Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов (Казань, КГТУ, К(П)ФУ). **Некоммутативная версия теоремы Никишина о факторизации положительных операторов.**

Всюду далее τ — точное нормальное следовое состояние на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов в гильбертовом пространстве H. Обозначим $\mathcal{M}^+$ конус положительных операторов, M^{pr} — множество проекторов из $\mathcal{M}$. Для $p \in M^{\mathrm{pr}}$ обозначим $p^\perp$ дополнительный к p проектор $1-p$. Один из распространенных подходов к построению так называемой *некоммутативной теории вероятностей* состоит в том, что в качестве аналога пространства случайных величин рассматривается алгебра $S(\tau)$ самосопряженных операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$. (Напомним, что самосопряженный оператор x со спектральным разложением $x = \int_{\mathbf{R}} \lambda\, de_\lambda^x$ называется *присоединенным к* $\mathcal{M}$, если $e_\lambda^x \in M^{\mathrm{pr}}$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$.) Если наделить $S(\tau)$ топологией сходимости по мере относительно τ, то $S(\tau)$ становится F-пространством. (Базис окрестностей нуля в этой топологии образуют множества $U(\varepsilon,\delta) = \{x \in S(\tau)\colon \exists p \in M^{\mathrm{pr}},\ \|pxp\| \leqslant \varepsilon,\ \tau(p^\perp) \leqslant \delta\}$ $(\varepsilon,\delta > 0)$.) Оператор $x \in S(\tau)$ называют *интегрируемым*, если $\int_{\mathbf{R}} |\lambda|\, d\tau(e_\lambda^x) < \infty$. Пространство всех таких операторов с нормой $\|x\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |\lambda|\, d\tau(e_\lambda^x)$ образует вещественное банахово пространство, обозначаемое далее $L^1(\tau)$. Конус положительных операторов из $S(\tau)$ будем обозначать $S^+(\tau)$. Для оператора $x \in S^+(\tau)$ обозначим $\operatorname{supp} x$ его носитель. Отметим, что формула $\tau(x) = \int_{\mathbf{R}^+} \lambda\, d\tau(e_\lambda^x)$ $(x \in S^+(\tau))$ продолжает τ на $S^+(\tau)$.

Лемма 1 [4, лемма 9]**.** *Пусть C — выпуклое ограниченное подмножество $S^+(\tau)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $p \in M^{\mathrm{pr}}$ так, что* $\sup\{\tau(pxp)\colon x \in C\} < \infty$ *и* $\tau(p^\perp) < \varepsilon$.

Лемма 2. *Пусть C — выпуклое ограниченное подмножество $S^+(\tau)$. Тогда найдется такой оператор $h \in M^+$, что* $\operatorname{supp} h = 1$ *и* $\sup\{\tau(h^{1/2}xh^{1/2})\colon x \in C\} \leqslant 1$.

Доказательство. леммы 1 по сути не отличается от первой части доказательства леммы VI.5.5 [2]. Лемма 2 является некоммутативным обобщением леммы VI.5.5 [2]. Построение оператора h при ее доказательстве требует некоторого усовершенствования по сравнению с коммутативным случаем.

Теорема. *Пусть E — упорядоченное банахово пространство с замкнутым порождающим конусом положительных элементов E^+ и пусть $T\colon E \to S(\tau)$ — непрерывный положительный линейный оператор. Тогда T может быть представлен в виде $T = T_2T_1$, где $T_1\colon E \to L^1(\tau)$ и $T_2\colon L^1(\tau) \to S(\tau)$ — непрерывные положительные линейные операторы, причем T_2 имеет вид $T_2x = k^{1/2}xk^{1/2}$* $(x \in L^1(\tau),\ k \in S^+(\tau))$.

Доказательство. Пусть E_1 — единичный шар E и $E_1^+ = E_1 \cap E^+$. Тогда $T(E_1^+)$ — выпуклое ограниченное подмножество $S^+(\tau)$. По лемме 2 найдется такой $h \in M^+$, что $\operatorname{supp} h = 1$ и $\sup\{\tau(h^{1/2}xh^{1/2})\colon x \in T(E_1^+)\} \leqslant 1$. Возьмем $k = h^{-1} \in S(\tau)$ и положим $T_1z = h^{1/2}(Tz)h^{1/2}$ $(z \in E)$, $T_2x = k^{1/2}xk^{1/2}$ $(x \in L^1(\tau))$. Применяя теорему Крейна–Шмульяна о несплющенности замкнутого порождающего конуса, несложно убедиться, что T_1 и T_2 обладают требуемыми свойствами.

Замечание. Как следует из известных утверждений об автоматической непрерывности положительных операторов (см. [1, теорема 2.2.32], [3, следствие 1]), требование непрерывности в теореме является излишним. Более того, можно ослабить требование замкнутости конуса E^+ (см. [3]).

Работа второго автора поддержана Министерством образования и науки РФ (госконтракт № 02.740.11.0193).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aliprantis Ch. D.*, *Tourky R.* Cones and Duality. Providence, RI: AMS, 2007.
2. *Вахания Н. Н.*, *Тариеладзе В. И.*, *Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Физматлит, 1985.
3. *Веселова Л. В.*, *Тихонов О. Е.* Обобщение теорем Крейна–Шмульяна и Лозановского на случай метризуемых пространств с конусом. — Ученые записки Казанского ун-та. Сер. физ.-матем. науки, 2010, т. 152, кн. 1, с. 126–131.
4. *Tikhonov O. E.* On the Lozanovskiĭclass of condensing operators and its applications to the non-commutative integration. — Israel Math. Conf. Proc., 1999, v. 13, p. 203–207.