Счетные и несчетные пространства элементарных исходов. Общая аксиоматика Колмогорова

Салимов Рустем Фаридович

КФУ — ИБ

2023

Счетные пространства элементарных событий.

Легко придумать вероятностные пространства, в которых число элементарных событий бесконечно. Рассмотрим вначале такое, в котором количество исходов счетно $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. В этом случае вероятность любого события $A \subset \Omega$ можно определить как

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p(\omega_i) \tag{1}$$

Если $|A| < \infty$, то сумма конечна, если же $|A| = \infty$, то сумму надо понимать как сумму бесконечного ряда. Заметим, что ряд обязательно сходится, поскольку мы требуем, чтобы сумма вероятностей всех исходов была равна 1:

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = 1, \tag{2}$$

и $p(\omega_i) \geqslant 0$ для всех i.

Пример

Задача. Двое игроков по очереди бросают монету до тех пор, пока не выпадет «герб». Выигрывает тот игрок, который первым выбросит «герб». Найти вероятность победы 1-ого игрока

Пример

Задача. Двое игроков по очереди бросают монету до тех пор, пока не выпадет «герб». Выигрывает тот игрок, который первым выбросит «герб». Найти вероятность победы 1-ого игрока

Решение: Будем обозначать выпадение «решки» 0, а выпадение «герба» 1. Тогда исходы эксперимента можно обозначить как $\omega_1 = \{1\}, \omega_2 = \{0,1\}, \omega_3 = \{0,0,1\}$ и т.д. Если считать, что в каждом бросании монеты «решка» и «герб» равновероятны, то естественно считать, что $p(\omega_n) = 2^{-n}$.
Действительно, если бросать монету n раз, то всевозможных исходов будет 2^n, и так как все они одинаково вероятны, то вероятность исхода $\omega_n = \{0,0,\dots,1\}$, в котором 1 появляется только в последней n-ой позиции, равна $p(\omega_n) = 2^{-n}$.
Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}^2 + \ldots = 1. \tag{3}$$

Продолжение примера

Пусть A_1 — событие, означающее, что в игре побеждает 1-ый игрок. Тогда A_1состоит из исходов с нечетными номерами: $A_1 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots\}$. Событие A_2 (выигрывает второй игрок) состоит из исходов с четными номерами: $A_2 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots\}$. Тогда

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}^3 + \dots = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^4 + \dots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/2^2} = \frac{2}{3}, \tag{4}$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^4 + \dots = \frac{1}{2}^2 (1 + \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^4 + \dots) = \frac{1}{2}^2 \cdot \frac{1}{1 - 1/2^2} = \frac{1}{3}, \tag{5}$$

Так как $A1A2 = \emptyset$ и $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = 1$, то вероятность того, что игра не закончится (ничья), равна 0.

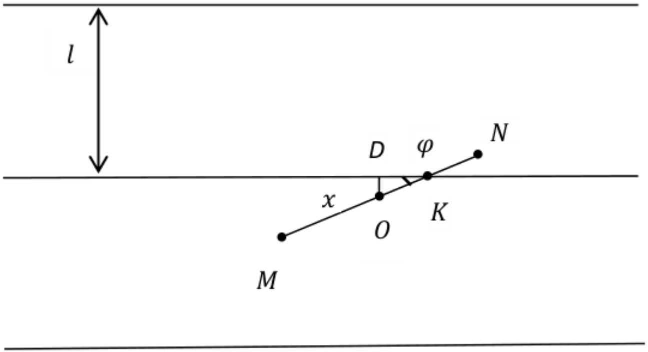
Геометрические вероятности.

Рассмотрим теперь случай вероятностного пространства, в котором число исходов несчетно. Как известно, примерами таких множеств являются отрезки, прямоугольники и т.п. В этом случае мы не можем занумеровать все исходы. Даже если мы припишем каждому исходу определенную вероятность, мы не можем корректно сформулировать условие нормировки, состоящее в том, что вероятность всего пространства равна 1 (не определено понятие суммы несчетного множества чисел). Рассмотрим задачи, в которых мы можем определить вероятности с помощью понятия длины, площади, объема и т.д. (мера). Пусть S — некоторый геометрический объект на прямой, на плоскости или в пространстве. Если $A \subset S$, то мера A будет обозначать геометрическую меру множества A (длину в 1-мерном случае, площадь – в 2-мерном случае и т.д.). Мы будем считать, что пространство исходов состоит из всех точек множества S, а вероятность события $A \subset S$ определена как

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}, \tag{6}$$

где $\mu(\cdot)$ обозначает меру. Вероятность для точки посчитать не можем!

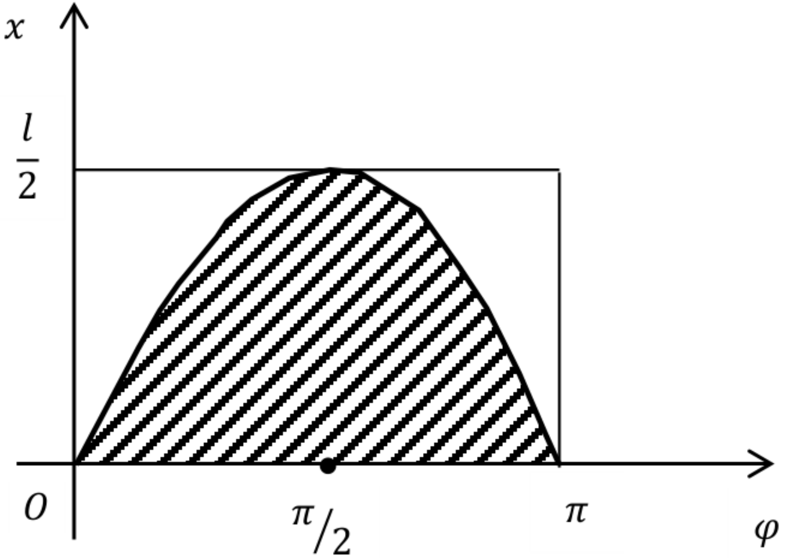
Задача Бюффона. Предположим, что плоскость разлинована параллельными линиями, лежащими на расстоянии l друг от друга. На плоскость случайным образом бросается игла длины l. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из параллельных линий?



Решение. Построим вероятностную модель этого эксперимента с помощью понятия геометрической вероятности. Пусть точка O обозначает центр иглы (середину отрезка MN на рис.). Тогда мы можем охарактеризовать положение иглы относительно системы линий числами x и phi. Здесь x — расстояние от точки O до ближайшей линии, а ϕ — угол, который образует игла (или продолжение линии иглы) с ближайшей линией. Заметим, что $x \in [0, l/2]$, $\phi \in [0, \pi]$. Тогда мы можем описать пространство всех исходов как множество

$$S = \{(x, \phi) : 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}, 0 \leqslant \phi \leqslant \pi\}. \tag{7}$$

Множество S представляет собой прямоугольник. Поскольку мы считаем, что все исходы (x, ϕ) одинаково возможны в этом эксперименте, то естественно оценить вероятность с помощью формулы (6). Заметим, что если игла пересекает линию в точке K, то $|OK| \leqslant |ON|$. Отрезок OK является гипотенузой в прямоугольном треугольнике DOK, поэтому $|OK| = |OD|/\sin\phi$. Таким образом, игла пересечет линию, если происходит событие $A = \{(x, \phi) : x/\sin\phi \leqslant l/2$.


x
l/2
O
π/2
π
φ

Пространство исходов представляет собой прямоугольник со сторонами $l/2$ и π, а событие A состоит из точек этого прямоугольника, которые лежат под синусоидой

$$A = \{(x, \phi) : \frac{x}{\sin\phi} \leqslant l/2. \tag{8}$$

Поэтому

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)} = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\phi d\phi}{\pi\frac{l}{2}} = \frac{-\cos\phi + \cos 0}{\pi} = \frac{2}{\pi}. \tag{9}$$

Общее определение вероятностного пространства. Алгебра

Пусть Ω — множество элементарных исходов некоторого случайного эксперимента (явления), которое мы будем называть пространством элементарных событий. Абстрагировавшись от природы этого эксперимента, мы представляем эти исходы как элементы (точки) множества Ω, конечного или бесконечного.

Определение

Совокупность $\mathcal{A}$ подмножеств Ω называется алгеброй, если выполнены следующие условия:

- A1 $\Omega \in \mathcal{A}$
- A2 *Если* $A \in \mathcal{A}$, *то* $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
- A3 *Если* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, *то* $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Например, совокупность подмножеств, состоящая из пустого множества $\emptyset$ и всего пространства Ω, образует алгебру событий. Это самая «бедная» алгебра событий — в ней всего два элемента.

Если $\mathcal{A}$ состоит из всех возможных подмножеств множества Ω, то $\mathcal{A}$ также является алгеброй событий (самой «богатой»).

Из аксиом A1-A3, определяющих алгебру событий, можно вывести следующие дополнительные свойства алгебры $\mathcal{A}$:

- A4 $\emptyset \in \mathcal{A}$
- A5 Если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.
  Т.к.
  $$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \tag{10}$$
  то из условий A2 и A4 следует, что
  $$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \overline{\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}} \in \mathcal{A}. \tag{11}$$

Приведем еще один пример алгебры событий. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества множества Ω, образующие его разбиение. Это означает, что $A_i A_j = \emptyset$ для всех пар $i \neq j$ и $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Подмножества $A_1, \ldots, A_n$ называют иногда атомами этого разбиения.

Рассмотрим совокупность подмножеств $\mathcal{A}$, являющихся объединением любых атомов из системы $A_1, \ldots, A_n$. Пустое подмножество $\emptyset$ также включаем в систему $\mathcal{A}$, считая, что пустое подмножество является объединением нулевого количества атомов. Тогда легко показать, что совокупность $\mathcal{A}$ является алгеброй событий.

Сигма-алгебра

Во многих задачах теории вероятностей необходимо совершать бесконечное (счетное) число теоретико-множественных операций. Поэтому для построения общей теории необходимо усилить условие A3 в определении алгебры.

Определение

Совокупность множеств называется σ-алгеброй («сигма-алгеброй»), если выполнены условия A1, A2 и условие A3':

A3' *Если* $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots,$ *то* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$

Легко видеть, что свойства A4–A6 остаются справедливыми и для σ-алгебр. Более того, свойство A5 остается справедливым и для счетного множества элементов алгебры $\mathcal{A}$ (A5'):

5. Если $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots,$ то $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$

Это свойство следует из тождества $\overline{\cap_{i=1}^{\infty} A_i} = \cap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ и аксиомы A2.
В дальнейшем элементы σ-алгебры $\mathcal{A}$ мы будем называть **событиями**.

Вероятность

Определение

Пусть Ω — пространство элементарных событий, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра событий на этом пространстве. Вероятностью называется функция $\mathbb{P}$, заданная на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и удовлетворяющая условиям:

- В1) *Свойство положительности: для любого $A \in \mathcal{A}$ $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$.*
- В2) *Свойство нормировки: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.*
- В3) *Свойство σ-аддитивности: Если $A_i \in ,i = 1, 2, \ldots$ и для любой пары $i \neq j$ $A_i A_j = \emptyset$ (события $A_i, i = 1, 2, \ldots$ — попарно несовместны), то*

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i). \tag{12}$$

Из аксиом В1–В3 можно вывести другие свойства вероятности, которые мы уже частично обсуждали в случае конечного вероятностного пространства.

Свойства вероятности

Теорема (Свойства вероятности)

(4) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(5) *Для любых попарно непересекающихся событий* $A_1, \ldots, A_n$, $A_i A_j = \emptyset$ *для любых* $i \neq j$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \tag{13}$$

(6) *Для любого события*

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \tag{14}$$

(7) *Для любых событий* A_1, A_2 *таких, что* $A_1 \subset A_2$

$$\mathbb{P}(A_2 \setminus A_1) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_1) \leqslant \mathbb{P}(A_2). \tag{15}$$

(8) *Для любых событий* A *и* B

$$\mathbb{P}(A \bigcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB). \tag{16}$$

Теорема (Свойства вероятности)

(9) *Для любых событий* $A_i, i = 1, \ldots, n$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i). \tag{17}$$

(10) *Свойство непрерывности: если события* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *образуют возрастающую последовательность событий* $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ *, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i), \tag{18}$$

если события $A_1, A_2, \ldots$ *образуют убывающую последовательность событий, то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i), \tag{19}$$

Доказательство В4. Пусть $A_i = \emptyset, i = 1, 2, \ldots$. Так как $\emptyset = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, то в силу аксиомы В3

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset). \tag{20}$$

что возможно лишь в случае, когда $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Доказательство В5. Пусть $A_i = \emptyset$ для $i \geqslant n+1$, тогда

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \tag{21}$$

Доказательство В6. Из В2 и В4 следует, что $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$, откуда следует (14).

Доказательство В7. Из $A_1 \subset A_2$ следует, что $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$. Из В5 следует $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1)$. Отсюда следует (15).

Доказательство B8. Заметим, что $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2))$. Из B5 и B7 следует

$$\mathbb{P}(A_1 \bigcup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 A_2). \tag{22}$$

Доказательство B9.Из (16) следует

$$\mathbb{P}(A \bigcup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \tag{23}$$

Далее воспользуемся методом математической индукции. Пусть

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i), \tag{24}$$

тогда из (23) и (25) следует

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + \mathbb{P}(A_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i), \tag{25}$$

Доказательство B10. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, положим $A_0 = \emptyset$. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \tag{26}$$

где $B_i = A_i \setminus Ai - 1$. Заметим, что события $B_i, i = 1, 2, \ldots$ — попарно не пересекаются. Тогда из аксиомы B3 следует

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_{i-1}) & (27) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(\emptyset)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) & (28) \end{aligned}$$

Соотношение (18) доказано.

Доказательство B10. Продолжение Пусть теперь $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$,, тогда $\overline{A_1} \subset \overline{A_2} \subset \overline{A_3} \subset \cdots$, и из соотношения (18) следует

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}\right). \tag{29}$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \mathbb{P}(A_n)) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \tag{30}$$

и, тем самым,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i). \tag{31}$$