КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ РАЗРЕЗАНИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ НА ОЛИМПИАДАХ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Киндер Михаил Иванович, к.ф.-м.н., доцент,
Казанский (Приволжский) Федеральный Университет,
mkinder@rambler.ru

ВВЕДЕНИЕ. Конструирование и анализ комбинаторных алгоритмов является одной из важнейших задач теоретической информатики. Комбинаторные числа и полиномы, возникающие при решении задач на разрезание многоугольников, встречаются в различных комбинаторных конфигурациях. Они имеют важное значение для алгоритмических проблем, возникающих в области компьютерной графики или вычислительной геометрии, где они обеспечивают простые модели для реальных ситуаций [1]. В качестве примеров наиболее простых и часто встречающихся классов комбинаторных объектов обычно приводятся перестановки, размещения и сочетания элементов, разбиения множеств на подмножества и чисел на слагаемые, двоичные и подвешенные деревья и т.д. Предлагаемые в статье перечислительные задачи разрезания объединены общим подходом, их можно использовать при подготовке школьников и студентов к олимпиадам по информатике. Алгоритмы решения опираются на рекуррентные соотношения, которые особенно удобны для применения метода динамического программирования. Некоторые из приводимых рекуррентных соотношений являются новыми, они выводятся из комбинаторных соображений.

НЕПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ХОРДЫ В ВЫПУКЛОМ МНОГОУГОЛЬНИКЕ

ЗАДАЧА 1. *Пусть на окружности задано n точек. Необходимо подсчитать количество способов провести ровно k непересекающихся хорд, каждая из которых соединяет ровно две точки.*

Пусть $m[n][k]$ — количество способов нарисовать k непересекающихся хорд с вершинами в заданных n точках. Выделим одну из точек, например, первую, и разобьем все способы на два непересекающихся класса: те, которые содержат хорду, выходящую из точки 1, и те, в которых нет такой хорды.

Количество способов первого класса, очевидно, равно $m[n-1][k]$.

Все способы второго класса содержат некоторую хорду, выходящую из точки 1. Пусть, это будет хорда, соединяющая точки с номерами 1 и $i+2$. По разные стороны от этой хорды расположено i и $n-i-2$ точки. Предположим, что на дуге, содержащей i точек, проведено j хорд, и значит, на дуге с $n-i-2$ точками проведено $k-j-1$ таких хорд. (Учтём, что мы уже провели одну хорду, соединяющую точки 1 и $i+2$.) Количество способов провести j непересекающихся хорд на первой дуге равно $m[i][j]$; количество таких способов на второй дуге равно $m[n-i-2][k-j-1]$. По правилу произведения общее число всех таких комбинаций равно $m[i][j]\cdot m[n-i-2][k-j]$. Суммируя по всем i от 0 до $n-2$ и по всем j от 0 до $k-1$, получим окончательную формулу для подсчета чисел $m[n][k]$.

ТЕОРЕМА 1. *Количество способов провести k непересекающихся хорд с концами в заданных n точках окружности равно*

$$m[n][k] = m[n-1][k] + \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{k-1} m[i][j]\cdot m[n-i-2][k-j-1],$$

при этом $m[i][0] = 1$ и $m[0][j] = 0$ для всех $i \ge 0$ и для всех $j \ge 1$.

Приведем несколько известных значений последовательности $m[n][k]$.

$$m[n][1] = \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

для всех $n \geq 1$, так как имеется $\tfrac{1}{2}n(n-1)$ способов выбрать две точки и провести между ними одну линию.

$$m[2n][n] = C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

для всех $n \geq 1$, где C_n — n-ое число Каталана [3], так как для $2n$ точек и n соединительных хорд мы получаем известную интерпретацию чисел Каталана.

В энциклопедии [2] целочисленных последовательностей ненулевые числа $m[n][k]$ образуют последовательность A080159, они совпадают также с количествами *путей Моцкина* длины n, у которых имеется ровно k шагов вверх [4]. Приведем явную формулу для ненулевых чисел $m[n][k]$ (при $n \geq 2k$):

$$m[n][k] = \frac{n!}{(n-2k)!\,k!\,(k+1)!}\,.$$

Разрезание выпуклых многоугольников на *k* частей

Задача 2. *Сколько существует способов разрезать выпуклый n-угольник ровно на k частей с помощью диагоналей, непересекающихся внутри многоугольника?*

Пусть $m[n][k]$ — количество способов разрезать n-угольник на k частей.

Занумеруем вершины многоугольника числами от 1 до n в порядке его обхода по часовой стрелке. Выделим одно из ребер, например, ребро 1-2, и рассмотрим ту часть K, которая содержит это ребро. Разобьем все способы разрезания на два непересекающихся класса:

1) те, у которых эта часть содержит ребро 2-j, выходящее из вершины 2;
2) и те, у которых в части K нет ребра из вершины 2.

В первом случае часть K содержит ребра 1-2 и 2-j. Все такие разбиения можно разбить на два множества:

1*а*) те, в которых K — это треугольник 1-2-j. Удалив эту часть из разбиения, получим аналогичные задачи для многоугольников с числом сторон $j-1$ и $n-j+2$. Если в первом из них i частей, то второй многоугольник содержит $(k-i-1)$ частей. Количество разбиений этих многоугольников равно

$$m[j-1][i] \cdot m[n-j+2][k-i-1].$$

1*б*) те, в которых K не является треугольником 1-2-j. Тогда можно «объединить» ребра 1-2 и 2-j в одно ребро 1-j. Это означает, что из части K можно удалить треугольник 1-2-j, получив при этом аналогичную задачу для $(j-1)$-угольника 2-3-…-j и $(n-j+2)$-угольника 1-j-…-n. Если в первом из них i частей, то второй многоугольник содержит $(k-i)$ частей. Количество разбиений теперь равно

$$m[j-1][i] \cdot m[n-j+2][k-i].$$

Осталось просуммировать найденные количества способов по всем значениям j от 4 до n и всем i от 0 до $k-1$. (Учтём, что в $(j-1)$-многоугольнике количество частей не может быть равно k, так как по другую сторону от ребра 2-j есть по крайней мере одна часть.) Имеем

$$\sum_{j=4}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} m[j-1][i] \cdot (m[n-j+2][k-i-1] + m[n-j+2][k-i]).$$

Во втором случае, кроме ребра 1-2, часть K содержит также и ребро 2-3. Все такие разбиения можно разбить на два множества:

2*а*) те, в которых K — это треугольник 1-2-3. Удалив эту часть из разбиения, получим аналогичную задачу для $(n-1)$-угольника, который требуется разрезать на $(k-1)$ частей. Количество таких разбиений равно $m[n-1][k-1]$.

2*б*) те, в которых K не является треугольником 1-2-3. Тогда можно объединить ребра 1-2 и 2-3 в одно ребро 1-3. Это означает, что из части K можно удалить треугольник 1-2-3, получив при этом аналогичную задачу для $(n-1)$-угольника 1-3-4-…-n, который нужно разрезать на k частей. Количество таких разбиений равно $m[n-1][k]$. Значит, количество способов во втором случае равно $m[n-1][k-1]+m[n-1][k]$.

ТЕОРЕМА 2. *Количество способов разрезания выпуклого n-угольника ровно на k частей с помощью непересекающихся внутри диагоналей равно*

$$m[n][k]=\sum_{j=3}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} m[j-1][i]\cdot(m[n-j+2][k-i-1]+m[n-j+2][k-i]).$$

при этом $m[n][1]=1$; $m[n][0]=0$ *при* $n\neq 2$, *и* $m[2][0]=1$.

Приведем несколько первых членов последовательности $m[n][k]$:

$m[2][0]=1.$

$m[3][0]=0;$ $m[3][1]=1.$

$m[4][0]=0;$ $m[4][1]=1;$ $m[4][2]=2.$

$m[5][0]=0;$ $m[5][1]=1;$ $m[5][2]=5;$ $m[5][3]=5.$

$m[6][0]=0;$ $m[6][1]=1;$ $m[6][2]=9;$ $m[6][3]=21;$ $m[6][4]=14.$

В энциклопедии [2] последовательность $m[n][k]$ имеет номер A033282.

Приведём явную формулу для чисел $m[n][k]$ через биномиальные коэффициенты:

$$m[n][k]=\frac{1}{k}C_{n-3}^{k-1}\cdot C_{n+k-2}^{k-1}\text{, где } n\geq 3 \text{ и } 1\leq k\leq n-2.$$

Отметим важные частные случаи, возникающие в этой задаче. При $k=2$ выпуклый n-угольник разрезается на две части с помощью одной диагонали, поэтому количество способов совпадает с числом диагоналей выпуклого n-угольника, то есть $m[n][2]=n(n-3)/2$. При $k=n-2$ выпуклый n-угольник можно разрезать только на треугольные части. В этом случае

$$m[n][n-2]=\frac{1}{n-2}C_{2n-4}^{n-3}=\frac{1}{n-1}C_{2n-4}^{n-2}=C_{n-2},$$

и мы приходим к известной формуле Эйлера для чисел Каталана C_{n-2}.

РАЗРЕЗАНИЕ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ НА k ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧА 3. *Сколько существует способов разрезать выпуклый n-угольник на k треугольных частей с помощью непересекающихся внутри диагоналей?*

Решение этой задачи более сложное, хотя и аналогично решению задачи 2. Пусть $m[n][k]$ — количество способов разрезать n-угольник на k треугольных частей.

ТЕОРЕМА 3. *Количество способов разрезать выпуклый n-угольник на k треугольных частей с помощью непересекающихся внутри диагоналей равно*

$$m[n][k]=T[n,k]+\sum_{j=3}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} m[j-1][i]\cdot m[n-j+2][k-i]+$$

$$+\sum_{s=3}^{n-1}\sum_{t=0}^{k} m[s-1][t]\cdot(T[n-s+2,k-t+1]-T[n-s+2,k-t]),$$

где $T[n,\, k] = \sum_{j=3}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} m[j-1][i] \cdot m[n-j+2][k-i-1]$. *Начальные условия*: $m[2][0] = 1$ *и* $m[2][i] = 0$ *при* $i \neq 0$.

Приведем несколько первых членов последовательности $m[n][k]$:

$m[2][0] = 1$.

$m[3][0] = 0$; $m[3][1] = 1$.

$m[4][0] = 1$; $m[4][1] = 0$; $m[4][2] = 2$.

$m[5][0] = 1$; $m[5][1] = 5$; $m[5][2] = 0$; $m[5][3] = 5$.

$m[6][0] = 4$; $m[6][1] = 6$; $m[6][2] = 21$; $m[6][3] = 0$; $m[6][4] = 14$.

В энциклопедии [2] последовательность $m[n][k]$ имеет номер A090985. Приведём явную формулу для чисел $m[n][k]$ через биномиальные коэффициенты:

$$m[n][k] = \frac{1}{n-1} C_{n+k-2}^{k} \sum_{i=0}^{[(n-k-2)/2]} C_{n-k-i-3}^{i-1} \cdot C_{n+k+i-2}^{i}, \text{ где } n \geq 3 \text{ и } 0 \leq k \leq n-2.$$

При $k = 0$ эта формула дает количество способов разрезания выпуклого n-угольника на части, среди которых нет ни одного треугольника, а при $k = n - 2$ мы снова приходим к формуле для чисел Каталана C_{n-2}.

Список литературы

[1] *Липский В.* Комбинаторика для программистов. — М.: Мир, 1988. — 213 с.
[2] http://oeis.org — on-line энциклопедия целочисленных последовательностей.
[3] http://oeis.org/A000108.
[4] http://oeis.org/A055151.