.

1) Любая точка множества натуральных чисел $\mathbb{N}$— изолированная.

2) Пусть $A = (a; b)$. Тогда $\overline{A} = [a; b]$. Любая точка из $\overline{A}$ является предельной, причем точки a и b не принадлежат A.

Упражнение. Приведите несколько примеров множеств, которые содержат и изолированные, и предельные точки.

Из определений следует, что множество точек прикосновения является объединением двух непересекающихся множеств — множества изолированных и множества предельных точек.

Теорема 2. *Точка a является предельной точкой множества A тогда и только тогда, когда существует последовательность попарно различных точек множества A, сходящаяся к точке a.*

Доказательство. Необходимость. Пусть a является предельной точкой множества A. Положим $\varepsilon = 1$. По определению $\exists x_1 \in A \cap O_\varepsilon(a)$ такое, что $x_1 \neq a$. Выберем положительное $\varepsilon_1 < 1/2$ настолько малым, что $x_1 \notin O_{\varepsilon_1}(a)$. Тогда $\exists x_2 \in A \cap O_{\varepsilon_1}(a)$ такое, что $x_2 \neq a$. Выберем положительное $\varepsilon_2 < 1/3$ таким, чтобы $x_2 \notin O_{\varepsilon_2}(a)$. Тогда найдем $\exists x_3 \in A \cap O_{\varepsilon_2}(a)$ такое, что $x_3 \neq a$. Продолжая этот процесс по индукции построим последовательность x_n, удовлетворяющую условиям: $x_n \in A \cap \overset{\vee}{O}_{\varepsilon_{n-1}}(a)$, x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1} \notin O_{\varepsilon_{n-1}}(a)$. Значит, $x_n \to a$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть существует последовательность x_n из попарно различных точек множества A такая, что $x_n \to a$, $n \to \infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ окрестность $O_\varepsilon(a)$ содержит бесконечное число членов этой последовательности. Значит, $\exists x_n \in A \cap \overset{\vee}{O}_\varepsilon(a)$.

Из теоремы 2 и ее доказательства вытекает

Следствие 1. *Точка a является предельной точкой множества A тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки A содержится бесконечное число точек множества A.*

Напомним, что A замкнуто $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$. Из этого факта сразу выводится

Следствие 2. *Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Доказательство. Множество $\overline{A}$ состоит из изолированных и предельных точек. Так как изолированные точки всегда принадлежат A, $A = \overline{A} \Leftrightarrow$ любая предельная точка принадлежит множеству A.

Следствие 3. *Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда предел любой сходящейся последовательности элементов множества A принадлежит A.*

Доказательство. По теореме 1 точка $a \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists$ последовательность x_n элементов множества A, которая сходится к a. Так как замкнутость A равносильна равенству $A = \overline{A}$, то отсюда следует утверждение следствия 3.

Следствие 4. *Непустое замкнутое ограниченное сверху (снизу) множество A содержит свою точную верхнюю (нижнюю грань).*

Доказательство. Пусть, к примеру, множество A ограничено сверху. Если $a = \sup A$, то по характеристическому свойству точной верхней грани $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A : \ (x > a - \varepsilon)$. Тогда $a - \varepsilon < x \leq a$, следовательно, $x \in O_\varepsilon(a) \cap A$. Итак, $\forall \varepsilon > 0 \ \ (O_\varepsilon(A) \cap A \neq \emptyset)$, откуда $a \in \overline{A} = A$. Следствие доказано.

Упражнение. Приведите подробное доказательство следствия 4 для случая, когда множество ограничено снизу.

5.5 Компактные множества на числовой прямой

Определение. *Множество* $A \subset \mathbb{R}$ называется *компактным*, если для любой последовательности x_n точек множества A существует подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к некоторому элементу из A.

Теорема 1. *Множество A компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A компактно. Докажем, что оно ограничено. Предположим, противное. Тогда A не ограничено сверху или снизу. Предположим для определенности, что A не ограничено сверху. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in A$ такое, что $x_n > n$. Значит, последовательность x_n не ограничена и любая ее подпоследовательность x_{n_k} также не ограничена. Поэтому x_{n_k} не может сходиться ни к какому конечному пределу. Это противоречит компактности A.

Теперь установим, что A замкнуто, т. е. что любая точка из $\overline{A}$ лежит в A. Если $a \in \overline{A}$, то по теореме 1 существует последовательность $x_n \in A$, которая сходится к a. Так как A компактно, то из последовательности x_n можно выделить подпоследовательность x_{n_k}, сходящуюся к некоторому $b \in A$. Но предел подпоследовательности совпадает с пределом последовательности, поэтому $a = b$. Значит, $a \in A$.

Достаточность. Пусть A ограничено и замкнуто. Покажем, что A компактно. Пусть x_n — некоторая последовательность в A. Так как A ограничено, то x_n также ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к некоторой точке $a \in \mathbb{R}$. Так как A замкнуто, то по следствию 3 предел последовательности x_{n_k}, лежащей в A, принадлежит множеству A. Итак, $a \in A$ и теорема доказана.

Следствие 1. *Если A компактно и замкнутое множество $B \subset A$, то B компактно.*

Следствие 2. *Непустое компактное множество содержит свои точные верхнюю и нижнюю грани.*

Следствие 3. *Объединение конечного числа компактных множеств компактно.*

Примеры. 1) Любой отрезок $[a;b]$ ограничен и замкнут, поэтому компактен.

2) Конечное объединение отрезков $\cup_{i=1}^{n}[a_i;b_i]$ компактно.

Упражнение. Приведите еще несколько примеров компактных множеств в $\mathbb{R}$.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $X \subset \cup_{i\in I}U_i$. Тогда говорят, что семейство $(U_i)_{i\in I}$ образует *покрытие множества X*. Если все U_i — открытые множества, то *покрытие* называют *открытым*.

Если $X \subset \cup_{i\in I} U_i$, множество J является подмножеством I и $X \subset \cup_{i\in J} U_i$, то говорят, что покрытие $(U_i)_{i\in J}$ является *подпокрытием* покрытия $(U_i)_{i\in I}$.

Если $(U_i)_{i\in I}$ — покрытие X и множество I конечно, то говорят, что $(U_i)_{i\in I}$ — *конечное покрытие* X.

Теорема 2. *Множество A компактно тогда и только тогда, когда из любого открытого покрытия множества A можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A компактно, тогда по теореме 1 множество A ограничено. Значит, существует отрезок $[a;b]$ такой, что $A \subset [a;b]$.

Предположим противное, т. е. что существует открытое покрытие $(U_i)_{i\in I}$ множества A, которое не содержит конечного подпокрытия A. Разобъем $[a;b]$ на две равные части $[a;c]$ и $[c;b]$. Рассмотрим пересечения A с этими частями $A' = A \cap [a;c]$ и $A'' = A \cap [c;b]$. Семейство $(U_i)_{i\in I}$ образует покрытие обоих этих множеств и по крайней мере для одного из этих множеств из него нельзя выделить конечное подпокрытие.

Пусть, к примеру, для A' не существует конечного подпокрытия. Обозначим $\Delta_1 = [a;c]$. Как и выше, разобъем отрезок Δ_1 на две равные части и выделим ту из них — Δ_2, для которой не существует конечного подпокрытия множества $A \cap \Delta_2$. Продолжая этот процесс по индукции строим последовательность вложенных отрезков

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots ,$$

длина которых стремится к нулю, обладающих свойством: для любого $n \in \mathbb{N}$ из покрытия $(U_i)_{i\in I}$ множества $A \cap \Delta_n$ нельзя выделить конечного подпокрытия.

По принципу стягивающихся отрезков существует точка $x \in$ $\in \cap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Утверждается, что $x \in A$. Действительно, так как длины l_n отрезков Δ_n стремятся к нулю, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N\ (l_n < \varepsilon)$. Поскольку $x \in \Delta_n$, из последнего неравенства следует, что $\Delta_n \subset O_\varepsilon(x)$ $\forall n \geq N$. Так как отрезок Δ_n содержит точки множества A, то $\forall \varepsilon > 0$ $(A \cap O_\varepsilon(x) \neq \emptyset)$. Значит, x — точка прикосновения множества A, а так как A компактно, то по теореме 1 A замкнуто, следовательно $x \in A \subset \cup_{i\in I} U_i$.

Так как $x \in \cup_{i \in I} U_i$, то существует $j \in I : x \in U_j$. Множество U_j открыто, следовательно, $\exists \delta > 0 : O_\delta(x) \subset U_j$. Так как длины l_n отрезков Δ_n стремятся к нулю, то существует n такое, что $l_n < \delta$. Поскольку $x \in \Delta_n$, из последнего неравенства следует, что $\Delta_n \subset O_\delta(x) \subset U_j$. Следовательно часть A, лежащая в Δ_n, покрывается одним множеством U_j, т. е. допускает конечное подпокрытие — противоречие.

Для доказательства достаточности докажем лемму.

Лемма. *Пусть x_n — последовательность с попарно различными членами и $B = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Точка a является предельной точкой множества B тогда и только тогда, когда $\exists x_{n_k} \to a$.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть a — предельная точка B. Тогда существует последовательность попарно различных элементов y_k множества B, сходящаяся к a. Для любого k существует $n = n(k)$ такое, что $y_k = x_{n(k)}$, при этом $k \neq l \Rightarrow \Rightarrow n(k) \neq n(l)$. Пусть $n_1 = n(1)$. Так как множество натуральных чисел, не превосходящих n_1, конечно, то существует k_1 такое, что $n(k_1) > n(1)$. Положим $n_2 = n(k_1)$, $n_2 > n_1$. Аналогично для любого $j \in \mathbb{N}$ выбираем такие k_j, что $n_{j+1} = n(k_j) > n_j$. Тогда $x_{n_k} \to a$ и лемма доказана.

Продолжение доказательства теоремы 2. Достаточность. Предположим, что из любого открытого покрытия множества A можно выделить конечное подпокрытие, но A не компактно. Тогда существует последовательность x_n элементов множества A, никакая подпоследовательность которой не сходится ни к какой точке $a \in A$. Отсюда следует, что множество $B = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, иначе существовала бы стационарная подпоследовательность $a, a, a, \ldots$ последовательности (x_n), сходящаяся к $a \in A$. Можно считать, что последовательность x_n состоит из попарно различных членов, так как повторяющиеся члены можно просто выкинуть. В силу доказанной леммы никакая точка множества A не является предельной точкой множества B. Значит, a либо изолированная точка B либо a не является точкой прикосновения B, т. е. $a \notin \overline{B}$.

В первом случае существует $O_\varepsilon(a)$, которая содержит только одну точку множества B, во втором — ни одной точки из B (ε зависит от a). Очевидно, что $A \subset \cup_{a \in A} O_\varepsilon(a)$. В силу компактности A это открытое покрытие содержит конечное подпокрытие, т. е. $A \subset \cup_{i=1}^{n} O_\varepsilon(a_i)$ для некоторых точек $a_i \in A$. Так как $B \subset A$ и $A \subset \cup_{i=1}^{n} O_\varepsilon(a_i)$, то множество B покрывается конечным числом окрестностей $O_\varepsilon(a_i)$, каждая из которых содержит не более одной точки множества B. Значит, B содержит не более n точек — противоречие. Теорема доказана.

Теорема Кантора (обобщенный принцип стягивающихся отрезков). Пусть $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ — последовательность непустых компактных множеств. Тогда $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Доказательство. От противного. Предположим, что $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Тогда $(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \mathbb{R}$. Пусть $D = \cup_{n=2}^{\infty} A_n^c$. Тогда $A_1^c \cup D = \mathbb{R}$ и $A_1 = A_1 \cap \mathbb{R} = A_1 \cap (A_1^c \cup D) = (A_1 \cap A_1^c) \cup (A_1 \cap D) = A_1 \cap D$. Таким образом, $A_1 = A_1 \cap D$, откуда $A_1 \subset D$, т. е. $A_1 \subset \cup_{n=2}^{\infty} A_n^c$. Множества A_n замкнуты, поэтому A_n^c открыты. Из открытого покрытия $A_1 \subset \cup_{n=2}^{\infty} A_n^c$ компактного множества A_1 можно выделить конечное подпокрытие: $A_1 \subset \cup_{n=2}^{N} A_n^c$. Так как $A_2^c \subset A_3^c \subset \cdots \subset A_n^c \subset \cdots$, то $\cup_{n=2}^{N} A_n^c = A_N^c$. Таким образом, $A_1 \subset A_N^c$. Из этого вытекает, что $A_N = A_N \cap A_1 \subset A_N \cap A_N^c = \emptyset$, значит, $A_N = \emptyset$ — противоречие. Теорема Кантора доказана.

6 Свойства пределов числовых последовательностей

6.1 Теоремы о пределах числовых последовательностей

Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Если $y_n \to b \neq 0$, то $\exists N : \forall n \geq N \ (|y_n| \geq |b/2|)$. В частности, $\exists N : \forall n \geq N \ (y_n \neq 0)$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = |b/2|$. Из определения предела следует, что $\exists N : \forall n \geq N \ (|y_n - b| < \varepsilon)$. Тогда при $n \geq N$

$$|y_n| \geq |b| - |b - y_n| > |b| - |b/2| = |b/2|.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть даны две числовые последовательности x_n, y_n и существуют пределы $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда:*

1) *существует* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$;

2) *существует* $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

3) *если* $y_n \neq 0,\ n \geq 1$ *и* $b \neq 0$, *то существует* $\lim_{n\to\infty}(1/y_n) = 1/b$;
4) *существует* $\lim_{n\to\infty}|x_n| = |a|$.

Доказательство. 1) В силу неравенства треугольника

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|. \qquad (1)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $x_n \to a$, то $\exists N_1\colon \forall n \geq N_1\ (|x_n - a| < \varepsilon/2)$. Так как $y_n \to b$, то $\exists N_2\colon \forall n \geq N_2\ (|y_n - b| < \varepsilon/2)$. Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Если $n \geq N$, то $n \geq N_1$ и $n \geq N_2$ и тогда в силу (1)

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Значит, $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

2) Имеем

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| = |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b| \leq$$

$$\leq |x_n(y_n - b)| + |(x_n - a)b| = |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|. \qquad (2)$$

Так как последовательность x_n сходится, то она ограничена, т. е. $\exists C > 0\colon \forall n \geq 1\ (|x_n| \leq C)$. Можно считать, что $C \geq b$, иначе просто увеличим константу C. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Как и в при доказательстве 1), найдем номера N_1 и N_2 такие, что $|x_n - a| < \varepsilon/(2C)$ при $n \geq N_1$, $|y_n - b| < < \varepsilon/(2C)$ при $n \geq N_2$. Если $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, то из неравенства (2) следует, что $|x_n y_n - ab| < C \cdot \varepsilon/(2C) + C \cdot \varepsilon/(2C) = \varepsilon$. Таким образом, $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

3) Фиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем, что $\exists N\colon \forall n \geq N\ |1/y_n - 1/b| < \varepsilon$. Преобразуем

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y - b_n|}{|y_n||b|}. \qquad (3)$$

Так как $y_n \to b \neq 0$, то в силу леммы 1 $\exists N_1\colon \forall n \geq N_1\ |y_n| \geq |b/2|$. Кроме того, по определению предела $\exists N_2\colon \forall n \geq N_2\ |y_n - b| < \varepsilon b^2/2$. Пусть $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда из (3) следует, что

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{\varepsilon b^2/2}{|b/2||b|} = \varepsilon.$$

4) Утверждение сразу следует из оценки $\big||x_n| - |a|\big| \leq |x_n - a|$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 сразу вытекают

Следствие 1. *Если* $x_n \to a$, $c = \text{const}$, *то* $c \cdot x_n \to c \cdot a$.

Следствие 2. *Если* $x_n \to a$, $y_n \to b$, $y_n \neq 0$, $n \geq 1$ *и* $b \neq 0$, *то существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\,.$$

Следствие 3. *Если* $x_n \to a$, $y_n \to b$, *то* $x_n - y_n \to a - b$.

Теорема 2 (переход к пределу в неравенствах). *Если* $x_n \leq y_n$, $n \geq 1$ *и* $x_n \to a$, $y_n \to b$, *то* $a \leq b$.

Доказательство от противного. Предположим, что $a > b$. Возьмем $\varepsilon = (a-b)/2 > 0$. Тогда $\exists N_1 : \forall n \geq N_1$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon; \tag{4}$$

$\exists N_2 : \forall n \geq N_2$

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда имеют место оба неравенства (4) и (5), и $x_n > a - \varepsilon = b + \varepsilon > y_n$ — противоречие. Теорема 2 доказана.

Замечание. Если в условиях теоремы 2 $x_n < y_n$, $n \geq 1$, то возможна ситуация, когда $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. Таким образом, строгое неравенство в пределе переходит в нестрогое!

$$x_n < y_n,\ n \geq 1 \ \not\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$x_n < y_n,\ n \geq 1 \ \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Пример: $0 < 1/n$, но $\lim_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim_{n\to\infty}(1/n)$.

Теорема 3 ("теорема о двух милиционерах"). *Пусть* $x_n \leq \leq y_n \leq z_n$, $n \geq 1$. *Если* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, *то существует* $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 1$. Тогда $\exists N_1 : \forall n \geq N_1$ $(a - \varepsilon < < x_n < a + \varepsilon)$; $\exists N_2 : \forall n \geq N_2$ $(a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon)$. При $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ имеем $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$. Следовательно, $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ при $n \geq N$. Значит, $\lim_{n\to\infty} y_n = a$. Теорема доказана.

Замечание. Шутливое название теоремы вызвано тем, что "милиционеры" x_n и z_n ведут "задержанного" y_n, который находится между ними. Если оба милиционера придут в пункт a, то и задержанный придет также в a.

Теорема 4. *Если последовательность x_n ограничена, а последовательность y_n стремится к нулю, то последовательность $(x_n \cdot y_n)$ также стремится к нулю.*

Доказательство. По условию, существует $C > 0$ такое, что $|x_n| \leq C$, $n \geq 1$. Тогда для любого n имеем $|x_n \cdot y_n| \leq C|y_n|$, т. е.

$$-C|y_n| \leq x_n y_n \leq C|y_n|.$$

Так как $y_n \to 0$, то $|y_n| \to 0$ и по теореме 1 $C|y_n| \to 0$, $-C|y_n| \to 0$. По теореме 3 $(x_n \cdot y_n) \to 0$, $n \to \infty$. Теорема 4 доказана.

Примеры. 1. Пусть $x_n = \sin n/n = \sin n \cdot (1/n)$. Так как $(1/n) \to 0$, $n \to \infty$, а $|\sin n| \leq 1$, то по теореме 4 $\lim_{n\to\infty}(\sin n/n) = 0$.

2. Пусть

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\,.$$

Так как

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{1+(1/n)}} \leq x_n \leq 1.$$

При $n \to \infty$ имеем $\frac{1}{\sqrt{1+(1/n)}} \to 1$. По теореме 3 тогда $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

6.2 Фундаментальные последовательности, критерий Коши

Определение. *Последовательность* x_n называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m,\ n \geq N \ (|x_n - x_m| < \varepsilon)$.

Иными словами, x_n фундаментальна, если расстояние между членами последовательности x_n и x_m стремится к нулю, когда номера n и m стремятся к бесконечности.

Лемма. *Если последовательность x_n фундаментальна, то она ограничена.*

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : \forall m,\ n \geq N$ $(|x_n - x_m| < 1)$. Значит, при любых $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - x_N| < 1$, откуда $|x_n| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|,\ n \geq N$. Пусть $C = \max(|x_1|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|)$. Тогда $|x_n| \leq C,\ n \geq 1$, т. е. последовательность x_n ограничена. Лемма доказана.

Одним из основных свойств последовательностей является следующая теорема, имеющая выдающееся значение.

Теорема (критерий Коши для последовательностей). *Числовая последовательность x_n имеет предел в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда x_n фундаментальна.*

Доказательство. Необходимость. Пусть x_a сходится к некоторому пределу a. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ \ (|x_n - a| < \varepsilon/2)$. Если $m,\ n \geq N$, то в силу неравенства треугольника

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Итак, последовательность x_n фундаментальна.

Достаточность. Пусть x_n фундаментальна. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N_1 :$

$$\forall m,\ n \geq N_1 \quad (|x_n - x_m| < \varepsilon/2). \tag{1}$$

В силу леммы последовательность x_n ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность x_{n_k}, которая сходится к некоторой точке a при $k \to \infty$. По определению предела $\exists N_2 :$

$$\forall k \geq N_2 \quad |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2. \tag{2}$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$ и $n \geq N$. Выберем номер k настолько большим, чтобы $k \geq N \geq N_2$. Тогда $n_k \geq k \geq N_1$ и в силу (1) и (2) $|x_n - a| \leq$ $\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Значит, $x_n \to a$ и теорема доказана.

6.3 Монотонные последовательности

Последовательность x_n называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*), *если*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \quad (x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots).$$

Последовательность x_n называется *строго монотонно возрастающей (убывающей), если*

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots \quad (x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > \cdots).$$

(Строго) монотонно возрастающие и монотонно убывающие *последовательности* называются *(строго) монотонными.*

Теорема (существование предела монотонной последовательности). *Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть x_n — ограниченная монотонная последовательность, для определенности возрастающая. Тогда x_n ограничена сверху, т. е. $\exists C > 0 : \forall n \geq 1 \ (|x_n| \leq C)$. Рассмотрим множество $B = \{x_n | n \geq 1\}$. Множество B ограничено сверху, так как C — одна из его мажорант. Значит, существует $\sup B$ в $\mathbb{R}$. Обозначим этот супремум через b. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Согласно теореме о характеристическом свойстве супремума $\exists x_N \in B$ такое, что $x_N > b - \varepsilon$.

Если $n \geq N$, то $x_n \geq x_N > b - \varepsilon$. Кроме того, $x_n \in B \Rightarrow x_n \leq \leq \sup B = b < b + \varepsilon$. Окончательно имеем $b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$ при $n \geq N$. Значит, $x_n \to b$. Теорема доказана.

6.4 Число e

Предварительно напомним формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n,$$

или в сокращенном виде

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \tag{1}$$

где a, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, числа C_n^k, называемые биномиальными коэффициентами, определяются по формулам

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (n факториал) — произведение всех натуральных чисел от 1 до n (по определению $0! = 1$).

Отметим, что из (1) следует неравенство

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad x \geq 0. \tag{2}$$

Действительно, при $x \geq 0$

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + x^n \geq 1 + C_n^1 x = 1 + nx.$$

Лемма. *Последовательность*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

монотонно убывает и ограничена.

Доказательство. Имеем, с учетом (2),

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq$$

$$\geq \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

Таким образом, $x_n > x_{n+1}$, $n \geq 1$, т. е. последовательность x_n монотонно убывает. Кроме того, очевидно, что $1 \leq x_n \leq x_1 = 4$, $n \geq 1$, т. е. последовательность x_n ограничена. Лемма доказана.

Из доказанной леммы и теоремы о существовании предела монотонной последовательности следует, что существует предел

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Константа $e = 2,71828\ldots$ является основной константой высшей математики и играет такую же важную роль, как константа π в элементарной математике.

Замечание. Очень часто допускается следующая неточность. Поскольку $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n) = 1$, а $1^n = 1$, то ошибочно полагают, что

$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = 1$. Подобные неточности встречаются при вычислении сходных пределов $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$, где $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Из последнего равенства не следует, что $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = 1$. Существование и значение предела зависит не только от a_n, но и от b_n!

6.5 Пределы последовательностей в $\overline{\mathbb{R}}$

Пусть $r > 0$, $a \in \mathbb{R}$, тогда *r-окрестностью* точки a называется множество $O_r(a) = (a-r; a+r)$. Если $a = +\infty$, то ее *r-окрестность*

$$O_r(+\infty) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid r < x \le +\infty\}.$$

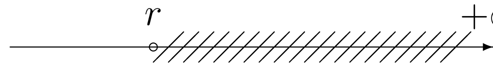

Рис. 25

Если $a = -\infty$, то $O_r(-\infty) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid -\infty \le x < -r\}$.

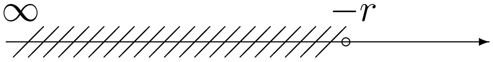

Рис. 26

Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *предельной точкой X в $\overline{\mathbb{R}}$*, если $\forall r > 0$ множество $O_r(a)$ содержит бесконечное число точек множества X. Ясно, что если $X \subset \mathbb{R}$ и точка $a \in \mathbb{R}$ является предельной точкой X в $\mathbb{R}$, то a является предельной точкой X и в $\overline{\mathbb{R}}$.

Примеры. 1) Множество $\mathbb{N}$ не имеет предельных точек в $\mathbb{R}$, однако в $\overline{\mathbb{R}}$ предельной точкой $\mathbb{N}$ является $+\infty$.

2) Множество $\mathbb{Z}$ не имеет предельных точек в $\mathbb{R}$, в $\overline{\mathbb{R}}$ предельными точками $\mathbb{N}$ являются $-\infty$ и $+\infty$.

3) Пусть $X = (a; +\infty)$. Множество предельных точек X в $\mathbb{R}$ есть $[a; +\infty)$, а в $\overline{\mathbb{R}}$ — $[a; +\infty]$.

Пусть x_n — некоторая последовательность в $\overline{\mathbb{R}}$ и $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Точка a называется *пределом последовательности x_n в $\overline{\mathbb{R}}$*, если $\forall r > 0\ \exists N : \forall n \ge N\ (x_n \in O_r(a))$.

Ясно, что если последовательность x_n состоит точек из $\mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$, то $x_n \to a$ в $\overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда, когда $x_n \to a$ в $\mathbb{R}$.

Запишем подробнее определение сходимости в случае, когда точка $a = \pm\infty$.

Последовательность x_n сходится к $+\infty$, если

$$\forall r > 0 \ \ \exists N : \ \forall n \geq N \ (x_n > r).$$

Последовательность x_n сходится к $-\infty$, если

$$\forall r > 0 \ \ \exists N : \ \forall n \geq N \ (x_n < -r).$$

6.6 Вычисление пределов некоторых последовательностей

1) $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$, если $a > 1$; $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, если $a \in [0;1)$.

Пусть $a > 1$, $r > 0$. Имеем $a^n > r \Leftrightarrow n > \log_a r$. Если $r < 1$, то неравенство $a^n > r$ выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$, Если $r \geq 1$, то оно верно при $n \geq N = [\log_a r] + 1$.

Другое доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $a = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$ и $a^n = (1+\alpha)^n > C_n^2 \alpha^2 > (n-1)^2\alpha^2/2$. Если $n \geq 1 + \sqrt{2r}/\alpha$, то $a^n > r$. Таким образом, в качестве N можно взять $[\sqrt{2r/\alpha}]$.

Случай $a \in [0;1)$ легко сводится к предыдущему.

2) Для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \tag{1}$$

Имеем

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{m} \cdot \frac{|a|}{m+1} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{n}.$$

Выберем $m > |a|$. Обозначим $\alpha = |a|/(m+1)$. Тогда при $n \geq m$

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| \leq C\alpha^{n-m},$$

где

$$C = \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \ldots \frac{|a|}{m}.$$

Таким образом, при $n \geq m$

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| \leq \frac{C}{\alpha^m}\,\alpha^n \to 0, \ n \to \infty,$$

так как $0 \leq \alpha < 1$. По теореме о двух милиционерах имеем (1).

3) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Пусть $\sqrt[n]{n}=1+x_n$, тогда $x_n>0$, т. к. $\sqrt[n]{n}>1$. Имеем

$$n=(1+x_n)^n=1+C_n^1x_n+C_n^2x_n^2+\dots+x_n^n>C_n^2x_n^2=\frac{n(n-1)}{2}\,x_n^2,$$

$n\geq 2$, откуда следует, что $x_n^2\leq 2/(n-1)$. Тогда

$$0<x_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}}\to 0,\quad n\to\infty.$$

По теореме о двух милиционерах $x_n\to 0$, откуда $\sqrt[n]{n}=1+x_n\to 1$, $n\to\infty$.

4) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0).\tag{2}$$

Если $a\geq 1$, то при $n\geq a$ имеем $1\leq\sqrt[n]{a}\leq\sqrt[n]{n}$. В силу примера 3) и по теореме о двух милиционерах получаем (2).

Если $0<a<1$, то $\alpha=1/a>1$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha}=1$ и $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=$ $=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/\alpha}=\lim_{n\to\infty}(1/\sqrt[n]{\alpha})=1/\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha}=1$.

5) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\quad(a>1).\tag{3}$$

Пусть $a=1+\alpha$, тогда

$$a^n=(1+\alpha)^n>C_n^2\alpha^2=\frac{n(n-1)}{2}\,\alpha^2,$$

откуда

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{2}{(n-1)\alpha^2}\to 0,\quad n\to\infty.$$

По теореме о двух милиционерах имеем (3).

6) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0\quad(a>0,\ a\neq 1).\tag{4}$$

Можно считать, что $a>1$, так как при $a<1$ имеем $\log_a n=-\log_\alpha n$, где $\alpha=1/a>1$. Применим 5). Фиксируем $\varepsilon>0$, тогда $a^\varepsilon>1$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(a^\varepsilon)^n}=0.$$

Значит, $\exists N:\ \forall n\geq N\ \ n/a^{\varepsilon n}<1$, откуда

$$n<a^{\varepsilon n}\Rightarrow\log_a n<\varepsilon n\Rightarrow 0<\frac{\log_a n}{n}<\varepsilon,\quad n\geq N.$$

Из последнего неравенства следует (4).

7 Предел функции в точке

7.1 Элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие функции: постоянные, степенные $y = x^\alpha$, показательные $y = a^x$, логарифмические $y = \log_a x$, тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. В качестве области определения этих функций берут, как правило, множество всех x, при которых определена соответствующая формула. Например, $\arcsin x$ определен при всех $|x| \leq 1$, поэтому в качестве области определения берут отрезок $[-1; 1]$.

Замечание. Строгое определение некоторых основных элементарных функций представляет собой не простую задачу. В этом пособии мы не занимаемся этим и отсылаем читателя к другим учебникам, например, к книге А. Н. Шерстнева [3].

Элементарной функцией называется функция, которая получается из основных элементарных функций путем применения конечного числа арифметических операций и операции суперпозиции.

Пример. Функция $g(x) = \sqrt{\sin x + xe^{\arccos x}}$ является элементарной. Объясните подробно, как именно можно представить ее через основные элементарные функции.

7.2 Определение предела функции в точке

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Напомним. что проколотой ε-окрестностью точки a называется множество $\overset{\vee}{O}_\varepsilon(a) := O_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Будем рассматривать функцию, определенную на множестве $X \subset \subset \mathbb{R}$, имеющем предельную точку x_0. Отметим важнейшие частные случаи:

1) $X = (a; b) \ni x_0$.

2) $X = (a; b) \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in (a, b)$.

3) $X = (x_0; b)$ или $X = (a; x_0)$. Функция f определена либо слева, либо справа от точки a, которая является предельной точкой X, не принадлежащей X.

Определение 1. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, функция $f : X \to \mathbb{R}$ и x_0 — предельная точка X. Число $y_0 \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции f в точке x_0*, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in X$, удовлетворяющего условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Приведем эквивалентные формулировки:

1) Число $y_0 \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции f в точке x_0*, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in X \ \ (x \in X \cap \overset{\vee}{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(y_0))$.

2) Число $y_0 \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции f в точке x_0*, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ f(X \cap \overset{\vee}{O}_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(y_0)$.

Если y_0 является пределом функции f в точке x_0, то пишут

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

или $f(x) \to y_0, \ x \to x_0$.

Замечание. Поскольку в определении предела функции в точке берется проколотая окрестность точки x_0, то это определение никак не использует значение функции в этой точке, даже если $x_0 \in X$. Вывод: предел зависит от поведения функции в любой малой проколотой окрестности точки x_0. При этом значение $f(x_0)$ может быть не определено, а если $f(x_0)$ все же существует, предел от этого значения никак не зависит.

Справедлива

Теорема 1. *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет предел $y_0 \in \mathbb{R}$ в точке x_0, то f ограничена в некоторой окрестности x_0, т. е.*

$$\exists M, \ r > 0 : \ \forall x \in X \cap \overset{\vee}{O}_r(x_0) \quad (|f(x)| \le M).$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения для последовательностей.

Теорема 2 (Гейне). *Число y_0 является пределом функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, сходящейся к x_0, последовательность $f(x_n)$ сходится к y_0.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Фиксируем $\epsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0 :$

$$x \in X \cap \overset{\vee}{O}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(y_0). \tag{1}$$

Рассмотрим последовательность $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, сходящуюся к x_0. Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ (|x_n - x_0| < \delta)$. Таким образом, $x_n \in \overset{\vee}{O}_\delta(x_0)$, $n \geq N$, откуда, в силу (1), $f(x_n) \in O_\varepsilon(y_0)$, $n \geq N$. Из определения предела последовательности следует, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

Достаточность. Пусть для любой последовательности $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, сходящейся к x_0, последовательность $f(x_n)$ сходится к y_0. Докажем, что $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Предположим противное. Тогда

$$\exists \varepsilon : \ \forall \delta > 0 \ \exists x = x(\delta) : \quad x \in X \cap \overset{\vee}{O}_\delta(x_0) \quad \text{и} \quad |f(x) - y_0| \geq \varepsilon.$$

Пусть $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим для краткости $x(1/n) = x_n$. В силу выбора x_n имеем $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ и $|x_n - x_0| < 1/n$, т. е. справедливо неравенство $-1/n < x_n - x_0 < 1/n$, откуда (по теореме о двух милиционерах) $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. По предположению тогда $f(x_n)$ должна сходиться к y_0. Но $|f(x_n) - y_0| \geq \varepsilon$, откуда следует, что $f(x_n)$ не может сходиться к y_0. Противоречие доказывает теорему.

Из теоремы 2 следует, что можно дать определение предела функции в точке на языке последовательностей.

Определение 2. Число $y_0 \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* f *в точке* x_0, если для любой последовательности $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, сходящейся к x_0, последовательность $f(x_n)$ сходится к y_0.

Примеры. 1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{x} = 1.$$

Действительно, функция $f(x) = (x^2 + x)/x$ определена на множестве $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 0 — предельная точка X, причем $f(x) = x + 1$ на X. Если $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, $n \geq 1$, то $f(x_n) = x_n + 1 \to 1$. По определению 2 $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

2) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Покажем, что не существует предела этой функции в точке 0.

Рассмотрим последовательность $x_n \to 0$. Если все члены последовательности положительны, то $f(x_n) = 1 \to 1$, $n \to \infty$. Если же все $x_n < 0$, то $f(x_n) = -1 \to -1$, $n \to \infty$. Значит, по различным последовательностям пределы различны, т. е. не существует предела $\lim_{x\to 0} f(x)$.

7.3 Предел функции в бесконечно удаленных точках

Пусть функция f определена на множестве X, $X \subset \mathbb{R}$, и точка x_0, равная $+\infty$ или $-\infty$, является предельной точкой множества X. Число y_0 называется *пределом функции f в точке x_0*, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists r > 0$ такое, что $\forall x \in X \cap O_r(x_0)$ имеет место неравенство $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ или по-другому: $f(x) \in O_\varepsilon(y_0)$ $\forall x \in X \cap O_r(x_0)$.

Распишем более подробно это определение в частных случаях.

1) Пусть $x_0 = +\infty$. Тогда $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists r > 0$: $\forall x \in X$, удовлетворяющего неравенству $x > r$, выполнено неравенство $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Аналогично $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists r > 0$: $\forall x \in X$, удовлетворяющего неравенству $x < -r$, имеет место неравенство $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Теорема (свойства предела функции в точке). *Пусть функции f, g и h определены на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ является предельной точкой множества X. Пусть существуют пределы $\lim_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Тогда*

1) *существует* $\lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$;

2) *существует* $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$;

3) *существует*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},$$

если $g(x) \neq 0$ *в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *и* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$;

4) *существует* $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|$;

5) *если $f(x) \le g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то* $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$;

6) (*теорема о двух милиционерах*) *Если* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *и* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$, *то существует* $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Доказательство. Докажем для примера 3). Заметим, что определение 2 предела функции в точке справедливо и для точек $x_0 = \pm\infty$ (проверьте это!).

Пусть последовательность $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ сходится к x_0 при $n \to \infty$. Пусть $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$. Тогда согласно определению 2 предела функции в точке имеем $f(x_n) \to a$, $g(x_n) \to b$, $n \to \infty$. При достаточно больших n точки x_n попадают в проколотую окрестность точки x_0, в которой функция g не обращается в нуль. Следовательно, можно считать, что $g(x_n) \neq 0$. По свойствам предела последовательностей существует предел частного:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{a}{b}.$$

По определению 2 предела функции в точке существует

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Упражнение. Приведите подробные доказательства остальных утверждений теоремы.

Теорема (критерий Коши существования предела функции в точке). *Пусть функция* f *определена на множестве* $X \subset \mathbb{R}$ *и точка* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *является предельной точкой множества* X. *Предел функции* f *в точке* x_0 *существует тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists r > 0$: $\forall x',\ x'' \in X \cap \overset{\vee}{O}_r(x_0)$ *выполняется неравенство* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, существует $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists r > 0$: $\forall x \in X \cap \overset{\vee}{O}_r(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - y_0| < \varepsilon/2$. Пусть $x',\ x'' \in X \cap \overset{\vee}{O}_r(x_0)$. Тогда $|f(x') - y_0| < \varepsilon/2$, $|f(x'') - y_0| < \varepsilon/2$ и с помощью неравенства треугольника получаем $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - y_0| + |y_0 - f(x')| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Достаточность. Рассмотрим любую последовательность x_n из множества $X \setminus \{x_0\}$, которая сходится к x_0. По условию $\forall \varepsilon > 0\ \exists r > 0$: $\forall x',\ x'' \in X \cap \overset{\vee}{O}_r(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Так как $x_n \to x_0$, то существует такой номер $N = N(r)$: $\forall n \geq N$ $(x_n \in X \cap \overset{\vee}{O}_r(x_0))$. Если $m,\ n \geq N$, то $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $f(x_n)$ фундаментальна. По критерию Коши для последовательностей $f(x_n)$ сходится к некоторому числу y_0.

Осталось показать, что y_0 не зависит от выбора последовательности. Пусть x'_n — другая последовательность в $X \setminus \{x_0\}$, которая сходится к x_0. Рассмотрим перемешанную последовательность

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots .$$

Ясно, что эта последовательность сходится к x_0. По доказанному выше последовательность образов

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots, f(x_n), f(x'_n), \ldots$$

сходится. Поскольку ее подпоследовательность $f(x_n)$ сходится к y_0, то и вся последовательность сходится к y_0. Поэтому и другая ее подпоследовательность $f(x'_n)$ сходится к тому же пределу y_0.

Теперь, применяя определение 2 предела функции в точке, получаем, что $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Теорема доказана.

Замечание. В следующем пункте дается определение бесконечных пределов функции в точке. Для них доказанная теорема неверна! В теореме существенно, что $y_0 \in \mathbb{R}$.

7.4 Бесконечные пределы

Мы уже определили $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ в случаях, когда $y_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Теперь определим понятие предела в случае, когда y_0 может равняться $+\infty$ или $-\infty$.

Пусть функция f определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка множества X. Пусть $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Говорят, что *предел функции f в точке x_0* равен y_0, если $\forall s > 0\ \exists r > 0 :\ \forall x \in X \cap \overset{\vee}{O}_r(x_0)$ выполняется условие $f(x) \in O_s(y_0)$ или, что то же самое, $f(X \cap \overset{\vee}{O}_r(x_0)) \subset$ $\subset O_s(y_0)$.

Возможны следующие частные случаи: $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = +\infty$, $x_0 =$ $= -\infty$; $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = +\infty$, $y_0 = -\infty$, итого 9 случаев. Распишем подробно один из частных случаев: $x_0 = +\infty$, $y_0 = -\infty$.

Предел $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, если $\forall s > 0\ \exists r > 0 :\ \forall x \in X$

$$x > r \Longrightarrow f(x) < -s.$$

Упражнение. Распишите аналогично на языке $s - r$ определение предела функции в остальных частных случаях.

Примеры. 1) Покажем, что $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$. Зададим любое $s > 0$. Имеем

$$\frac{1}{x^2} > s \Longleftrightarrow x^2 < \frac{1}{s} \Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Пусть $r = r(s) = 1/\sqrt{s}$. Если $|x| < r$, то $f(x) = 1/x^2 > s$. Таким образом, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

2) $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$. Действительно, $x^3 < -s \Longleftrightarrow x < -\sqrt[3]{s}$. Следовательно, для любого $s > 0$ существует $r = r(s) = \sqrt[3]{s}$ такое, что $x < -r(s) \Longrightarrow x^3 < -s$.

Можно дать определение предела в случае, когда $x_0,\ y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, на языке последовательностей аналогично тому, как это делалось в случае $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$.

Пусть функция f определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка множества X. Пусть $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Говорят, что *предел функции f в точке x_0* равен y_0, если для любой последовательности точек $x_n \in X \setminus \{x_0\}$

$$x_n \to x_0, n \to \infty \Longrightarrow f(x_n) \to y_0, n \to \infty.$$

Упражнение. Как и в теореме Гейне для случая конечных точек x_0 и y_0, докажите эквивалентность двух определений предела.

7.5 Предел сложной функции, замена переменных в пределах

Теорема. *Пусть X, Y, Z — некоторые числовые множества, x_0 — предельная точка X, y_0 — предельная точка Y ($x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$). Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ и*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = z_0.$$

Пусть существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) \neq y_0$ $\forall x \in \overset{\vee}{O}_\delta(x_0) \cap X$. Тогда существует предел сложной функции:

$$\lim_{x\to x_0} g \circ f(x) = z_0.$$

Доказательство. Фиксируем $s > 0$. Так как $\lim_{y\to y_0} g(y) = z_0$, то существует $t = t(s) > 0$ такое, что $g(y) \in O_s(z_0)$ для любой точки $y \in Y \cap \overset{\vee}{O}_t(y_0)$.

Так как $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$, то существует $r = r(t) > 0$ такое, что $f(x) \in O_t(y_0)$ для любого $x \in X \cap \overset{\vee}{O}_r(x_0)$. Можно считать, что $r < \delta$. Тогда $\forall x \in X \cap \overset{\vee}{O}_r(x_0)$ имеем $f(x) \in Y \cap \overset{\vee}{O}_t(y_0)$ и тогда $g(f(x)) \in O_s(z_0)$.

Итак, $\forall s > 0\ \exists r = r(t(s)) > 0 : \forall x \in X \cap \overset{\vee}{O}_r(x_0)$ выполнено условие $g(f(x)) \in O_s(z_0)$. Это означает, что $\lim_{x\to x_0} g \circ f(x) = z_0$.

Замечание. Утверждение теоремы можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} g \circ f(x) = \lim_{y\to y_0} g(y) = z_0, \quad y = f(x).$$

Переход от предела $\lim_{x\to x_0} g \circ f(x)$ к пределу $\lim_{y\to y_0} g(y)$ называется заменой переменных $y = f(x)$ в пределе $\lim_{x\to x_0} g \circ f(x)$.

7.6 Односторонние пределы

Пусть функция f определена на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ является предельной точкой множества $X^+_{x_0} := \{x \in \mathbb{R} : x \in X \text{ и } x > x_0\}$. Обозначим $f^+_{x_0} = f|_{X^+_{x_0}}$. Если существует $\lim_{x\to x_0} f^+_{x_0}(x) = y_0$, то говорят, что существует *предел справа* функции f в точке x_0 и пишут $y_0 = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$ или $y_0 = \lim_{x\to x_0+} f(x)$ или $x_0 = f(x_0+0)$. Аналогично определяется *предел слева*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-0) := \lim_{x\to x_0} f|_{X^-_{x_0}}(x),$$

где $X^-_{x_0} := \{x \in \mathbb{R} : x \in X \text{ и } x < x_0\}$.

Примеры. 1) Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x$.

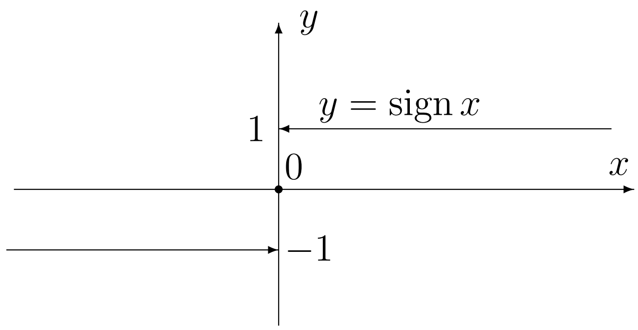

Рис. 27.

Тогда $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$.

2) Пусть $f(x) = 1/x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty.$$

Пределы слева и справа называются *односторонними пределами.* Очевидна

Теорема. *Пусть функция f определена на множестве X и x_0 является предельной точкой множеств как $X^+_{x_0}$, так и $X^-_{x_0}$. Предел $\lim_{x\to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, причем эти пределы совпадают. При этом $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.*

7.7 Замечательные пределы

Среди многих известных пределов особую роль играют следующие два важных предела, которые принято называть замечательными.

1) **Первый замечательный предел.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

Предварительно установим неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \pi/2. \tag{2}$$

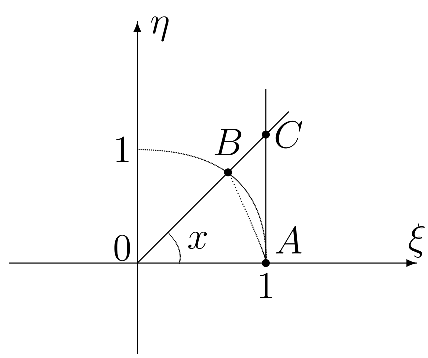

Рис. 28.

Рассмотрим рис. 28. Сравним площади равнобедренного треугольника Δ_{OAB}, прямоугольного треугольника Δ_{OAC} и кругового сектора R_{OAB}. Так как $\Delta_{OAB} \subset R_{OAB} \subset \Delta_{OAC}$, то

$$S(\Delta_{OAB}) = \frac{\sin x}{2} \leq S(R_{OAB}) = \frac{x}{2} \leq S(\Delta_{OAC}) = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

откуда следует (2).

Запишем (2) по-другому:

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \tag{3}$$

$0 < x < \pi/2$. Поскольку функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ — четные, неравенство (3) на самом деле справедливо при $0 < |x| < \pi/2$.

Покажем, что $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$. Действительно, используя левое неравенство в (2) получаем

$$|\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},\ 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 + \frac{x^2}{2}, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку $\lim_{x \to 0}(1 \pm x^2/2) = 1$, с использованием теоремы о двух милиционерах из последнего неравенства получаем $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

Теперь, применяя теорему о двух милиционерах к (3), получаем (1).

Замечание. Первый замечательный предел означает, что **в начале координат** график функции $y = \sin x$ имеет касательную $y = x$ (строгое определение касательной к кривой здесь мы не приводим). В остальных точках графики функций $y = \sin x$ и $y = x$ существенно отличаются, поэтому, конечно, $\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} \neq 1$, если $x_0 \neq 0$. Нетрудно доказать, что $\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x_0}{x_0} < 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$. Кроме того, $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, так как $y = \sin x$ — ограниченная функция на всей числовой оси, а $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$. Числитель и знаменатель дроби $\frac{\sin x}{x}$ стремятся к нулю при $x \to 0$. Таким образом, первый замечательный предел раскрывает неопределенность типа $\frac{0}{0}$. (см. по поводу неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ правило Лопиталя).

2) **Второй замечательный предел.**

Этот предел имеет три формы.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \tag{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{6}$$

Часто (4) и (5) записывают в виде одного предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{7}$$

(x стремится к "бесконечности без знака"!).

2a) Докажем справедливость (4). Пусть $x\ge 1$, $n=n(x)=[x]$ (целая часть x). Тогда $n\in\mathbb{N}$ и $n\le x\le n+1$. Используя монотонность показательной и степенной функций, получаем

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)+1}. \tag{8}$$

При $x\to+\infty$ очевидно $n=n(x)\to+\infty$. Найдем пределы последовательностей

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \quad \text{и} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{9}$$

Используя определение числа e, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n+1}}=e.$$

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e.$$

Поскольку пределы выражений, стоящих слева и справа в (8), при $x\to$ $\to+\infty$ совпадают с пределами последовательностей (9), по теореме о двух милиционерах заключаем, что справедливо (4).

Замечание. Докажите следующий факт, который неявно использовался при доказательстве выше. Если $n(x)$ — вещественная функция на числовой прямой, принимающая значения в множестве $\mathbb{N}$, $\lim_{x\to+\infty} n(x) = +\infty$ и существует предел последовательности $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, то существует предел функции $\lim_{x\to+\infty} a_{n(x)} = \alpha$.

2б) Делая замены переменных $y = -x$, $z = y - 1$ и используя (4), получаем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{y}\right)^y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\cdot 1 = e.$$

Таким образом, (5) доказано.

2в) Рассмотрим односторонние пределы $\lim_{x\to 0\pm}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. После замены переменных $t = 1/x$ с использованием (4) и (5) получаем

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e,$$

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Итак, установлено (6).

Замечание. Второй замечательный предел используют для раскрытия неопределенностей типа 1^∞. Отметим, что если $f(x) \to 1$, $g(x) \to \pm\infty$, $x \to x_0$, то $f(x)^{g(x)}$ не всегда стремится к 1 при $x \to x_0$. К сожалению, очень часто при вычислении конкретных пределов используют **неправильную** импликацию:

$$f(x) \to 1 \Longrightarrow f(x)^{g(x)} \to 1. \quad \textbf{Это, вообще говоря, неверно!!!}$$

На самом деле, предел может не существовать, равняться нулю, бесконечности или положительному числу. Все зависит от скоростей роста показателя $g(x)$ к бесконечности и основания $f(x)$ к единице.

7.8 О-символика (символы Ландау), эквивалентные функции

Пусть функции f и g определены на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ является предельной точкой множества X. Пусть существует такое $r > 0$, что имеет место равенство

$$f(x) = \varphi(x)g(x) \quad \forall x \in \overset{\vee}{O}_r(x_0) \cap X \tag{1}$$

для некоторой функции φ. Отметим, что $\varphi(x) = f(x)/g(x)$ в точках, где $g(x) \neq 0$. Если же в некоторой точке x имеет место равенство $g(x) = 0$, то $f(x) = 0$, и равенство (1) в точке x справедливо при любом значении $\varphi(x)$. Таким образом, функция $\varphi(x)$ не всегда определяется однозначно.

Определение 1. Если для некоторого $r > 0$ и для некоторой **ограниченной** в $\overset{\vee}{O}_r(x_0) \cap X$ функции φ имеет место (1), то говорят, что *функция f является ограниченной по сравнению с g* при $x \to x_0$ и пишут

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0.$$

Если g не обращается в нуль для точек X, лежащих в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то это условие означает, что существуют константы r, $C > 0$ такие, что

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le C \quad \forall x \in \overset{\vee}{O}_r(x_0) \cap X.$$

Пример. Неравенство $|\sin x| \le 1$ справедливо $\forall x \in \mathbb{R}$, поэтому $\sin x = O(1)$, $x \to x_0$, для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Если для некоторого $r > 0$ и для некоторой функции φ такой, что $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ имеет место (1), то говорят, что *функция f является величиной более высокого порядка малости по сравнению с g* при $x \to x_0$ и пишут

$$f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0.$$

Если g не обращается в нуль для точек X, лежащих в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то это условие означает, что

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Определение 3. Если для некоторого $r > 0$ и для некоторой функции φ такой, что $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 1$ имеет место (1), то говорят, что *функция f эквивалентна g* при $x \to x_0$ и пишут

$$f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0.$$

Если g не обращается в нуль для точек X, лежащих в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то это условие означает, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Упражнение. Докажите, что отношение $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$, определяет отношение эквивалентности на множестве всех функций, определенных на множестве X.

В частности, если $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$, то $g(x)\sim f(x)$, $x\to x_0$. Если $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$, и $g(x)\sim h(x)$, $x\to x_0$, то $f(x)\sim h(x)$, $x\to x_0$.

Справедлива следующая

Лемма. *Пусть функции f и g определены на множестве $X\subset\mathbb{R}$ и $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ является предельной точкой множества X. Эквивалентность $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x)=$ $=g(x)+o(g(x))$, $x\to x_0$.*

Доказательство. $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$, тогда и только тогда, когда $\exists r>0:\ \forall x\in X\cap\overset{\vee}{O}_r(x_0)$ справедливо представление

$$f(x)=\varphi(x)g(x)\quad\forall x\in\overset{\vee}{O}_r(x_0)\cap X,$$

где $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда

$$f(x)=g(x)+\psi(x)g(x)\quad\forall x\in\overset{\vee}{O}_r(x_0)\cap X,$$

где $\psi(x)=\varphi(x)-1$. При этом

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1\Longleftrightarrow\lim_{x\to x_0}\psi(x)=0.$$

Условие $\lim_{x\to x_0}\psi(x)=0$ означает, что $\psi(x)g(x)=o(g(x))$, $x\to x_0$, т. е. $f(x)=g(x)+o(g(x))$, $x\to x_0$.

Теперь установим практически важный способ вычисления пределов произведения (частного) двух функций путем замены сомножителей (числителя и знаменателя) на эквивалентные функции.

Теорема. *Пусть функции f, g, h и k определены на множестве $X\subset\mathbb{R}$ и $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ является предельной точкой множества X. Пусть $f(x)\sim h(x)$ $g(x)\sim k(x)$, $x\to x_0$.*

1) *Если существует* $\lim_{x\to 0}(h(x)k(x))$, *то существует* $\lim_{x\to 0}(f(x)g(x))$ *и*

$$\lim_{x\to 0}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to 0}(h(x)k(x)).$$

2) *Пусть* g *не обращается в нуль для всех* $x \in X$, *лежащих в некоторой проколотой окрестности точки* x_0. *Если существует* $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{k(x)}$, *то существует* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ *и*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{k(x)}.$$

Доказательство. Докажем 2) (утверждение 1) докажите самостоятельно). Пусть выполняются условия теоремы. В силу леммы $f(x) = h(x) + o(h(x))$, $g(x) = k(x) + o(k(x))$, $x \to x_0$. Значит, существует проколотая окрестность точки x_0 такая, что для любого $x \in X$, лежащего в этой окрестности, $f(x) = h(x) + \varphi(x)h(x)$, $g(x) = k(x) + \psi(x)k(x)$, где $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim_{x\to x_0}\psi(x) = 0$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{h(x)+\varphi(x)h(x)}{k(x)+\psi(x)k(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{k(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1+\varphi(x)}{1+\psi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{k(x)}.$$

Теорема доказана.

Отметим некоторые эквивалентности, которые часто используются при вычислении пределов.

1) $\sin x \sim x$, $x \to 0$.

2) $\operatorname{tg} x \sim x$, $x \to 0$.

3) $1 - \cos x \sim x^2/2$, $x \to 0$.

4) $\ln(1+x) \sim x$, $x \to 0$.

5) $e^x - 1 \sim x$, $x \to 0$.

6) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim x/n$, $x \to 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

Доказательство. 1) Это — непосредственное следствие первого замечательного предела.

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2/2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2} = 1.$$

4) Воспользуемся непрерывностью функции $y = \ln x$ (см. далее раздел "Непрерывные функции" или докажите непосредственно с помощью $(\varepsilon - \delta)-$определения): $\lim_{t\to e} \ln t = \ln e = 1$.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

5) В силу предыдущего пункта $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Сделаем замену переменных $t = \ln(1+x)$. Тогда $x = e^t - 1$. При $x \to 0$ в силу непрерывности логарифмической функции $t \to 0$. Значит,

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

откуда

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1}\right)^{-1} = 1.$$

6) Докажем, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x/n} = 1.$$

Сделаем замену переменных $t = \sqrt[n]{1+x} - 1$. Тогда

$$x = (1+t)^n - 1 = 1 + nt + C_n^2 t^2 + \cdots + t^n - 1 = nt + C_n^2 t^2 + \cdots + t^n.$$

При $x \to 0$ имеем $t \to 0$ (докажите это!). Окончательно получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x/n} = n \lim_{t\to 0} \frac{t}{nt + C_n^2 t^2 + \cdots + t^n} = \lim_{t\to 0} \frac{n}{n + C_n^2 t + \cdots + t^{n-1}} = 1.$$

8 Непрерывные функции

8.1 Непрерывность функции в точке

Определение 1. Пусть функция f определена на некотором числовом множестве X и $x_0 \in X$. *Функция* f называется *непрерывной в точке* x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in X$

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Последнюю импликацию можно записать по-другому:

$$f(X \cap O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(f(x_0)).$$

Таким образом, непрерывность означает, что если x близко к x_0, то $f(x)$ близко к $f(x_0)$.

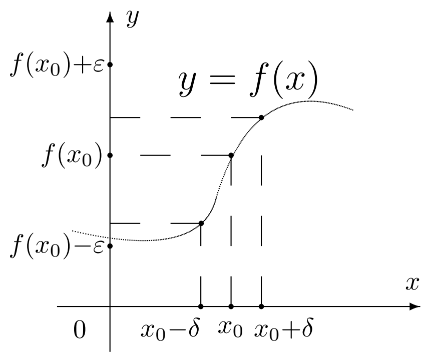

Рис. 29.

Если x_0 — изолированная точка множества X, то существует такая окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0, что $X \cap O_\delta(x_0) = \{x_0\}$. Тогда

$$f(X \cap O_\delta(x_0)) = \{f(x_0)\} \subset O_\varepsilon(f(x_0)) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Значит, функция непрерывна в любой изолированной точке.

Если x_0 — предельная точка X, то из непрерывности функции в точке x_0 и определения предела следует, что $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Из определений предела следует, что:

1) Функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любой последовательности точек x_n, лежащей в X и сходящейся к точке x_0, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.

2) Функция f непрерывна в предельной точке x_0 множеств $X_{x_0}^+$ и $X_{x_0}^-$ тогда и только тогда, когда существуют односторонние пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Теорема 1. *Пусть функции f и g определены на множестве X и непрерывны в точке $x_0 \in X$. Тогда в точке x_0 непрерывны функции $f+g$, $f-g$, fg и, если g не обращается в нуль на X, частное f/g.*

Доказательство. Докажем для примера непрерывность произведения. Пусть функции f и g непрерывны в точке x_0. Рассмотрим любую последовательность $x_n \in X$, сходящуюся к точке x_0. В силу непрерывности функций f и g в точке x_0 имеем $f(x_n) \to f(x_0)$, $g(x_n) \to g(x_0)$ при

$n \to \infty$. Из арифметических свойств пределов последовательностей последовательность $(f+g)(x_n) = f(x_n)+g(x_n) \to f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0)$, $n \to \infty$. Это означает, что функция $f+g$ непрерывна в точке x_0. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $x_0 \in X$ и $f(x_0) = y_0$. Если функция f непрерывна в точке x_0, а g непрерывна в точке y_0, то суперпозиция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Рассмотрим любую последовательность x_n элементов множества X, сходящуюся к точке x_0. В силу непрерывности функции f в точке x_0 последовательность $y_n = f(x_n) \to f(x_0) = y_0$. Так как $y_n \to y_0$, то в силу непрерывности функции g в точке y_0 имеем $g \circ f(x_n) = g(y_n) \to g(y_0) = g \circ f(x_0)$. Это означает непрерывность функции $g \circ f$ в точке x_0. Теорема 2 доказана.

Определение 2. Пусть функция f определена на множестве X. *Функция* f называется *непрерывной на множестве* X, если f непрерывна в любой точке множества X.

Из определений и теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. 1) *Если функции f и g непрерывны на множестве X, то на множестве X непрерывны функции $f+g$, $f-g$, fg и, если g не обращается в нуль на X, частное f/g.*

2) *Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Если функция f непрерывна на множестве X, а g непрерывна на множестве Y, то суперпозиция $g \circ f$ непрерывна на множестве X.*

8.2 Точки разрыва

Пусть f определена на множестве X и $x_0 \in X$ является предельной точкой множества X. *Функция* f называется *разрывной в точке* x_0, если функция f не является непрерывной в точке x_0, т. е. либо не существует $\lim_{x\to x_0} f(x)$, либо $\lim_{x\to x_0} f(x)$ существует, но $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Если в точке разрыва x_0 существует $\lim_{x\to x_0} f(x)$, то x_0 называется *устранимой точкой разрыва.*

Примеры. 1) Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Имеем $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \neq 1 = f(0)$. Таким образом $x = 0$ — точка устранимого разрыва.

Если функцию f переопределить в точке $x = 0$, т. е. положить $f(0) = 0$, то получим непрерывную функцию.

2) Пусть $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$. Существует

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Функция не определена в точке $x = 1$, но если доопределить ее в этой точке: $f(1) = 2$, то получим непрерывную функцию. Если положить $f(1) = a \neq 2$, то новая функция будет разрывной в точке $x = 1$.

Пусть x_0 — точка разрыва функции f. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*, если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$. В этом случае разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 + 0)$ называется *скачком* функции в точке x_0.

Точка разрыва называется *точкой разрыва второго рода*, если она не является точкой разрыва первого рода.

Примеры. 1) $f(x) = \operatorname{sign} x$. Существуют $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1$. Скачок f в точке разрыва первого рода $x = 0$ равен 2.

2) Пусть $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$. Определим f в точке $x = 0$, полагая $f(0) = 1$. Существуют $f(0+0) = f(0-0) = +\infty$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода, хотя односторонние пределы существуют и равны (но бесконечны!).

3) Пусть $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$. Определим f в точке $x = 0$, полагая $f(0) = 0$. Существуют $f(0+0) = +\infty$, $f(0-0) = -\infty$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода.

4) Пусть $f(x) = \sin(1/x)$, $x \neq 0$. Определим функцию f в точке $x = 0$, полагая $f(0) = 0$. Односторонние пределы f в точке $x = 0$ не существуют. Действительно, покажем, например, что не существует $f(0+0)$. Для этого рассмотрим две последовательности $x'_n = 1/(\pi n)$,

$x_n'' = 2/(\pi + 4\pi n)$. Тогда $\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = 0$, x_n', $x_n'' \neq 0$, $n \geq 1$. Но $f(x_n') = 0 \to 0$, $n \to \infty$, $f(x_n'') = 1 \to 1$, $n \to \infty$. Поскольку по разным положительным последовательностям, стремящимся к нулю, получаются разные пределы, то не существует предел справа $f(0+0)$. Таким образом, точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода.

Замечание. Иногда в точки разрыва функции f включают все предельные точки области определения X, не принадлежащие X. Так, в примерах 2)–4) можно не определять значение функции в точке $x = 0$, поскольку независимо от этого значения односторонние пределы бесконечны (примеры 2)-3)) или не существуют (пример 4)).

8.3 Теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях

Пусть функция f определена на множестве X. *Функция f называется ограниченной сверху (снизу)* на X, если множество $f(X)$ ограничено сверху (снизу). *Функция f* называется *ограниченной на X*, если она ограничена на X и сверху и снизу.

По-другому:

1) Функция является ограниченной сверху на X, если существует константа $C > 0$ такая, что $f(x) \leq C$, $x \in X$ (C — мажоранта множества $f(X)$).

2) Функция является ограниченной снизу на X, если существует константа $C > 0$ такая, что $f(x) \geq -C$, $x \in X$ ($-C$ — миноранта множества $f(X)$).

3) Функция является ограниченной на X, если существует константа $C > 0$ такая, что $|f(x)| \leq C$, $x \in X$ (множество $f(X) \subset [-C, C]$).

Точной верхней (нижней) гранью функции f на X называется число

$$\sup_{x\in X} f(x) := \sup f(X) \quad \left(\inf_{x\in X} f(x) := \inf f(X)\right).$$

Теорема Вейерштрасса. *Пусть функция f непрерывна на компактном множестве X. Тогда*

1) *образ $f(X)$ является компактным множеством,*

2) *функция* f *ограничена и принимает на* X *свои наибольшее и наименьшее значения, т. е. существуют точки* x', $x'' \in X$ *такие, что*

$$f(x') = \sup_{x \in X} f(x), \quad f(x'') = \inf_{x \in X} f(x). \tag{1}$$

Доказательство. 1) Докажем, что $f(X)$ компактно, то есть из любой последовательности y_n в $f(X)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $y_0 \in f(X)$. Так как $y_n \in f(X)$, то существует $x_n \in X$ такое, что $y_n = f(x_n)$. Множество X компактно, поэтому существует подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к некоторой точке $x_0 \in X$. В силу непрерывности функции f имеем $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to$ $\to f(x_0) = y_0 \in f(X)$. Таким образом, 1) установлено.

2) Множество $f(X)$ компактно, следовательно, ограничено. Это означает ограниченность функции $f(X)$ на X. Кроме того, $f(X)$ как любое компактное множество содержит свои точную верхнюю и нижнюю грани, т. е. существуют точки y', $y'' \in f(X)$ такие, что $y' = \sup f(X)$, $y'' = \inf f(X)$. Поэтому существуют точки x', $x'' \in X$ такие, что $y' = f(x')$, $y'' = f(x'')$. Тогда справедливо (1). Теорема Вейерштрасса доказана.

8.4 Равномерная непрерывность функции на множестве, теорема Кантора

Пусть функция f непрерывна на множестве X. Это означает, что $\forall x_0 \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in X$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. В этом случае величина δ выбирается в зависимости от $x_0 \in X$ и ε.

Если величину δ можно выбрать одинаковой сразу для всех $x_0 \in X$, то функция называется равномерно непрерывной. Более точно, функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x'$, $x'' \in X$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ следует, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Ясно, что любая равномерно непрерывная функция на множестве X является непрерывной на X. Обратное неверно, как показывает следующий

Пример. Пусть функция $f(x) = 1/x$, $x \in X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Покажем, что функция f не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, т. е. $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x', \ x'' \in X : |x' - x''| < \delta$ и $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Для любого $\delta > 0$ найдем натуральное n такое, что $n > 1/\delta$. Пусть $x' = 1/n$, $x'' = 1/(2n)$. Тогда $|x' - x''| = 1/(2n) < \delta$ и $|f(x') - f(x'')| = n \geq 1 = \varepsilon$.

Отметим, что чем меньше δ, тем больше n и тем ближе x', x'' к точке 0, которая является граничной точкой области определения X. Следовательно, равномерная непрерывность нарушается "вблизи" предельной точки множества X, не принадлежащей X. Это не случайно, как показывает следующая

Теорема (Кантор). *Функция f, непрерывная на компактном множестве X, равномерно непрерывна.*

Доказательство. Предположим, что функция f непрерывна на компактном множестве X, но не равномерно непрерывна. Тогда $\exists \varepsilon > 0 :$ $\forall \delta > 0 \ \exists x'_\delta, \ x''_\delta \in X : |x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ и

$$|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Поскольку в качестве δ можно взять любое положительное число, положим $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $x'_\delta = x'_n$, $x''_\delta = x''_n$. Последовательность x'_n лежит в компактном множестве X, поэтому существует такая ее подпоследовательность x'_{n_k}, что x'_{n_k} сходится к некоторой точке $x_0 \in X$. Докажем, что x''_{n_k} также сходится к x_0. Действительно, $|x''_{n_k} - x_0| \leq |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - x_0| \leq 1/n_k + |x'_{n_k} - x_0| \to 0, \ k \to \infty$. Значит, $|x''_{n_k} - x_0| \to 0, \ k \to \infty$, откуда следует, что $x''_{n_k} \to x_0, \ k \to \infty$.

Функция f непрерывна в точке x_0. Значит, $\exists \sigma > 0 : \forall x \in X$ $|x - x_0| < \sigma \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. Так как $x'_{n_k}, \ x''_{n_k} \to x_0, \ k \to \infty$, то $\exists N : |x'_{n_k} - x_0| < \sigma, \ |x''_{n_k} - x_0| < \sigma \ \forall k \geq N$. В силу выбора σ тогда $|f(x'_{n_k}) - f(x_0)| < \varepsilon/2, \ |f(x''_{n_k}) - f(x_0)| < \varepsilon/2 \ \forall k \geq N$. Применяя неравенство треугольника, получаем

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \leq |f(x'_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x''_{n_k})| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

$k \geq N$. Это противоречит (1). Теорема Кантора доказана.

8.5 Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

Теорема (Больцано-Коши). *Пусть функция* f *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и* $M = \sup_{x\in[a;b]} f(x)$, $m = \inf_{x\in[a;b]} f(x)$. *Тогда для любого* $\gamma \in [m;M]$ *существует по крайне мере одна точка* $x_0 \in [a;b]$ *такая, что* $f(x_0) = y_0$.

Доказательство. Если $y_0 = M$ или $y_0 = m$, то существование точки x_0 следует из теоремы Вейерштрасса. Таким образом, можно считать, что $m < y_0 < M$ (в частности, отсюда следует, что $m \neq M$).

По теореме Вейерштрасса существуют точки c, $d \in [a;b]$ такие, что $f(c) = m$, $f(d) = M$. Так как $m \neq M$, то $c \neq d$. Пусть, для определенности, $c < d$. Рассмотрим множество $X = \{x \in [c;d] : f(x) \leq y_0\}$.

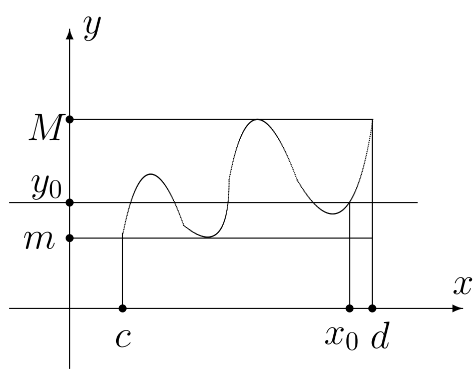

Рис. 30.

Докажем, что X — замкнутое множество. Пусть x_n — произвольная последовательность точек в X, сходящаяся к некоторой точке x'. Если мы докажем, что $x' \in X$, то тем самым будет установлена замкнутость X. Имеем $c \leq x_n \leq d$ и $f(x_n) \leq y_0$. Так как функция f непрерывна, то $f(x_n) \to f(x')$. По теореме о переходе к пределу в неравенствах получаем $c \leq x' \leq d$ и $f(x') \leq y_0$. Это означает, что $x' \in X$, что и требовалось доказать.

Очевидно, что множество X содержит элемент c, поэтому $X \neq \emptyset$. Так как замкнутое множество $X \subset [c;d]$, то оно ограничено, следовательно, компактно. Отсюда следует, что X содержит максимальный элемент, т. е. $x_0 := \sup X \in X$.

Покажем, что $f(x_0) = y_0$. Действительно, $f(x_0) \leq y_0$, так как $x_0 \in \in X$. С другой стороны, $x_0 \neq d$, так как $f(x_0) \leq y_0 < M = f(d)$.

Значит, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $[x_0; x_0 + \varepsilon] \subset [c; d]$. Для любого $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$ имеем $x \in [c; d]$ и $x \notin X$, поэтому $f(x) > y_0$. Переходя к пределу в этом неравенстве при $x \to x_0+$ получаем $f(x_0) \geq y_0$. Таким образом, $f(x_0) = y_0$ и теорема Больцано-Коши доказана.

Следствие. *Если f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и значения функции на концах отрезка — $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, то существует точка x_0, в которой $f(x_0) = 0$.*

8.6 Монотонные функции

Функция f, определенная на множестве X, называется *монотонно возрастающей (убывающей)*, если для любых $x_1,\ x_2 \in X$

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Функция f называется *монотонной*, если f либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Функция f называется *строго монотонно возрастающей (убывающей)*, если для любых $x_1,\ x_2 \in X$

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\ (f(x_1) > f(x_2)).$$

Функция f называется *строго монотонной*, если f либо строго монотонно возрастает, либо строго монотонно убывает.

Теорема 1. *Пусть функция f монотонна на числовом промежутке $(a; b)$. Тогда существуют конечные или бесконечные пределы $f(a+0)$, $f(b-0)$. При этом, если f монотонно возрастает, то*

$$f(a+0) = \inf_{x \in (a;b)} f(x), \quad f(b-0) = \sup_{x \in (a;b)} f(x).$$

Если же f монотонно убывает, то

$$f(a+0) = \sup_{x \in (a;b)} f(x), \quad f(b-0) = \inf_{x \in (a;b)} f(x).$$

Доказательство. Рассмотрим для примера случай, когда f монотонно возрастает. Пусть $y_0 := \inf_{x \in (a,b)} f(x)$ — конечное число (случай бесконечного y_0 разобрать самостоятельно!). В силу характеристического свойства точной нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_1 \in (a; b)$

такое, что $f(x_1) < y_0 + \varepsilon$. Пусть $x \in (a; x_1)$. Тогда $y_0 = \inf_{x\in(a;b)} f(x) \leq$ $\leq f(x) \leq f(x_1) < y_0 + \varepsilon$, значит, $|f(x) - y_0| < \varepsilon \ \forall x \in (a; x_1)$. Таким образом, $\lim_{x\to a+} f(x) = y_0$. Аналогично доказывается, что $\lim_{x\to b-} f(x) =$ $= \sup_{x\in(a;b)} f(x)$.

Теорема 2. *Пусть функция f монотонна на интервале $(a; b)$ и $x_0 \in (a; b)$. Тогда существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$. Если функция f монотонно возрастает, то $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$, а если убывает, то $f(x_0 - 0) \geq f(x_0) \geq$ $\geq f(x_0 + 0)$. Если $a < x_1 < x_2 < b$ и функция f монотонно возрастает, то $f(x_1 + 0) \leq f(x_2 - 0)$, а если убывает, то $f(x_1 + 0) \geq f(x_2 - 0)$.*

Доказательство. Рассмотрим для примера случай, когда f монотонно возрастает. Рассмотрим f на интервале $(a; x_0)$. Из теоремы 1 следует, что существует $f(x_0 - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Но так как $f(x) \leq f(x_0)$ для любых $x \in (a; x_0)$, то $\sup_{(a,x_0)} f$ конечен и не превосходит $f(x_0)$. По теореме 1 он совпадает с $f(x_0 - 0)$, значит, $f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$. Аналогично показывается, что существует $f(x_0 + 0) \in \mathbb{R}$ и $f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$.

Пусть теперь $x_1 < x_2$, x_1, $x_2 \in (a; b)$. Выберем x', x'' такие, что $x_1 < x' < x'' < x_2$. В силу монотонности функции f получаем $f(x_1) \leq$ $\leq f(x') \leq f(x'') \leq f(x_2)$. Устремим x' к x_1, тогда по теореме о переходе к пределу в неравенствах получаем, что $f(x_1 + 0) = \lim_{x'\to x_1+0} f(x') \leq$ $\leq f(x'')$. Устремляя x'' к x_2, по той же теореме получаем, что $f(x_1+0) \leq$ $\leq \lim_{x''\to x_2-0} f(x'') = f(x_2 - 0)$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Любая точка разрыва $c \in (a; b)$ монотонной функции f, определенной на интервале $(a; b)$, является точкой разрыва первого рода.*

Следствие 2. *Число точек разрыва монотонной на $(a; b)$ функции f не более, чем счетно.*

Доказательство. Для определенности предположим, что f монотонно возрастает и пусть A — множество точек разрыва функции f на интервале $(a; b)$. Предположим, что множество A бесконечно. Рассмотрим любые две точки x_1, $x_2 \in A$ и пусть $x_1 < x_2$. По теореме 2 имеем $f(x_1 + 0) \leq f(x_2 - 0)$, поэтому интервалы $(f(x_1 - 0), f(x_1 + 0))$ и $(f(x_2-0), f(x_2+0))$ не пересекаются. Для любой точки $x \in A$ выберем рациональное число q_x из интервала $(f(x-0), f(x+0))$. В силу доказанного выше $x_1 \neq x_2 \Rightarrow q_{x_1} \neq q_{x_2}$. Таким образом, отображение $q : A \to \mathbb{Q}$, которое сопоставляет x рациональное число q_x, инъективно. Это означает, что множество A равномощно бесконечному подмножеству $q(A)$ счетного множества A. Значит, $q(A)$ счетно, поэтому счетно и множество A.

Пример. $f(x) = [x]$, где $[x]$ — целая часть x. Множество точек разрыва f счетно и совпадает с $\mathbb{Z}$.

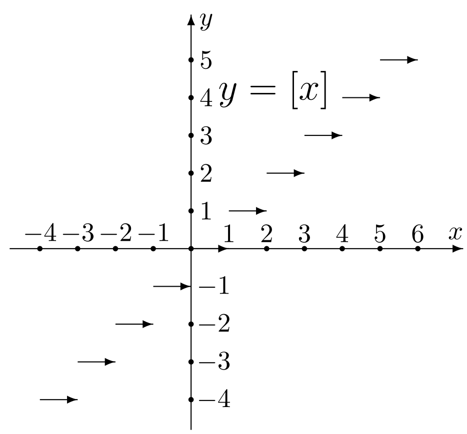

Рис. 31.

Теорема 3. *Монотонная функция, определенная на отрезке $[a;b]$, является непрерывной тогда и только тогда, когда образ $f([a;b])$ является отрезком.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы следует из теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении.

Достаточность. Пусть $f([a;b])$ — отрезок и для определенности f возрастает на $[a;b]$. Покажем, что f непрерывна на $[a;b]$. Предположим, что это не так. Тогда существует точка $x_0 \in [a;b]$, в которой f разрывна.

Рассмотрим случай, когда $x_0 \in (a;b)$ (случаи $x_0 = a$ или $x_0 = b$ рассмотрите самостоятельно!). Тогда

$$f(x') \leq f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0) \leq f(x'') \qquad (1)$$

для любых точек $x' \in [a;x_0)$ и $x'' \in (x_0;b]$ в силу монотонного возрастания f, причем $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Фиксируем y_0 такое, что $f(x_0 - 0) < y_0 < f(x_0 + 0)$ и $y_0 \neq f(x_0)$. В силу (1) имеем $y_0 \notin f([a;b])$.

Так как $f(a) \le y_0 \le f(b)$, множество $f([a;b])$ не может быть отрезком. Теорема 3 доказана.

Замечание. Образ интервала $(a;b)$ при монотонном отображении f может не быть интервалом.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1, \\ x+1, & -1 \le x \le 1, \\ 2, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Функция f непрерывна, монотонна и $f((-2;2)) = [0;2]$.

Теорема 4. *Пусть f строго монотонна на числовом промежутке I. Для того, чтобы функция f была непрерывной на I, необходимо и достаточно, чтобы образ $J = f(I)$ был числовым промежутком того же типа.*

Доказательство. Если $I = [a;b]$, то это следует из теоремы 3. Рассмотрим случай, когда $I = [a;b)$ и функция f строго монотонно возрастает. Остальные случае рассматриваются аналогично.

Необходимость. Пусть f непрерывна. Фиксируем последовательность $a < b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots$ такую, что $b_n \to b$, $n \to \infty$. Так как f непрерывна, то по теореме 3 $f([a;b_n])$ — это отрезок $[f(a);f(b_n)]$. При этом в силу строгой монотонности функции f имеем $f(b_1) < f(b_2) < < \cdots < f(b_n) < \cdots$. Поэтому

$$f(I) = f(\cup_{n=1}^{\infty}[a;b_n]) = \cup_{n=1}^{\infty} f([a;b_n]) =$$

$$= \cup_{n=1}^{\infty}[f(a);f(b_n)] = [f(a); \lim_{n\to\infty} f(b_n)) = J$$

промежуток того же типа, что и I.

Достаточность. Предположим, что f строго монотонно возрастает, и $f([a;b)) = [f(a);\beta)$. Докажем, что f непрерывна. Пусть $x_0 \in [a;b)$. Докажем непрерывность функции f в точке x_0. Фиксируем число $c \in \in (x_0;b)$. Тогда $f(x) \le f(c)$, $x \le c$ и $f(x) > f(c)$, $x > c$ в силу строгой монотонности f. Значит,

$$f([a;c]) = [f(a);\beta) \cap (-\infty; f(c)] = [f(a); f(c)].$$

Значит, $f([a;c])$ — отрезок, поэтому по теореме 3 функция f непрерывна на $[a;c]$, следовательно, f непрерывна в точке $x_0 \in [a;c)$. Так как x_0 — любая точка из $[a;b)$, то f непрерывна на $[a;b)$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть f непрерывна на числовом промежутке I. Для того, чтобы существовала обратная функция $f^{-1} : f(I) \to I$ необходимо и достаточно, чтобы f была строго монотонна.*

Доказательство. Достаточность очевидна, так как если f строго монотонна, то она инъективна, следовательно, $f : I \to f(I)$ — биекция.

Необходимость. Пусть f обладает обратной $f^{-1} : f(I) \to I$. Тогда f инъективна.

Предположим, что f не является строго монотонной. Тогда существуют точки $x_1 < x_2 < x_3$ такие, что $f(x_2)$ не лежит между $f(x_1)$ и $f(x_3)$. Предположим, для определенности, что $f(x_1) < f(x_3)$. Возможны два случая: $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$ или $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$. Разберем первый случай, второй рассматривается аналогично.

Так как $x_2 < x_3$ и f непрерывна на $[x_2;x_3]$, а $f(x_1) \in [f(x_2);f(x_3)]$ то по теореме Больцано-Коши $\exists x' \in [x_2;x_3]$ такая, что $f(x') = f(x_1)$. Так как $x_1 \notin [x_2;x_3]$, то $x_1 \neq x'$, но $f(x_1) = f(x')$. Это противоречит инъективности f. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Если функция f непрерывна и строго монотонна на числовом промежутке I, то f^{-1} непрерывна и строго монотонна на $J = f(I)$.*

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай, когда f строго монотонно возрастает. Предположим противное, т.е. для некоторых $y_1 < y_2$ выполняется неравенство $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Тогда в силу монотонного возрастания f имеем $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ — противоречие. Значит, f^{-1} строго монотонно возрастает на J.

Теперь докажем, что f^{-1} непрерывна на J. Так как f непрерывна и строго монотонна на числовом промежутке I, то по теореме 4 промежуток J — того же типа, что и I. Обратная функция f^{-1} строго монотонна на J и отображает его на числовой промежуток I того же типа, следовательно, по теореме 4 функция f^{-1} непрерывна на J. Теорема 6 доказана.

8.7 Непрерывность элементарных функций

Теорема 1. *Степенная функция $y = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$, является непрерывной в области своего определения.*

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1) Функция $y = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Это очевидно.

2) Функция $y = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, непрерывна на $\mathbb{R}$ как произведение непрерывных функций, так как $x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{m \text{ раз}}$.

3) Функция $y = x^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ как частное непрерывных функций, так как $y = x^{-m} = 1/x^m$.

4) Функции $y = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$, определены при четных n на $[0; +\infty)$, а при нечетных — на $\mathbb{R}$. Эта функция непрерывна, так как обратна к функции $y = x^n$, которая рассматривается на $[0; +\infty)$ при четных n и на $\mathbb{R}$ — при нечетных. При таком выборе области определения функция $y = x^n$ является непрерывной и строго монотонной. Поэтому по теореме 6 предыдущего пункта $y = x^{1/n}$ непрерывна в области своего определения.

5) Функция $y = x^{m/n}$, где m, $n \in \mathbb{N}$ и взаимно просты, определена там же, где и $y = x^{1/n}$. Она непрерывна как суперпозиция двух непрерывных функций $y = x^{1/n}$ и $y = x^m$.

6) Функция $y = x^{-m/n}$, где m, $n \in \mathbb{N}$ и взаимно просты, определена и непрерывна при четных n на $(0; +\infty)$, а при нечетных — на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ как частное двух непрерывных функций: $y = 1/x^{m/n}$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Сначала докажем, что $y = a^x$ непрерывна в точке $x = 0$, т. е. $\lim_{x\to 0} a^x = a^0 = 1$.

Достаточно рассмотреть случай, когда $a > 1$, так как при $0 < a < 1$ имеем $a^x = 1/(1/a)^x$, где $1/a > 1$.

Ранее было доказано, что $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Из свойств пределов последовательностей следует, что $\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что $a^{1/N} < 1+\varepsilon$, $a^{-1/N} > 1-\varepsilon$.

Если $|x| < 1/N$, то $-1/N < x < 1/N$, откуда

$$1 - \varepsilon < a^{-1/N} < a^x < a^{1/N} < 1 + \varepsilon \Longrightarrow |a^x - 1| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{x \to 0} a^x = a^0 = 1$.

Теперь докажем непрерывность $y = a^x$ в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{x \to x_0} (a^{x_0} a^{x - x_0}) = a^{x_0} \lim_{x \to x_0} a^{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{t \to 0} a^t = a^{x_0}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ непрерывна на $(0; +\infty)$.*

Доказательство. Функция $y = \log_a x$ является обратной к непрерывной строго монотонной функции $y = a^x$, следовательно, по теореме 6 предыдущего пункта она непрерывна.

Теорема 4. *Степенная функция $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ непрерывна в области своего определения.*

Доказательство. Если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то это следует из теоремы 1. Пусть α — иррациональное число. Тогда при $\alpha > 0$ функция $y = x^\alpha$ определена на $[0; +\infty)$, а при $\alpha < 0$ — на $(0; +\infty)$. Если $x > 0$, то $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций.

Осталось показать, что при $\alpha > 0$ функция $y = x^\alpha$ непрерывна в точке $x = 0$, т. е. $\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0$. Но это проверяется непосредственно с помощью определения предела. Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \varepsilon^{1/\alpha}$: $x \in (0, \delta) \Longrightarrow |x^\alpha| < \varepsilon$.

Теорема 5. *Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны в области своего определения.*

Доказательство. Рассмотрим $y = \sin x$. Имеем

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|.$$

Таким образом, если $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$, то $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$. Это означает непрерывность функции $y = \sin x$ в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Функция $y = \cos x = \sin(\pi/2 - x)$ непрерывна как суперпозиция двух непрерывных функций.

Функция $y = \operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ непрерывна как частное двух непрерывных функций в точках, где $\cos x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна в точках $x \neq \pi k$.

Теорема 6. *Обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ *непрерывны в области своего определения.*

Доказательство. Рассмотрим для примера функцию $y = \arcsin x$. Эта функция обратна к функции $y = f(x)$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, которая получается сужением функции $y = \sin x$ на отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$. Функция f непрерывна и строго монотонно возрастает. Поэтому ее обратная $y = \arcsin x$ является непрерывной по теореме 6 предыдущего пункта.

Теорема 7. *Любая элементарная функция является непрерывной в области своего определения.*

Действительно, в теоремах 1–6 установлена непрерывность основных элементарных функций в областях их определения. Любая элементарная функция получается их основных элементарных с помощью арифметических операций и операции суперпозиции, которые не нарушают непрерывности.

Содержание

Список литературы

[1] Никольский С.М. Курс математического анализа, т. 1. – М.: Наука, 1973.

[2] Зорич В.А. Математический анализ, ч. I. – М.: Наука, 1981.

[3] Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу. Казань: КГУ, 2005.

[4] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т.1. М.: Высшая школа, 1973.

[5] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. – М.: Физматлит, 2000.

[6] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: АСТ, 2007.

[7] Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М,: Мир, 1967.