

ГЛАВА 5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, МАТРИЦЫ,¹ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§1. ПЕРЕСТАНОВКИ

Рассмотрим множество n целых чисел:

$$M_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Эти числа можно располагать в различном порядке. Каждое такое расположение называют перестановкой. Например, возможны перестановки:

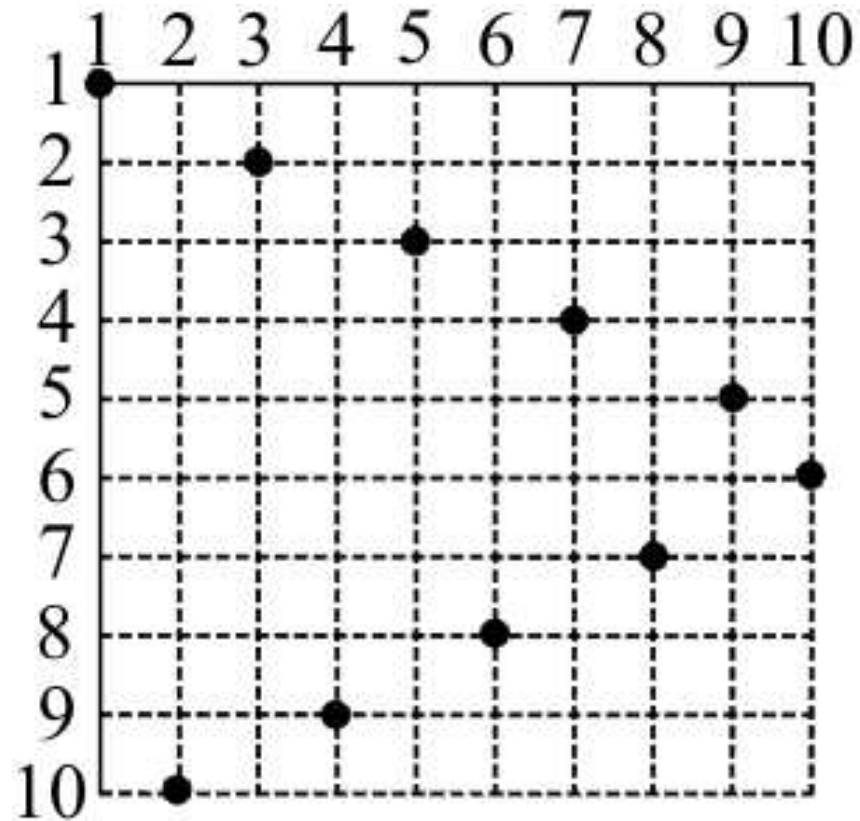
$$1, 2, 3, \dots, n,$$

$$2, 1, 3, \dots, n.$$

Вообще, перестановку будем записывать в виде

$$n_1, n_2, \dots, n_n$$

Каждая перестановка определяет взаимнооднозначное отображение множества M_n на себя. При этом отображении числу 1 соответствует число n_1 , числу 2 соответствует число n_2 и т. д.



Можно построить график такого отображения. Он будет представлять собой n точек, расположенных в узлах целочисленной решетки. Перестановка однозначно определяется ее графиком и наоборот задание графика однозначно определяет перестановку.

Количество всех перестановок множества M_n принято обозначать символом P_n . Покажем, что

$$P_n = 123 \cdots n.$$

Здесь записано произведение всех первых n членов натурального ряда. Принято обозначение

$$123 \cdots n = n!$$

(читается n -факториал).

Для $n = 1$ и $n = 2$ формула

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

очевидно, справедлива:

$$M_1 = \{1\} \Rightarrow P_1 = 1,$$

$$M_2 = \{1, 2\} \Rightarrow P_2 = 2.$$

Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что равенство

$$P_{n-1} = (n - 1)!$$

верно. Возьмем теперь некоторую перестановку множества M_{n-1} и добавим к ней элемент n . Его можно поставить первым, вторым, и, наконец, последним, т. е. n -ым.

Понятно, что таким образом можно создать n перестановок по каждой перестановке множества M_{n-1} , и, поскольку по индуктивному предположению

$$P_{n-1} = (n - 1)!,$$

то формула

$$P_n = nP_{n-1} = n(n - 1)! = n!$$

доказана.

Будем говорить, что элементы $n_i, n_j, i < j$, перестановки

$$n_1, n_2, \dots, n_n$$

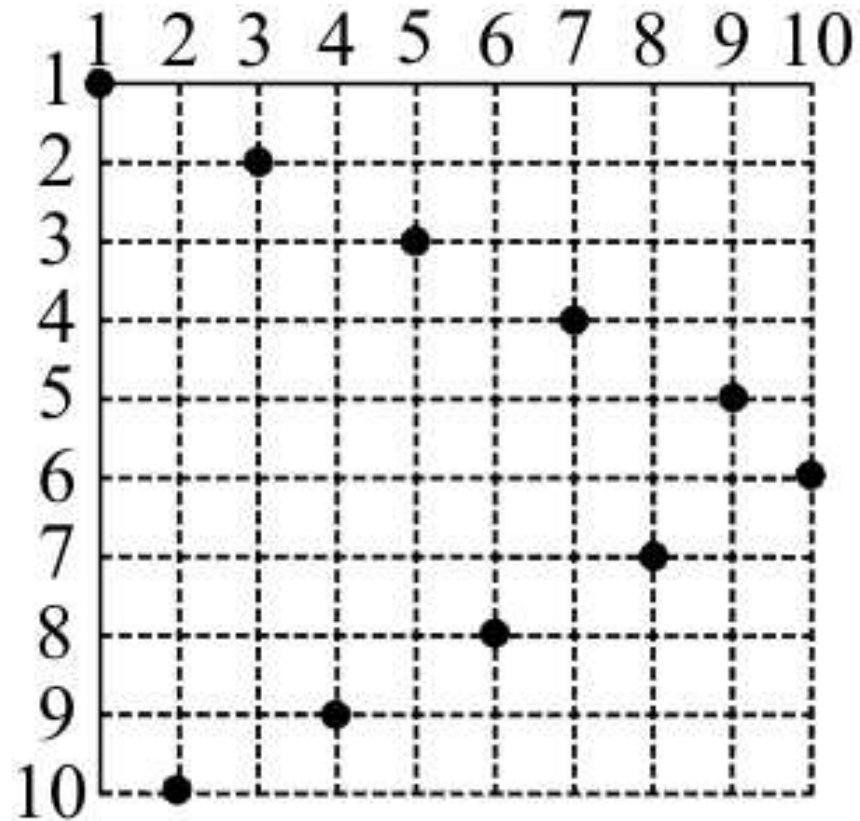
образуют инверсию, если $n_i > n_j$. Например, в перестановке

$$1, 2, 3, \dots, n$$

нет инверсий, а в перестановке

$$2, 1, 3, \dots, n$$

только одна инверсия, ее образуют элементы n_1, n_2 .



Если соединить отрезком на графике перестановки точки (i, n_i) и (j, n_j) , то он будет иметь отрицательный наклон для точек, образующих инверсию. Какие точки образуют инверсию в перестановке

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2 ?

Количество всех инверсий данной перестановки будем обозначать

$$\sigma(n_1, n_2, \dots, n_n)$$

и называть сигнатурой перестановки.

Перестановка называется четной, если ее сигнатура — четное число (ноль, как обычно, полагаем четным числом). В противном случае перестановка называется нечетной.

Например, перестановка

$$1, 2, 3, \dots, n$$

четная, а перестановка

$$2, 1, 3, \dots, n$$

нечетная.

Говорят, что в перестановке выполнена транспозиция, если поменяли местами два ее элемента. Чтобы определить транспозицию данной перестановки, нужно задать номера двух, переставляемых элементов.

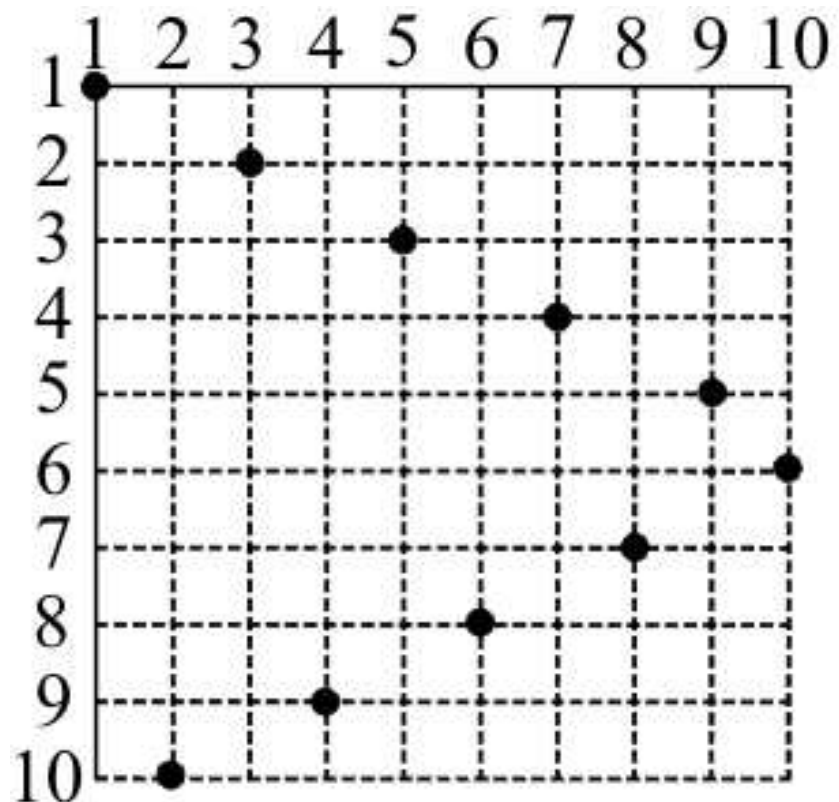
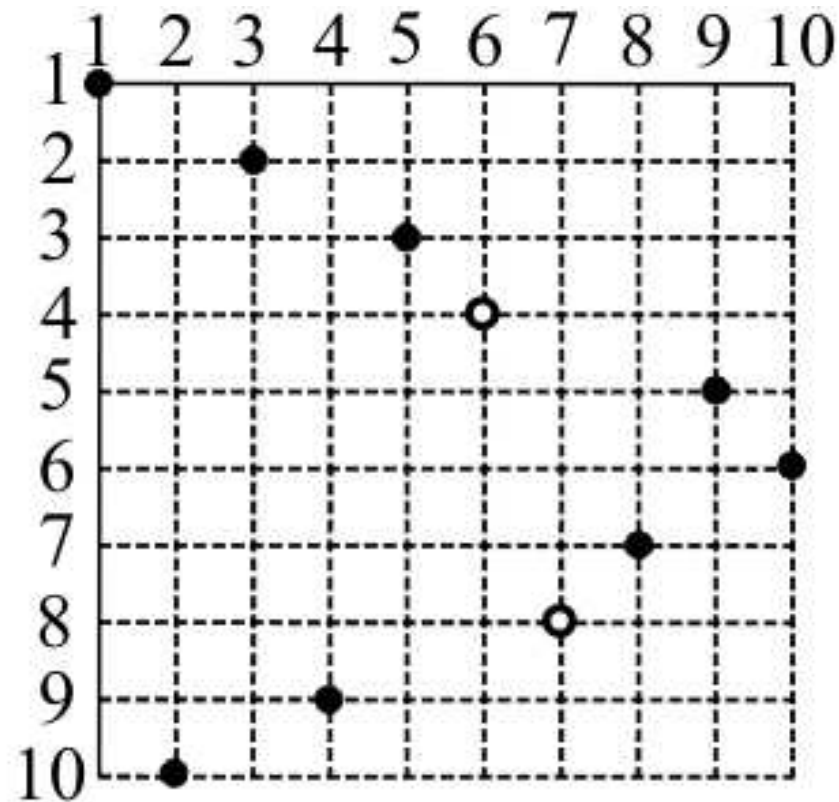
Например, можно сказать, что перестановка

$$2, 1, 3, \dots, n$$

получена из перестановки

$$1, 2, 3, \dots, n$$

транспозицией $(1,2)$.

*a**b*

Правая перестановка получена из левой транспозицией (4,8).

ТЕОРЕМА. Всякая транспозиция меняет четность перестановки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда выполняется транспозиция соседних элементов перестановки

$$n_i, n_{i+1}.$$

•

Инверсия для пар элементов, не содержащих ни n_i ни n_{i+1} , измениться не сможет.

Пары, содержащие один из элементов

$$n_i \quad \text{ИЛИ} \quad n_{i+1},$$

в совокупности не приобретут и не потеряют инверсии при такой транспозиции (она сможет лишь перейти от одной пары такого сорта к другой).

Пара

$$n_i, n_{i+1}$$

обязательно либо приобретет, либо потеряет инверсию. Это означает что сигнатура перестановки при транспозиции соседних элементов изменится ровно на единицу.

Пусть теперь выполняется транспозиция двух произвольных элементов. Для простоты записей можно считать, что меняются местами элементы

$$n_1 \text{ и } n_k, \quad k > 2.$$

Эту транспозицию можно реализовать путем последовательных транспозиций соседних элементов.

Сначала переместим первый элемент на $k + 1$ место, меняя его местами последовательно со вторым, с третьим и т. д. элементами.

Это можно сделать за $k - 1$ шагов.

Затем переместим k -й элемент на первое место, переставляя его с $k - 1$, $k - 2$ и т. д., со вторым элементом.

Это потребует $k - 2$ шагов.

Итак, выполнив

$$k - 2 + k - 1 = 2k - 3 = 2(k - 1) - 1$$

(нечетное количество) транспозиций соседних элементов мы поменяем местами элементы n_1 и n_k .

•

Таким образом, сигнатура перестановки при любой транспозиции (i, k) меняется на нечетное число и потому четность перестановки меняется. \square

•

ТЕОРЕМА. При любом n количества четных и нечетных перестановок совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущей теоремы вытекает, что всякую четную перестановку можно превратить в нечетную, поменяв местами каких-либо два ее элемента. Справедливо и обратное.

Значит, между двумя множествами всех четных и нечетных перестановок можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Эти два множества конечны, поэтому имеют равные количества элементов. \square

§2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Квадратной матрицей порядка n называется таблица, состоящая из n строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Определителем матрицы A назовем величину

$$|A| = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}.$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$\Delta = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поясним, что определителем матрицы порядка n ,

$$|A| = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n},$$

является сумма $n!$ слагаемых, составленная следующим образом:

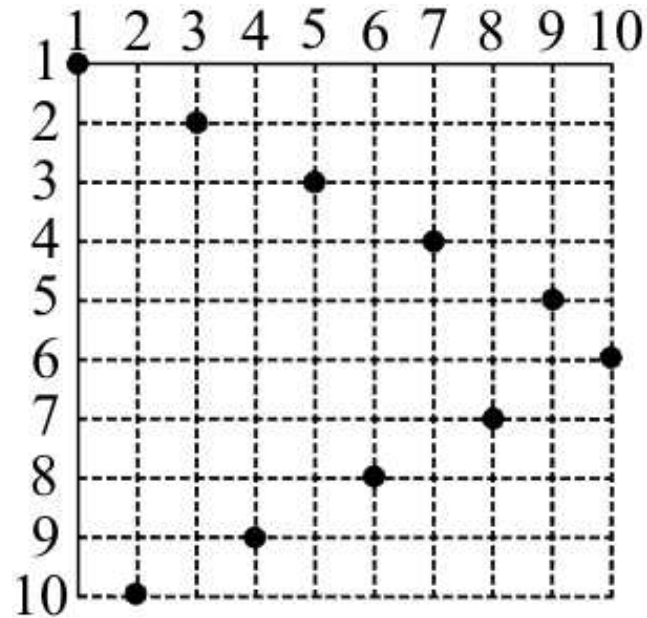
слагаемыми служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца,

слагаемое берется со знаком плюс, если перестановка $n_1 n_2 n_3 \dots n_n$ четная, и со знаком минус — в противоположном случае.

При любом n количества четных и нечетных перестановок совпадают. Следовательно, количество слагаемых в

$$|A| = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}$$

со знаком плюс равно количеству слагаемых со знаком минус.



Элементы матрицы, участвующие в слагаемом определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

соответствующем перестановке $n_1 n_2 n_3 \dots n_n$, изображаются точками графика этой перестановки.

Говорят, что элементы $a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, a_{nn_n}$ составляют диагональ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Диагональ называется четной, если перестановка $n_1n_2 \dots n_n$ четная и — нечетной в противном случае.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Поясним, что слева — определитель порядка n , а справа — порядка $n - 1$.

§3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Если одна из строк (один из столбцов) определителя состоит только из нулей, то этот определитель равен нулю:

$$|A| = \begin{vmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \dots & \underline{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)} \underline{a_{1n_1}} a_{2n_2} \dots a_{nn_n} = 0.$$

Действительно, в этом случае каждая диагональ матрицы A содержит нулевой элемент:

$$\underline{a_{1n_1}} = 0 \quad \implies \quad \underline{a_{1n_1}} a_{2n_2} \dots a_{nn_n} = 0.$$

2. УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что определитель линеен по каждой строке (по каждому столбцу):

$$\begin{vmatrix}
 \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} & \dots & \alpha a_{1n} + \beta b_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix} =
 \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix}
 b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix}.$$

•

3. Если в определителе две строки (два столбца) совпадают, то он равен нулю.

Пусть совпадают строки с номерами k и l , $k < l$.

Множество всех диагоналей матрицы A можно представить в виде объединения множества пар:

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, \underline{a_{kn_k}}, \dots, \underline{\underline{a_{ln_l}}}, \dots, a_{nn_n},$$

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, \underline{\underline{a_{kn_l}}}, \dots, \underline{\underline{a_{ln_k}}}, \dots, a_{nn_n}.$$

Например, определитель третьего порядка можно записать так:

$$|A| =$$

$$= a_{11}\underline{\underline{a_{22}}}\underline{\underline{a_{33}}} - a_{11}\underline{\underline{a_{23}}}\underline{\underline{a_{32}}} +$$

$$+ a_{12}\underline{\underline{a_{23}}}\underline{\underline{a_{31}}} - a_{12}\underline{\underline{a_{21}}}\underline{\underline{a_{33}}} +$$

$$+ a_{13}\underline{\underline{a_{21}}}\underline{\underline{a_{32}}} - a_{13}\underline{\underline{a_{22}}}\underline{\underline{a_{31}}}.$$

Диагонали каждой пары

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, \underline{a_{kn_k}}, \dots, \underline{\underline{a_{ln_l}}}, \dots, a_{nn_n},$$

$$a_{1n_1}, a_{2n_2}, \dots, \underline{\underline{a_{kn_l}}}, \dots, \underline{a_{ln_k}}, \dots, a_{nn_n}$$

имеют противоположные четности, так как соответствующие им перестановки получены одна из другой путем транспозиции

$$(k, l).$$

Например, в определителе третьего порядка — транспозиции (2, 3):

$$\begin{aligned} |A| &= \\ &= a_{11} \underline{a_{22}} \underline{\underline{a_{33}}} - a_{11} \underline{\underline{a_{23}}} \underline{a_{32}} + \\ &+ a_{12} \underline{a_{23}} \underline{\underline{a_{31}}} - a_{12} \underline{\underline{a_{21}}} \underline{a_{33}} + \\ &+ a_{13} \underline{a_{21}} \underline{\underline{a_{32}}} - a_{13} \underline{\underline{a_{22}}} \underline{a_{31}}. \end{aligned}$$

Произведения элементов этих диагоналей совпадают:

$$\begin{aligned}
 & a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots \underline{a_{kn_k}} \cdots \underline{\underline{a_{ln_l}}} \cdots a_{nn_n} = \\
 & = a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots \underline{\underline{a_{kn_l}}} \cdots \underline{a_{ln_k}} \cdots a_{nn_n},
 \end{aligned}$$

так как совпадают строки с номерами k и l ,

$$\underline{a_{kn_k}} = \underline{a_{ln_k}}, \quad \underline{\underline{a_{kn_l}}} = \underline{\underline{a_{ln_l}}}.$$

Например, в определителе третьего порядка имеем

$$a_{11} \underline{a_{22}} \underline{a_{33}} = a_{11} \underline{a_{23}} \underline{a_{32}},$$

$$a_{12} \underline{a_{23}} \underline{a_{31}} = a_{12} \underline{a_{21}} \underline{a_{33}},$$

$$a_{13} \underline{a_{21}} \underline{a_{32}} = a_{13} \underline{a_{22}} \underline{a_{31}}.$$

Это означает, что слагаемые определителя, отвечающие каждой такой паре, в сумме дают нуль:

$$|A| = \sum_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} = 0.$$

4. УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что при перестановке двух строк (двух столбцов) определитель меняет знак.

5. УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что определитель не изменится, если к некоторой его строке добавить другую, умноженную на произвольное число. Это же справедливо и для столбцов.

•

6. Введенные ранее понятия алгебраических дополнений и миноров дословно переносятся на случай определителей произвольного порядка.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ получается заменой в $|A|$ элемента a_{ij} единицей, всех остальных элементов i -той строки и j -того столбца нулями.

Минор M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ — определитель порядка $n - 1$, получающийся из $|A|$ вычеркиванием i -той строки и j -того столбца.

Без каких либо изменений проходит и доказательство формулы, аналогичной формуле

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i3}A_{k3} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Таким образом, для любого определителя $|A|$

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Справедлива и формула разложения определителя по столбцу:

$$a_{1i}A_{1k} + a_{2i}A_{2k} + \cdots + a_{ni}A_{nk} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

ПРИМЕР. Вычислим определитель пятого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} .$$

Добьемся того, чтобы все элементы третьего столбца, кроме последнего, были нулями:

- умножим последнюю строку на 3 и прибавим ко второй,
- умножим последнюю строку на 4 и вычтем из четвертой строки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по третьему столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+5}(-1) \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Добьемся того, чтобы все элементы первого столбца, кроме второго, были нулями:

- умножим вторую строку на 2 и прибавим к первой,
- умножим вторую строку на 3 и вычтем из третьей,
- умножим вторую строку на 2 и вычтем из последней.

$$\Delta = - \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по первому столбцу:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель третьего порядка, разложив его по третьей строке:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = \\
 &= 36 \begin{vmatrix} 25 & 17 \\ -34 & -26 \end{vmatrix} - (-33) \begin{vmatrix} -13 & 17 \\ 26 & -26 \end{vmatrix} + (-24) \begin{vmatrix} -13 & 25 \\ 26 & -34 \end{vmatrix} = \\
 &= 36(-72) - (-33)(-104) + (-24)(-208) = -1032.
 \end{aligned}$$

7. Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей, транспонированной по отношению к

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

•

Определители матриц A и A^T совпадают:

$$|A| = |A^T|.$$

Докажем это утверждение индукцией по порядку определителя. Для определителя второго порядка равенство $|A| = |A^T|$ выполняется очевидным образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Предположим справедливость равенства $|A| = |A^T|$ для произвольного определителя порядка $n - 1$ и покажем, что тогда оно верно и для произвольного определителя порядка n .

Представим $|A|$ в виде разложения по первой строке:

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}.$$

Определитель $|A^T|$ разложим по первому столбцу:

$$|A^T| = a_{11}M_{11}^T - a_{12}M_{21}^T + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{n1}^T.$$

Здесь M_{ij}^T — минор определителя $|A^T|$, соответствующий элементу этого определителя, находящегося в позиции i, j .

По предположению индукции имеем, что

$$M_{ij}^T = M_{ji},$$

следовательно, из

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n},$$

$$|A^T| = a_{11}M_{11}^T - a_{12}M_{21}^T + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{n1}^T$$

заключаем

$$|A^T| = |A|.$$

8. Будем говорить, что строки матрицы A линейно зависимы, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все одновременно равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \dots + \alpha_n a_{nj} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

•

Для того, чтобы определитель матрицы A был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее строки были линейно зависимы.

То, что из линейной зависимости строк вытекает равенство нулю определителя доказывається точно так же, как и для определителя третьего порядка.

Действительно, если одна из строк определителя — линейная комбинация остальных, то эквивалентными преобразованиями можно эту строку обнулить.

Докажем обратное утверждение. Пусть

$$|A| = 0.$$

Рассмотрим все определители d_{n-1} порядка $n - 1$, получающиеся вычеркиванием одной строки и одного столбца из A . Если все

$$d_{n-1} = 0,$$

перейдем к определителям d_{n-2} и т. д.

•

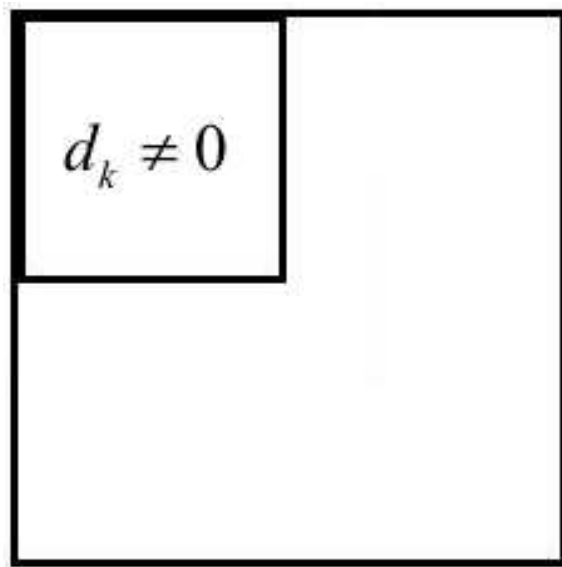
Если в конце концов все элементы матрицы A окажутся равными нулю, тогда доказываемое утверждение будет выполнено тривиальным образом.

Пусть найдется ненулевой определитель порядка $k \geq 1$, полученный вычеркиванием $n - k$ строк и столбцов матрицы A :

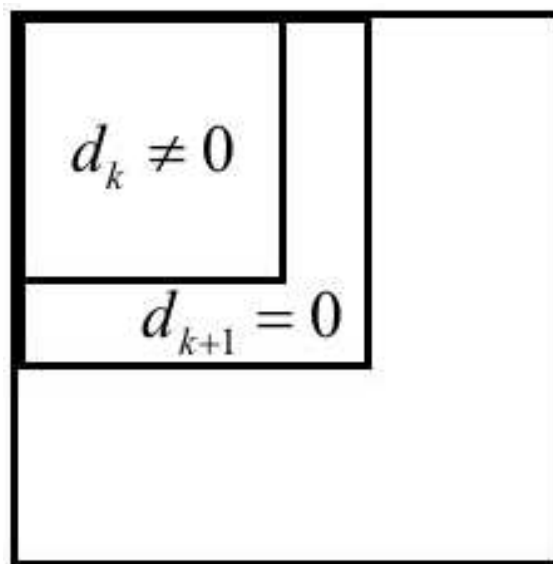
$$d_k \neq 0.$$

Пусть все определители большего порядка будут нулями:

$$d_{k+1} = 0.$$

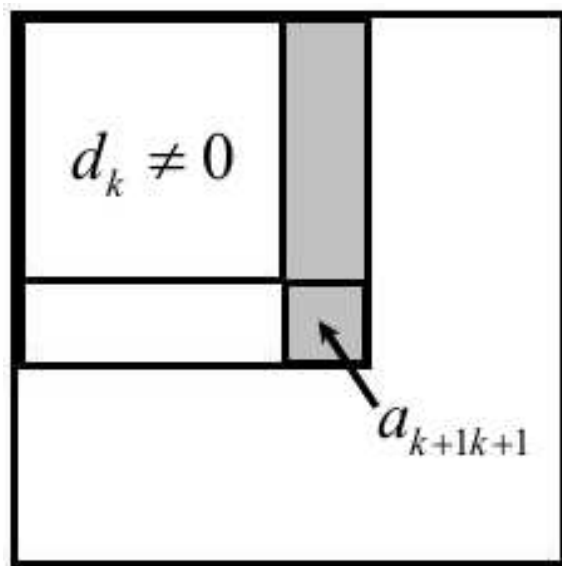


Поскольку при перестановке строк и столбцов меняется лишь знак определителя, то можно считать, что определитель d_k составлен из элементов первых k строк и первых k столбцов матрицы A .



Рассмотрим нулевой по предположению определитель, составленный из первых $k + 1$ строк и первых $k + 1$ столбцов матрицы A :

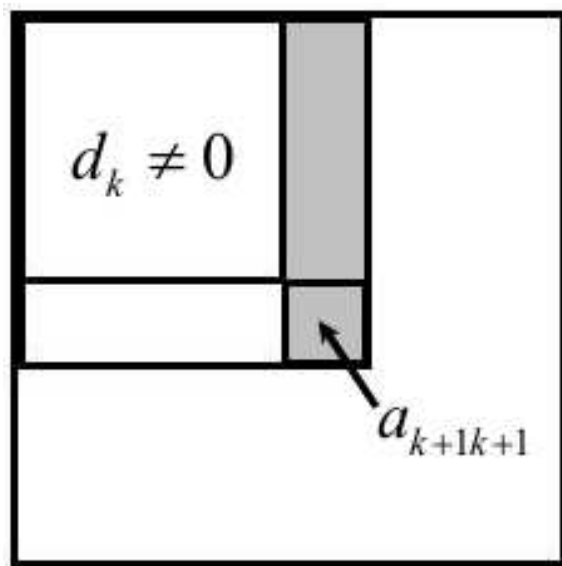
$$d_{k+1} = 0.$$



Разложим определитель $d_{k+1} = 0$ по элементам последнего столбца:

$$\alpha_1 a_{1k+1} + \alpha_2 a_{2k+1} + \cdots + \alpha_k a_{kk+1} + d_k a_{k+1k+1} = 0,$$

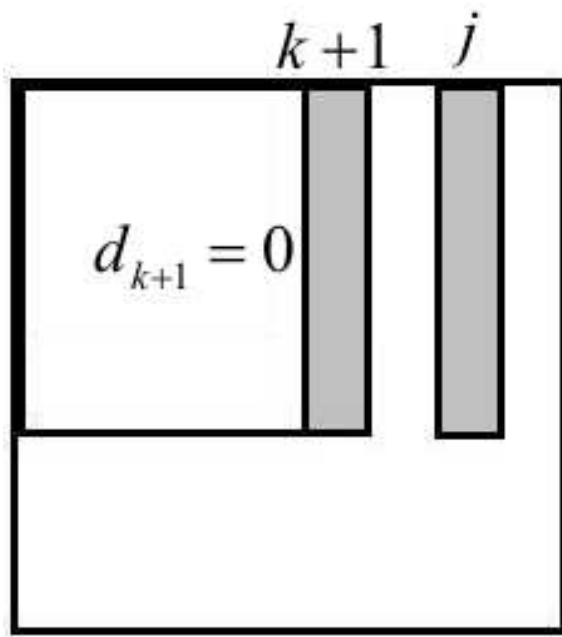
$d_k \neq 0$ — алгебраическое дополнение к a_{k+1k+1} в определителе d_{k+1} .



В разложении

$$\alpha_1 a_{1k+1} + \alpha_2 a_{2k+1} + \dots + \alpha_k a_{kk+1} + d_k a_{k+1k+1} = 0$$

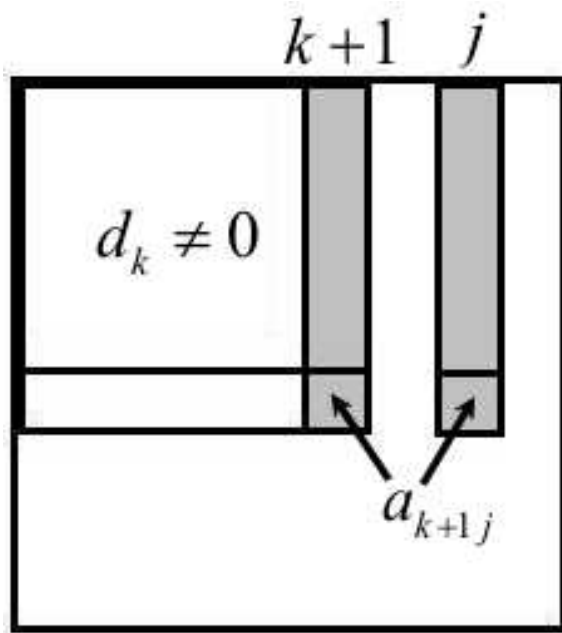
числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов последнего столбца определителя d_{k+1} . Они зависят только от элементов первых k столбцов определителя d_{k+1} .



Переставляя столбцы определителя $|A|$, мы можем составить последний столбец определителя d_{k+1} из элементов

$$a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj}, a_{k+1j}, \quad j = k+2, k+3, \dots, n.$$

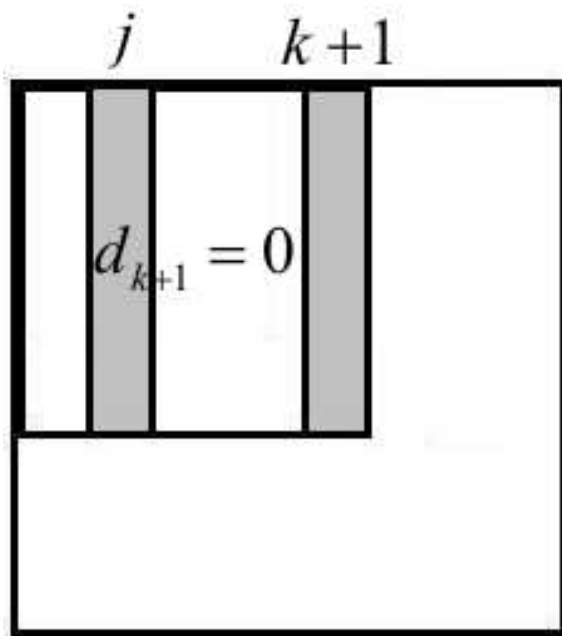
По предположению такой определитель равен нулю: $d_{k+1} = 0$.



Разложим определитель $d_{k+1} = 0$ по последнему столбцу:

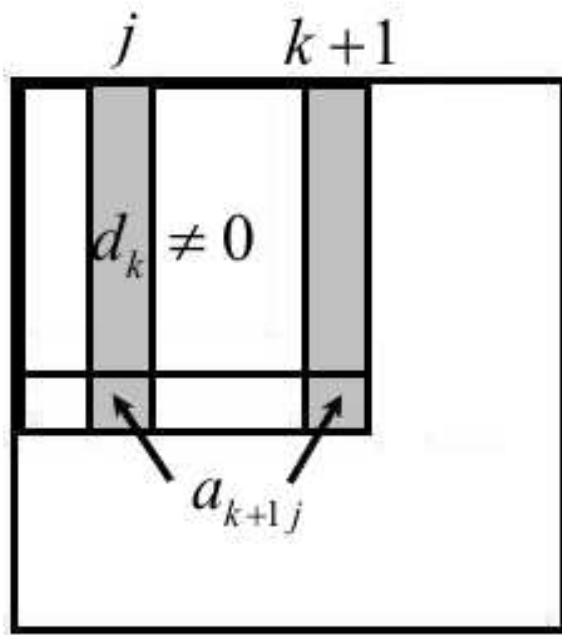
$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \cdots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} = 0, \quad j = k+2, k+3, \dots, n.$$

Отметим, что $d_k \neq 0$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ те же, что и ранее.



Поместим на место $k+1$ столбца определителя d_{k+1} его же столбец с номером $j \leq k$. Получим определитель с равными столбцами:

$$d_{k+1} = 0.$$



Разложим определитель $d_{k+1} = 0$ по последнему столбцу:

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \cdots + \alpha_k a_{kj} + d_k a_{k+1j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Имеем те же коэффициенты, что и ранее: $d_k \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

α_1	1
α_2	2
α_k	k
$d_k \neq 0$	$k+1$
0	$k+2$
0	n

Теперь можно написать:

$$\alpha_1 a_{1j} + \alpha_2 a_{2j} + \cdots + \alpha_k a_{kj} + \underline{\underline{d_k}} a_{k+1j} + 0 \cdot a_{k+2j} + \cdots + 0 \cdot a_{nj} = 0,$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

где $d_k \neq 0$. Это означает, что строки матрицы A линейно зависимы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку $|A^T| = |A|$, то, очевидно, для того, чтобы определитель матрицы A был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы ее столбцы были линейно зависимы.

§4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Определитель треугольной матрицы.

Матрицу A называют верхней треугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$.

Матрицу A называют нижней треугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

Если матрица A треугольная, то

$$|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Докажем это утверждение применительно к верхней треугольной матрице. Для нижней треугольной матрицы рассуждения полностью аналогичны.

Для матриц второго порядка утверждение справедливо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}.$$

Для доказательства формулы при произвольном n используем метод математической индукции, т. е. предположим, что для определителей $(n - 1)$ -го порядка она уже доказана, и рассмотрим определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Разлагая определитель $|A|$ по первому столбцу, получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

К минору, стоящему в правой части, применимо предположение индукции, т. е. он равен произведению $a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$, поэтому

$$|A| = a_{11} \underline{\underline{a_{22}a_{33} \dots a_{nn}}}.$$

Определитель Вандермонда. Так называют определитель вида

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

Александр Теофил Вандермонд (Alexandre-Theophile Vandermonde; 1735 — 1796) — французский музыкант и математик.

Покажем, что при любом $n \geq 2$ определитель Вандермонда

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

равен произведению всевозможных разностей

$$a_i - a_j, \quad \text{где} \quad 1 \leq j < i \leq n :$$

$$d = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Доказываемая формула очевидно справедлива при $n = 2$:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что для определителей $(n - 1)$ -го порядка формула уже доказана, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Рассмотрим определитель

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

- Умножим $n - 1$ -ю строку на a_1 и вычтем из последней (n -й).
- Умножим $n - 2$ -ю строку на a_1 и вычтем из $(n - 1)$ -й.
- ...
- Умножим 1 -ю строку на a_1 и вычтем из 2 -й.

В результате такой последовательности преобразований получим

$$\begin{aligned}
 d &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & & 1 & & 1 & & \dots & & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & & a_3 - a_1 & & \dots & & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & & a_3^2 - a_1 a_3 & & \dots & & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & & \dots & & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} .
 \end{aligned}$$

Разлагая определитель d по первому столбцу, получим определитель $(n - 1)$ -го порядка:

$$\begin{aligned}
 d = & \begin{vmatrix} 1 & & 1 & & 1 & & \dots & & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & & a_3 - a_1 & & \dots & & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & & a_3^2 - a_1 a_3 & & \dots & & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & & \dots & & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \\
 & \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & & a_3 - a_1 & & \dots & & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & & a_3^2 - a_1 a_3 & & \dots & & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & & \dots & & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} .
 \end{aligned}$$

Заметим, что общим множителем всех элементов первого столбца¹⁴ является $a_2 - a_1$, общим множителем всех элементов второго столбца является $a_3 - a_1$ и т. д.:

$$\begin{aligned}
 d &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Вынесем общие множители столбцов. Получим

$$d = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

где последний множитель — определитель Вандермонда $(n - 1)$ -го порядка.

Следовательно,

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

§5. КРАМЕРОВСКИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ¹

В этом параграфе будем рассматривать системы линейных уравнений, у которых количество неизвестных равно числу уравнений.

В самом общем виде эта система может быть записана так:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов уравнений называется матрицей системы. Будем предполагать, что

$$|A| \neq 0.$$

В этом случае систему уравнений называют крамеровской.

Набор чисел b_1, b_2, \dots, b_n называют столбцом правой части (или просто правой частью) системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \underline{\underline{b_1}},$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \underline{\underline{b_2}},$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \underline{\underline{b_n}}.$$

Если правая часть системы нулевая, т. е.

$$\underline{\underline{b_i}} = 0 \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n,$$

то система называется однородной.

Однородная система уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0,$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0$$

всегда имеет решение. Например, можно положить

$$x_1, x_2, \dots, x_n = 0.$$

Такое решение называют тривиальным.

ТЕОРЕМА. Однородная крамеровская система уравнений может иметь только тривиальное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда для некоторого набора чисел x_1, x_2, \dots, x_n , среди которых по крайней мере одно не равно нулю, справедливы равенства

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0,$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0,$$

т. е. столбцы матрицы A линейно зависимы, но по условию т-мы

$$|A| \neq 0.$$

Значит предположение о наличии нетривиального решения у однородной крамеровской системы неверно. \square

ТЕОРЕМА. При любой правой части крамеровская система не может иметь двух различных решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное и пусть

$$x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1;$$

и

$$x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$$

представляют собой два различных решения системы, т. е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \dots + a_{1n}x_n^1 = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \dots + a_{nn}x_n^1 = b_n \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \dots + a_{1n}x_n^2 = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = b_n. \end{cases}$$

Положим

$$x_1 = x_1^1 - x_1^2, \quad x_2 = x_2^1 - x_2^2, \quad \dots, \quad x_n = x_n^1 - x_n^2$$

и вычтем почленно одноименные уравнения систем

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \dots + a_{1n}x_n^1 = b_1,} \\ \dots\dots\dots \\ \underline{\underline{a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \dots + a_{nn}x_n^1 = b_n}} \end{array} \right.$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \dots + a_{1n}x_n^2 = b_1,} \\ \dots\dots\dots \\ \underline{\underline{a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = b_n.}} \end{array} \right.$$

В результате получим, что числа

$$x_1 = x_1^1 - x_1^2, \quad x_2 = x_2^1 - x_2^2, \quad \dots, \quad x_n = x_n^1 - x_n^2$$

дают решение однородной системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0,$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0.$$

Однородная крамеровская система уравнений может иметь только тривиальное решение. Поэтому

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

т. е. предположение о наличии двух различных решений неверно. \square

ТЕОРЕМА. Крамеровская система уравнений при любой правой части имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим решение системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n,$$

опираясь на формулу

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Будем разыскивать решение системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \underline{\underline{b_1}},$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \underline{\underline{b_2}},$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \underline{\underline{b_n}}$$

В ВИДЕ

$$x_i = c_{i1}\underline{\underline{b_1}} + c_{i2}\underline{\underline{b_2}} + \dots + c_{in}\underline{\underline{b_n}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где коэффициенты c_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, подлежат определению.

Подставим выражения

$$x_1 = \underline{c_{11}}b_1 + \underline{c_{12}}b_2 + \dots + \underline{c_{1n}}b_n,$$

$$x_2 = \underline{\underline{c_{21}}}b_1 + \underline{\underline{c_{22}}}b_2 + \dots + \underline{\underline{c_{2n}}}b_n,$$

...

$$x_n = \underline{\underline{\underline{c_{n1}}}}b_1 + \underline{\underline{\underline{c_{n2}}}}b_2 + \dots + \underline{\underline{\underline{c_{nn}}}}b_n$$

в первое уравнение системы:

$$\underline{a_{11}}x_1 + \underline{\underline{a_{12}}}x_2 + \dots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}}}}x_n = b_1.$$

Соберем слева коэффициенты при b_1, b_2, \dots, b_n . Получим

$$b_1(\underline{a_{11}c_{11}} + \underline{\underline{a_{12}c_{21}}} + \dots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{n1}}}}) +$$

$$+ b_2(\underline{a_{11}c_{12}} + \underline{\underline{a_{12}c_{22}}} + \dots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{n2}}}}) + \dots$$

$$\dots + b_n(\underline{a_{11}c_{1n}} + \underline{\underline{a_{12}c_{2n}}} + \dots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{nn}}}}) = b_1.$$

Продолжим этот процесс и подставим выражения

$$x_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \dots + c_{in}b_n, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

во все уравнения системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Соберем слева коэффициенты при одинаковых b_i . Получим

$$b_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{21} + \dots + a_{in}c_{n1}) + \dots$$

$$\dots + b_i(a_{i1}c_{1i} + a_{i2}c_{2i} + \dots + a_{in}c_{ni}) + \dots$$

$$\dots + b_n(a_{i1}c_{1n} + a_{i2}c_{2n} + \dots + a_{in}c_{nn}) = b_i,$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Если выбрать c_{ik} так, чтобы выполнялись условия

$$a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \cdots + a_{in}c_{nk} = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

то равенства

$$\begin{aligned} & b_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{21} + \cdots + a_{in}c_{n1}) + \\ & \quad \cdots + b_i(\underline{a_{i1}c_{1i} + a_{i2}c_{2i} + \cdots + a_{in}c_{ni}}) + \cdots \\ & \quad \cdots + b_n(a_{i1}c_{1n} + a_{i2}c_{2n} + \cdots + a_{in}c_{nn}) = b_i, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, будут выполнены.

Сравнивая соотношения

$$\underline{a_{i1}}c_{1k} + \underline{\underline{a_{i2}}}c_{2k} + \cdots + \underline{\underline{\underline{a_{in}}}}c_{nk} = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

с формулой

$$\underline{a_{i1}}A_{k1} + \underline{\underline{a_{i2}}}A_{k2} + \cdots + \underline{\underline{\underline{a_{in}}}}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

нетрудно заметить, что если положить

$$c_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

то требуемые условия будут выполнены.

Подставим выражения

$$c_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

В

$$x_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \dots + c_{in}b_n, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Получим следующие формулы для решения системы:

$$x_i = \frac{(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n)}{|A|}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Используя разложение определителя по столбцу, соотношения

$$x_i = \frac{(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n)}{|A|}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

можно переписать в более компактном виде:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь $\Delta = |A|$, Δ_i — определитель, который получается, если заменить i -тый столбец определителя $|A|$ правой частью системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n.$$



•
Формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

называют формулами Крамера.

ПРИМЕР. Решим систему уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -4,$$

$$2x_1 + x_3 - x_4 = -1,$$

$$2x_2 - x_3 - 3x_4 = -3.$$

Эта система крамеровская, действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Теперь для системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -4,$$

$$2x_1 + x_3 - x_4 = -1,$$

$$2x_2 - x_3 - 3x_4 = -3$$

ВЫЧИСЛИМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 4.$$

Для той же системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -4,$$

$$2x_1 + x_3 - x_4 = -1,$$

$$2x_2 - x_3 - 3x_4 = -3$$

вычислим определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$

Далее для системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -4,$$

$$2x_1 + x_3 - x_4 = -1,$$

$$2x_2 - x_3 - 3x_4 = -3$$

ВЫЧИСЛИМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -8.$$

И наконец для системы

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_4 = -4,$$

$$2x_1 + x_3 - x_4 = -1,$$

$$2x_2 - x_3 - 3x_4 = -3$$

вычислим определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

По формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{4} = -2,$$

$$x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1.$$

На практике формулы Крамера используются очень редко. Чаще всего для решения систем линейных алгебраических уравнений применяются различные варианты метода Гаусса.

В качестве примера применения теории крамеровских систем построим так называемую интерполяционную формулу Лагранжа.



Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange; 1736 — 1813) — французский математик, астроном и механик итальянского происхождения.

ТЕОРЕМА. Пусть даны попарно различные числа

$$z_0, \quad z_1, \quad \dots, \quad z_n$$

и произвольные числа

$$h_0, \quad h_1, \quad \dots, \quad h_n.$$

Тогда существует и при том только один полином

$$P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

такой, что

$$P_n(z_j) = h_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия

$$P_n(z_j) = a_0 + a_1 z_j + a_2 z_j^2 + \dots + a_n z_j^n = h_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

представляют собой систему линейных уравнений относительно коэффициентов полинома P_n :

$$1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \dots + z_0^n a_n = h_0,$$

$$1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \dots + z_1^n a_n = h_1,$$

.....

$$1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \dots + z_n^n a_n = h_n.$$

Определитель системы

$$1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \dots + z_0^n a_n = h_0,$$

$$1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \dots + z_1^n a_n = h_1,$$

.....

$$1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \dots + z_n^n a_n = h_n$$

есть определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^n & z_1^n & z_2^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix}.$$

Числа z_0, z_1, \dots, z_n попарно различны. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_0^n & z_1^n & z_2^n & \dots & z_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (z_i - z_j) \neq 0.$$

Поэтому система уравнений

$$1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \dots + z_0^n a_n = h_0,$$

$$1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \dots + z_1^n a_n = h_1,$$

.....

$$1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \dots + z_n^n a_n = h_n$$

имеет единственное решение при любой правой части. \square

Теперь ясно, что, если полином всюду (по крайней мере в $n + 1$ различных точках) равен нулю, то все его коэффициенты — нули.

Действительно, однородная крамеровская система

$$1 \cdot a_0 + z_0 a_1 + z_0^2 a_2 + \dots + z_0^n a_n = 0,$$

$$1 \cdot a_0 + z_1 a_1 + z_1^2 a_2 + \dots + z_1^n a_n = 0,$$

.....

$$1 \cdot a_0 + z_n a_1 + z_n^2 a_2 + \dots + z_n^n a_n = 0$$

имеет только тривиальное решение.

Построим в явном виде полином, удовлетворяющий условиям

$$P_n(z_j) = h_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Решение этой задачи дает интерполяционная формула Лагранжа

$$P_n(z) = P_n(z_0)\Phi_0(z) + P_n(z_1)\Phi_1(z) + \dots + P_n(z_n)\Phi_n(z),$$

где Φ_j — полином степени n , удовлетворяющий условиям

$$\Phi_j(z_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n,$$

$$\Phi_j(z_j) = 1,$$

для $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Полином своими корнями определяется с точностью до постоянного множителя:

$$\Phi_j(z) = A_j(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{j-1})(z - z_{j+1}) \cdots (z - z_n).$$

Используя

$$\Phi_j(z_j) = 1,$$

найдем значение постоянной:

$$A_j = \frac{1}{(z_j - z_0)(z_j - z_1) \cdots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \cdots (z_j - z_n)},$$

т. е.

$$\Phi_j(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{j-1})(z - z_{j+1}) \cdots (z - z_n)}{(z_j - z_0)(z_j - z_1) \cdots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \cdots (z_j - z_n)},$$

где $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Прямоугольной матрицей A размера $m \times n$ называется таблица, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Элементами таблицы служат числа a_{ij} (вообще говоря, комплексные). Иногда будем явно указывать размеры матрицы A :

$$A(m \times n).$$

Отметим некоторые частные случаи. При

$$m = n$$

получаем квадратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Ее размер (порядок) будем обозначать одной буквой n .

Если $m = 1$, а n произвольно получаем матрицу-строку (или, просто, строку)

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Говорят, что эта строка имеет длину n .

Если $n = 1$, а m произвольно, получаем матрицу-столбец (или, просто, столбец)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} .$$

Говорят, что этот столбец имеет длину m .

Подчеркнем, что при записи строк и столбцов, второй индекс, обычно, не пишут:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} .$$

Столбцы или строки часто будем называть векторами.

Матрица называется нулевой, если все ее элементы нули. Нулевая матрица обозначается символом 0 :

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

•

Опишем некоторые специальные виды квадратных матриц.

Элементы $\underline{\underline{a_{11}}}$, $\underline{\underline{a_{22}}}$, \dots , $\underline{\underline{a_{nn}}}$ образуют главную диагональ квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \underline{\underline{a_{11}}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \underline{\underline{a_{22}}} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \underline{\underline{a_{nn}}} \end{pmatrix} .$$

Квадратная матрица D называется диагональной, если

$$d_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

или, подробнее,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

•

Для диагональной матрицы будем использовать также обозначение

$$D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}).$$

Диагональная матрица называется единичной, если

$$a_{ii} = 1 \quad \text{для всех} \quad i = 1, \dots, n.$$

Единичную матрицу будем обозначать буквой I :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица P_{ik} называется матрицей перестановок, если она получена из I перестановкой строк с номерами i и k . Например, матрицами перестановок третьего порядка являются матрицы

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица L называется нижней треугольной, если все ее элементы, стоящие выше главной диагонали, равны нулю:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица U называется верхней треугольной, если все ее элементы, стоящие ниже главной диагонали, равны нулю:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & l_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & l_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

называется элементарной нижней треугольной. Поясним, что эта матрица отличается от I лишь элементами k -го столбца.

•

Умножение матрицы на число, сложение матриц.

Произведением матрицы A и числа α называется матрица

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

(все элементы матрицы A умножаются на число α).

Суммой двух матриц A , B одинаковых размеров называется матрица C того же размера с элементами

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Пишут:

$$C = A + B.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Убедиться, что введенные операции обладают следующими свойствами:

$$1) A + 0 = A,$$

$$2) (A + B) + C = A + (B + C),$$

$$3) A + B = B + A,$$

$$4) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

Отметим, что сумма двух нижних (верхних) треугольных матриц — нижняя (верхняя) треугольная матрица.

•

Произведение матриц и векторов.

По определению произведение строки x и столбца y одинаковой длины n есть число:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

ПРИМЕР.

$$(5 \quad -1 \quad 3 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10.$$

Произведением матрицы A размера $m \times n$ и вектора x длины n
называется вектор y длины m с элементами

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Символически это записывают так:

$$y = Ax.$$

Иногда будем применять более подробную запись:

$$\begin{pmatrix} \underline{y_1} \\ \underline{y_2} \\ \vdots \\ \underline{y_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \dots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & \dots & \underline{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{a_{m1}} & \underline{a_{m2}} & \dots & \underline{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Элементы вектора y вычисляются следующим образом:

- столбец x последовательно накладывается на строки матрицы A ,
- соответствующие элементы попарно перемножаются,
- затем полученные n величин суммируются.

ПРИМЕР.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix} .$$

Для любых чисел α , β и для любых векторов x , y (подходящей длины) справедливо равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay,$$

т. е. операция умножения матрицы на вектор линейна.

Действительно,

$$\begin{aligned}
 A(\alpha x + \beta y) &= \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \dots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & \dots & \underline{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{a_{m1}} & \underline{a_{m2}} & \dots & \underline{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} = \\
 &= \alpha \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \dots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & \dots & \underline{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{a_{m1}} & \underline{a_{m2}} & \dots & \underline{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \dots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & \dots & \underline{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{a_{m1}} & \underline{a_{m2}} & \dots & \underline{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\
 &= \alpha Ax + \beta Ay.
 \end{aligned}$$

Произведением строки x длины m и матрицы A размера $m \times n$
называется строка y длины n с элементами

$$y_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Символически это записывают так:

$$y = xA.$$

Иногда будем применять более подробную запись:

$$\left(\underline{y_1}, \underline{\underline{y_2}}, \dots, \underline{\underline{\underline{y_n}}} \right) = \left(x_1, x_2, \dots, x_m \right) \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{\underline{a_{12}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{a_{1n}}}} \\ \underline{a_{21}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{a_{2n}}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{a_{m1}} & \underline{\underline{a_{m2}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{a_{mn}}}} \end{pmatrix} .$$

Элементы строки y вычисляются следующим образом:

- столбцы матрицы A последовательно накладывается на строку x ,
- соответствующие элементы попарно перемножаются,
- затем полученные m величин суммируются.

ПРИМЕР.

$$(5 \quad 1 \quad 0 \quad -3) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (11 \quad -1).$$

Из определения вытекает, что для любых чисел α , β и для любых строк x , y (подходящей длины) справедливо равенство

$$(\alpha x + \beta y)A = \alpha xA + \beta yA,$$

т. е. операция умножения строки на матрицу линейна. Это проверяется так же, как и линейность умножения матрицы на вектор.

Система n линейных уравнений с n неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

может быть записана в виде

$$Ax = b,$$

подробнее,

$$\begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \dots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \dots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{\underline{a_{n1}}}} & \underline{\underline{\underline{a_{n2}}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{a_{nn}}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b_1} \\ \underline{\underline{b_2}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{\underline{b_n}}} \end{pmatrix} .$$

Здесь A — заданная матрица, b и x — заданный и искомый векторы.

Пусть A — заданная квадратная матрица, b — заданная строка, x — искомая строка. Тогда

$$x A^T = b,$$

$$\left(x_1, x_2, \dots, x_n \right) \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{21}} & \dots & \underline{a_{n1}} \\ \underline{a_{12}} & \underline{a_{22}} & \dots & \underline{a_{n2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{a_{1n}} & \underline{a_{2n}} & \dots & \underline{a_{nn}} \end{pmatrix} = \left(\underline{b_1}, \underline{b_2}, \dots, \underline{b_n} \right)$$

есть записи системы уравнений

$$\underline{a_{11}}x_1 + \underline{a_{12}}x_2 + \dots + \underline{a_{1n}}x_n = b_1,$$

$$\underline{a_{21}}x_1 + \underline{a_{22}}x_2 + \dots + \underline{a_{2n}}x_n = b_2,$$

.....

$$\underline{a_{n1}}x_1 + \underline{a_{n2}}x_2 + \dots + \underline{a_{nn}}x_n = b_n.$$

Матрица $C(m \times p)$ называется произведением матриц $A(m \times n)$ и $B(n \times p)$, если ее элементы определяются по правилу

$$c_{ij} = \sum_{q=1}^n a_{iq} b_{qj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

Пишут

$$C = AB,$$

или, более подробно,

$$\begin{pmatrix} \underline{c_{11}} & \underline{\underline{c_{12}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{c_{1p}}}} \\ \underline{c_{21}} & \underline{\underline{c_{22}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{c_{2p}}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{c_{m1}} & \underline{\underline{c_{m2}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{c_{mp}}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{b_{11}} & \underline{\underline{b_{12}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{b_{1p}}}} \\ \underline{b_{21}} & \underline{\underline{b_{22}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{b_{2p}}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{b_{n1}} & \underline{\underline{b_{n2}}} & \dots & \underline{\underline{\underline{b_{np}}}} \end{pmatrix}.$$

Элементы каждого столбца матрицы C вычисляются как результат умножения матрицы A на соответствующий столбец матрицы B .

Элементы каждой строки матрицы C получаются как результат умножения соответствующей строки матрицы A на матрицу B :

$$\begin{pmatrix} \underline{c_{11}} & \underline{c_{12}} & \dots & \underline{c_{1p}} \\ \underline{c_{21}} & \underline{c_{22}} & \dots & \underline{c_{2p}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{c_{m1}} & \underline{c_{m2}} & \dots & \underline{c_{mp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \dots & \underline{a_{1n}} \\ \underline{a_{21}} & \underline{a_{22}} & \dots & \underline{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{a_{m1}} & \underline{a_{m2}} & \dots & \underline{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} .$$

Элемент c_{ij} есть результат умножения i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ \underline{\underline{c_{21}}} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \dots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{b_{11}}} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ \underline{\underline{b_{21}}} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\underline{b_{n1}}} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} .$$

ПРИМЕР.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц зависит от порядка сомножителей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A, B называют перестановочными, если

$$AB = BA.$$

Перестановочные матрицы существуют. Например,

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для любой квадратной матрицы A справедливы равенства:

$$AI = IA = A.$$

Отметим следующие свойства операции умножения матриц:

$$1) (A + B)C = AC + BC,$$

$$2) C(A + B) = CA + CB,$$

$$3) A(BC) = (AB)C.$$

Понятно, что размеры участвующих здесь матриц должны быть согласованы так, чтобы все операции имели смысл.

Первые два свойства — следствия линейности операций умножения строки на матрицу и матрицы на вектор:

$$1) (A + B)C = AC + BC \iff (a + b)C = aC + bC,$$

$$2) C(A + B) = CA + CB \iff C(a + b) = Ca + Cb.$$

Докажем свойство 3):

$$A(BC) = (AB)C.$$

Заметим, что элементы матрицы

$$D = A(BC)$$

есть числа вида

$$d_{ij} = a_i(Bc_j),$$

где a_i — i -ая строка матрицы A , c_j — j -й столбец матрицы C .

•

Элементы матрицы

$$F = (AB)C$$

есть числа

$$f_{ij} = (a_i B)c_j.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$x(By) = (xB)y$$

для любой строки x и любого столбца y . Понятно, что их длины должны быть согласованы с размерами матрицы B .

Пусть матрица B имеет m строк и n столбцов. Тогда

$$x(By) = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j,$$

аналогично

$$(xB)y = \sum_{j=1}^n y_j \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i y_j.$$

Эти суммы отличаются лишь порядком суммирования и совпадают.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Показать, что вектор $P_{ik}x$ получается из вектора x перестановкой элементов с номерами i, k .

•

2) Как следствие показать, что матрица $P_{ik}A$ получается из матрицы A перестановкой строк с номерами i, k .

3) Показать, что если L, M — нижние треугольные матрицы (размера $n \times n$), то матрица LM — нижняя треугольная. Показать, что аналогичное верно и для верхних треугольных матриц.

4) Показать, что нижняя треугольная матрица L равна произведению элементарных нижних треугольных матриц

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & l_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & l_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1} L_n$.

УКАЗАНИЕ. Проведите вычисления в соответствии со следующей расстановкой скобок:

$$L = L_1(L_2 \cdots (L_{n-2}(L_{n-1}L_n) \cdots)),$$

т. е. сначала перемножьте $L_{n-1}L_n$, результат умножьте слева на L_{n-2} и т. д.

•

5) Показать, что для любой квадратной матрицы A

$$\det(P_{ik}A) = \det P_{ik} \det A = -\det A.$$

6) Показать, что для любой квадратной матрицы A и элементарной нижней треугольной матрицы L_k :

$$\det(L_k A) = l_{kk} \det A.$$

РЕШЕНИЕ. Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — вектор. Тогда

$$L_k a = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & l_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & l_{k+1,k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & l_{n,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ l_{k,k} a_k \\ l_{k+1,k} a_k + a_{k+1} \\ l_{k+2,k} a_k + a_{k+2} \\ \vdots \\ l_{n,k} a_k + a_n \end{pmatrix} .$$

Значит столбцы матрицы $L_k A$ будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ \underline{\underline{l_{k,k} a_k}} \\ l_{k+1,k} a_k + a_{k+1} \\ l_{k+2,k} a_k + a_{k+2} \\ \vdots \\ l_{n,k} a_k + a_n \end{pmatrix} \cdot$$

Поэтому определитель $\det(L_k A)$ можно преобразовать следующим образом. Во-первых из k -ой строки вынесем общий множитель l_{kk} .

Получим определитель со столбцами:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ a_k \\ \underline{\underline{l_{k+1,k}a_k + a_{k+1}}} \\ l_{k+2,k}a_k + a_{k+2} \\ \vdots \\ l_{n,k}a_k + a_n \end{pmatrix} \cdot$$

- Умножим k -ю строку определителя на $l_{k+1,k}$.
- Вычтем полученную строку из $k + 1$ -ой строки.

Получим определитель со столбцами:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ a_k \\ a_{k+1} \\ l_{k+2,k}a_k + a_{k+2} \\ \vdots \\ l_{n,k}a_k + a_n \end{pmatrix} \cdot$$

Продолжим этот процесс. Последовательно для $j = k + 2, \dots, n$:

- умножим k -ю строку определителя на l_{jk} ,
- вычтем полученную строку из j -ой строки.

В конце концов получим определитель со столбцами

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

т. е. $\det A$. На первом шаге преобразований определителя $\det(L_k A)$ мы вынесли l_{kk} . Значит, доказано равенство

$$\det(L_k A) = l_{kk} \det A.$$

7) Опираясь на предыдущие упражнения и правило вычисления определителя треугольной матрицы, показать, что для любой квадратной матрицы A и любой нижней треугольной матрицы L

$$\det(LA) = \det L \det A.$$

Показать, что если R — верхняя треугольная матрица, то

$$\det(RA) = \det R \det A.$$

Транспонирование матриц. Определенная ранее операция транспонирования квадратных матриц естественным образом распространяется на прямоугольные матрицы.

•

При транспонировании размеры матрицы меняются местами. В частности, матрица-строка становится матрицей-столбцом.

•

Свойства операции транспонирования.

1) Для любой матрицы A справедливо равенство

$$(A^T)^T = A.$$

Проверьте!

2) Для любых чисел α , β и матриц A , B одинаковых размеров

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T.$$

Проверьте!

Поэтому говорят, что операция транспонирования линейна.

-
- 3) Если операция умножения матриц AB имеет смысл, то:
- а) операция умножения $B^T A^T$ также имеет смысл (проверьте!);
 - б) $(AB)^T = B^T A^T$.

Докажем утверждение 3 б). Элемент с номерами i, j матрицы

$$(AB)^T$$

это результат умножения j -й строки матрицы A на i -й столбец B .

Элемент с номерами i, j матрицы

$$B^T A^T$$

это результат умножения i -й строки матрицы B^T и j -го столбца A^T .

Элементы i -й строки матрицы B^T совпадают с элементами i -го столбца матрицы B , а элементы j -го столбца матрицы A^T совпадают с элементами j -ой строки матрицы A . Следовательно,

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

§7. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Квадратная матрица A называется вырожденной, если ее определитель равен нулю. В противном случае матрица A называется невырожденной.

Если A, B — невырожденные матрицы, матрица

$$C = AB$$

также невырождена.

Для того, чтобы убедиться в том, что AB невырождена достаточно показать, что однородная система линейных уравнений

$$ABx = 0$$

имеет только тривиальное решение. Последнее верно, так как, поскольку матрица A невырождена, то

$$Bx = 0,$$

а поскольку B невырождена, то

$$x = 0.$$

•
Если одна из матриц A , B вырождена, то

$$C = AB$$

вырождена.

Действительно, чтобы убедиться в том, что AB вырождена достаточно установить, что система

$$ABx = 0$$

имеет нетривиальное решение. Пусть матрица B вырождена. Тогда существует вектор $x \neq 0$ такой, что

$$Bx = 0,$$

значит

$$ABx = 0.$$

Пусть теперь A вырождена, а B невырождена. Существует вектор $y \neq 0$ такой, что

$$Ay = 0.$$

Т. к. B невырождена существует единственный вектор x такой, что

$$Bx = y,$$

причем $x \neq 0$, т. к. $y \neq 0$. Вновь, получаем, что

$$ABx = 0$$

при $x \neq 0$.

Матрица X называется правой обратной к квадратной матрице A , если

$$AX = I.$$

Матрица Y называется левой обратной к квадратной матрице A ,
если

$$YA = I.$$

•

Вырожденная матрица не имеет обратной матрицы.

Действительно, если правая обратная матрица X существует, то

$$\det(AX) = \det(I) = 1.$$

С другой стороны

$$\det(AX) = 0,$$

так как A вырождена. Точно так же доказывается невозможность существования левой обратной у вырожденной матрицы.

•

Если $\det(A) \neq 0$, то правая обратная матрица существует и определяется единственным образом.

Действительно, обозначим через x^k столбцы матрицы X , а через i^k столбцы матрицы I . Уравнение

$$AX = I$$

распадается на совокупность систем уравнений

$$Ax^k = i^k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку матрица A невырождена, каждая из этих систем имеет единственное решение. Точно так же доказывается существование и единственность левой обратной матрицы.

•

На самом деле, правая и левая обратная матрица совпадают.

Действительно, если

$$YA = I,$$

то

$$YAX = X,$$

но

$$AX = I,$$

т. е.

$$Y = X.$$

Обратную матрицу к матрице A обозначают через

$$A^{-1}.$$

Укажем явный вид матрицы A^{-1} .

Введем в рассмотрение так называемую присоединенную к матрице A матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A .

Обратите внимание на номера элементов!

Формулы

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

МОЖНО ЗАПИСАТЬ В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

$$A\tilde{A} = |A|I.$$

Из

$$A\tilde{A} = |A|I.$$

вытекает, что если

$$|A| \neq 0,$$

то

$$A^{-1} = |A|^{-1}\tilde{A}$$

есть матрица, обратная матрице A .

ПРИМЕР. Построим матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим сначала определитель матрицы A , разлагая его по первой строке:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 10 = 5.$$

Подсчитаем алгебраические дополнения элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, & A_{12} &= - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, & A_{13} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{21} &= - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

По формуле

$$A^{-1} = |A|^{-1} \tilde{A}$$

для

$$|A| = 5,$$

$$A_{11} = 5, \quad A_{12} = 10, \quad A_{13} = 0,$$

$$A_{21} = 4, \quad A_{22} = 12, \quad A_{23} = 1,$$

$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = -3, \quad A_{33} = 1$$

имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

•

Свойства обратной матрицы.

•

1) Матрица A^{-1} невырождена, кроме того

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Это утверждение очевидное следствие равенства

$$AA^{-1} = I.$$

Действительно, если

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I,$$

то

$$AA^{-1}(A^{-1})^{-1} = A.$$

Следовательно,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

•

2) Если матрицы A , B невырождены, то

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Действительно,

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Т. е.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3) Если матрица A невырождена, то матрица A^T невырождена и

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

•

Невырожденность матрицы A^T — следствие равенства

$$|A^T| = |A|.$$

Используя свойство

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

можем написать

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I,$$

т. е. матрица $(A^{-1})^T$ — обратная к A^T :

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть матрицы A_1, A_2, \dots, A_p — невырождены. Показать, что

$$(A_1 A_2 \cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

•

2) Пусть P_{ik} — матрица перестановки. Показать, что

$$P_{ik}^{-1} = P_{ik}.$$

3) Пусть L_k есть элементарная нижняя треугольная матрица и $l_{kk} \neq 0$. Показать, что

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1/l_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -l_{k+1,k}/l_{k,k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -l_{n,k}/l_{k,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Пусть L — нижняя треугольная матрица, у которой все элементы главной диагонали отличны от нуля. Показать, что матрица L^{-1} существует и является нижней треугольной матрицей.

Показать, что аналогичное верно для верхних треугольных матриц.

5) Пусть квадратная матрица A имеет обратную, B — произвольная квадратная матрица того же порядка. Показать, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ матрица $A + \varepsilon B$ также имеет обратную.

Решение. Пусть x — решение системы уравнений

$$Ax + \varepsilon Bx = 0.$$

Тогда x — решение системы уравнений

$$x = -\varepsilon A^{-1} Bx.$$

Пусть $x \neq 0$ и

$$|x_i| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|,$$

где n — порядок матрицы A .

Положим

$$C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n = A^{-1}B.$$

Из

$$x = -\varepsilon A^{-1}Bx$$

очевидным образом получаем

$$\begin{aligned} |x_i| &= \left| \varepsilon \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \right| \leq |x_i| \varepsilon \left| \sum_{j=1}^n c_{ij} \right| \leq |x_i| \varepsilon \sum_{j=1}^n |c_{ij}| \leq \\ &\leq |x_i| \varepsilon \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{kj}|. \end{aligned}$$

Пусть ε выбрано так, что

$$\varepsilon \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{kj}| < 1.$$

Тогда из

$$|x_i| \leq |x_i| \varepsilon \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{kj}|$$

имеем

$$|x_i| < |x_i|,$$

что нелепо.

Значит, при выполнении условия

$$\varepsilon \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |c_{kj}| < 1$$

система

$$Ax + \varepsilon Bx = 0$$

может иметь лишь тривиальное решение, следовательно, матрица

$$A + \varepsilon B$$

невырождена для всех достаточно малых ε .

§8. МЕТОД ГАУССА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В основе метода Гаусса, как, впрочем, и многих других методов решения систем линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{1}$$

лежит следующее утверждение.

Пусть матрица B невырождена. Тогда система уравнений

$$BAx = Bb \tag{2}$$

эквивалентна системе (1), т. е. решение системы (2) — решение системы (1) и, наоборот, решение системы (1) — решение системы (2).

Действительно, пусть x — решение системы

$$B Ax = B b.$$

Тогда

$$B(Ax - b) = 0,$$

но матрица B невырождена, следовательно,

$$Ax - b = 0,$$

т. е.

$$Ax = b.$$

Обратное утверждение доказывается еще проще. Пусть

$$Ax = b.$$

Умножим обе части уравнения на невырожденную матрицу B :

$$BAx = Bb.$$

Матрица B выбирается так, чтобы матрица BA была проще матрицы A и решение системы

$$BAx = Bb$$

находилось легче, чем решение системы

$$Ax = b.$$

В методе Гаусса матрица B конструируется при помощи элементарных нижних треугольных матриц так, чтобы матрица

$$BA$$

была верхней треугольной. Тогда решение системы

$$BAx = Bb$$

становится тривиальной задачей.

Переходим к описанию метода Гаусса решения крамеровских систем. Выберем среди элементов первого столбца матрицы A максимальный по модулю. Пусть это элемент

$$a_{i1}.$$

Он не может оказаться равным нулю, так как тогда все элементы первого столбца матрицы A — нули и, значит,

$$|A| = 0,$$

но система по предположению крамеровская, т. е. определитель матрицы A не нуль.

Умножим обе части уравнения

$$Ax = b$$

на матрицу перестановки P_{i1} . В дальнейшем будем обозначать эту матрицу через P_1 (заметим, что она равна единичной, если максимальный по модулю элемент первого столбца матрицы A есть a_{11}).

Получим

$$A_1x = b^1,$$

где

$$A_1 = P_1A, \quad b^1 = P_1b.$$

Поясним, что матрица

$$A_1 = P_1 A$$

получается из матрицы A перестановкой первой и i -й строк, столбец

$$b^1 = P_1 b$$

получается из столбца b перестановкой первого и i -го элементов.

Элементы матрицы A_1 обозначим через

$$a_{kl}^{(1)},$$

элементы столбца b^1 через

$$b_k^1.$$

По построению

$$a_{11}^{(1)} \neq 0.$$

Умножим обе части уравнения

$$A_1 x = b^1,$$

на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$A_2 x = b^2,$$

где

$$A_2 = L_1 A_1, \quad b^2 = L_1 b^1.$$

Вычисляя произведение $L_1 A_1$, найдем, что

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Действительно, умножение

$$L_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

равносильно следующему преобразованию матрицы A_1 :

— все элементы первой строки матрицы A_1 делятся на $a_{11}^{(1)}$,

— затем для всех $i = 2, \dots, n$ первая строка умножается на $a_{i1}^{(1)}$ и вычитается из i -й строки матрицы A_1 .

Важно подчеркнуть, что все элементы первого столбца матрицы A_2 , кроме первого, оказываются при этом равными нулю.

Аналогично, элементы столбца b^2 вычисляются по формулам

$$b_1^2 = b_1^1 / a_{11}^{(1)},$$

$$b_i^2 = b_i^1 - b_1^2 a_{i1}^{(1)}, \quad \text{где } i = 2, \dots, n.$$

Выберем среди элементов

$$a_{22}^{(2)}, \quad a_{32}^{(2)}, \quad \dots, \quad a_{n2}^{(2)}$$

матрицы

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

максимальный по модулю. Пусть этот элемент есть

$$a_{i2}^{(2)}.$$

Этот элемент не может равняться нулю. Действительно, если

$$a_{i2}^{(2)} = 0$$

то

$$a_{22}^{(2)} = \dots = a_{n2}^{(2)} = 0.$$

Тогда, вычисляя

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix}$$

разложением по первому столбцу, получим, что

$$\det(A_2) = 0.$$

С другой стороны, используя то, что L_1 — элементарная нижняя треугольная матрица, а P_1 — либо единичная матрица, либо матрица перестановки, можем написать, что

$$\det(A_2) = l_{11} \det(P_1 A) = \det(P_1 A) / a_{11}^{(1)} = \pm \det(A) / a_{11}^{(1)} \neq 0.$$

Умножим обе части уравнения

$$A_2x = b^2,$$

на матрицу $P_2 = P_{2i}$, т. е. поменяем местами вторую и i -ю строку матрицы A_2 . Получим

$$\tilde{A}_2x = P_2L_1P_1b,$$

где

$$\tilde{A}_2 = P_2A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & \tilde{a}_{22}^{(2)} & \tilde{a}_{23}^{(2)} & \dots & \tilde{a}_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \tilde{a}_{n2}^{(2)} & \tilde{a}_{n3}^{(2)} & \dots & \tilde{a}_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Умножим обе части уравнения

$$\tilde{A}_2 x = P_2 L_1 P_1 b$$

на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\tilde{a}_{22}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\tilde{a}_{32}^{(2)}/\tilde{a}_{22}^{(2)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\tilde{a}_{n2}^{(2)}/\tilde{a}_{22}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} .$$

Получим

$$A_3 x = L_2 P_2 L_1 P_1 b,$$

где

$$A_3 = L_2 \tilde{A}_2 = L_2 P_2 L_1 P_1 A.$$

Нетрудно убедиться, что

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Важно подчеркнуть, что все элементы второго столбца матрицы A_3 , кроме первых двух, — нули.

Продолжая этот процесс, в конце концов получим систему уравнений

$$Ux = f$$

(очевидно, эквивалентную исходной), где

$$U = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 A,$$

$$f = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 b.$$

Причем

$$U = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \cdots & a_{2n-1}^{(3)} & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3n-1}^{(4)} & a_{3n}^{(4)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

есть верхняя треугольная матрица с 1-ми на главной диагонали.

Решим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n-1}^{(3)} & a_{2n}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Из последнего уравнения этой системы находим

$$x_n = f_n,$$

из предпоследнего

$$x_{n-1} = f_{n-1} - a_{n-1,n}^{(n)} x_n$$

и так далее, наконец, из первого уравнения находим

$$x_1 = f_1 - a_{1,2}^{(2)} x_2 - a_{1,3}^{(2)} x_3 - \dots - a_{1,n}^{(2)} x_n.$$

Таким образом, реализация метода Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе, называемым прямым ходом метода Гаусса, исходная система преобразуется к системе с треугольной матрицей.

На втором этапе, называемым обратным ходом метода Гаусса, решается система с треугольной матрицей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Выбор максимального по модулю элемента столбца при выполнении прямого хода метода Гаусса минимизирует влияние ошибок округления в реальных расчетах на компьютере. Если не заботиться об ошибках округления, то на очередном шаге прямого хода метода Гаусса можно выбирать любой ненулевой элемент столбца.

•

Вычисление определителя методом Гаусса.

Из

$$U = L_n P_n L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 A,$$

используя формулы

$$P_k^{-1} = P_k,$$

получаем

$$A = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U.$$

Из

$$A = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U,$$

используя формулы

$$\det(P_k A) = -\det A,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \det A = \det(P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U) &= \prod_{i=1}^n \det P_i \prod_{i=1}^n \det L_i^{-1} = \\ &= \pm \prod_{i=1}^n \det L_i^{-1}. \end{aligned}$$

При этом мы учли, что $\det U = 1$.

Используя

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1/l_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -l_{k+1,k}/l_{k,k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -l_{n,k}/l_{k,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

нетрудно убедиться, что

$$\det L_k^{-1} = 1/l_{k,k} = \tilde{a}_{kk}^{(k)}.$$

Следовательно,

$$\det A = \pm \prod_{i=1}^n \det L_i^{-1} = \pm a_{11}^{(1)} \tilde{a}_{22}^{(2)} \cdots \tilde{a}_{nn}^{(n)}.$$

Знак здесь определяется количеством перестановок строк, выполненных в ходе реализации прямого хода метода Гаусса. Если оно четно, выбирается знак плюс. Таким образом, определитель матрицы может быть вычислен в ходе реализации метода Гаусса.

Пример. Решим методом Гаусса систему уравнений

$$3x_1 + 6x_2 + 15x_3 = 60,$$

$$3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 34,$$

$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 12.$$

Выпишем матрицу системы уравнений

$$3x_1 + 6x_2 + 15x_3 = 60,$$

$$3x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 34,$$

$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 12$$

и столбец правой части:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 3 & 2 & 9 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 60 \\ 34 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Максимальный элемент первого столбца матрицы A есть $a_{31} = 9$.

Поменяем местами первую и третью строки матрицы, первый и последний элементы столбца:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 3 & 2 & 9 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 60 \\ 34 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad b^1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Затем делим первую строку матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

на 9, умножаем ее на 3 и вычитаем из второй и третьей строк. В результате получаем

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Делим первый элемент столбца

$$b^1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 60 \end{pmatrix}$$

на 9, затем умножаем его на 3 и вычитаем из второго и третьего элементов столбца b^1 . В результате получаем

$$b^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 30 \\ 56 \end{pmatrix} .$$

Максимальным из чисел $a_{22}^{(2)}$, $a_{32}^{(2)}$ является $a_{32}^{(2)} = 4$, поэтому меняем местами вторую и третью строки матрицы а также второй и третий элемент столбца:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}, \quad b^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 30 \\ 56 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 56 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Делим вторую строку матрицы и второй элемент столбца

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 56 \\ 30 \end{pmatrix}$$

на 4. Получаем

$$\tilde{\tilde{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{b}}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Наконец, делим последнюю строку матрицы и последний элемент столбца

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}^2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}$$

на 10. Получаем

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^3 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход метода Гаусса закончен.

Теперь выполняем обратный ход метода Гаусса. Из системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

последовательно находим

$$x_3 = 3,$$

$$x_2 = 14 - 3 \cdot 4 = 2,$$

$$x_1 = 4/3 - (2/3) \cdot 2 + (1/3) \cdot 3 = 1.$$

В ходе реализации метода Гаусса мы, фактически, подсчитали и определитель матрицы A .

Его абсолютная величина равна произведению ведущих элементов метода Гаусса, т. е. тех чисел, на которые приходилось выполнять деление при приведении матрицы A к треугольному виду.

В рассматриваемом примере — это

$$9, 4, 10.$$

Было выполнено две перестановки строк, следовательно, определитель равен произведению ведущих элементов:

$$\det(A) = 360.$$

§9. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

ТЕОРЕМА. Если A, B — произвольные квадратные матрицы, то

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если матрица A вырождена, то матрица AB также вырождена, и в этом случае равенство

$$\det(AB) = \det A \det B$$

тривиально выполняется.

Если матрица A невырождена, то, применяя

$$A = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U,$$

получим

$$AB = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} UB.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \prod_{i=1}^n \det P_i \prod_{i=1}^n \det L_i^{-1} \det(U) \det B = \\ &= \prod_{i=1}^n \det P_i \prod_{i=1}^n \det L_i^{-1} \det B, \end{aligned}$$

но

$$\prod_{i=1}^n \det P_i \prod_{i=1}^n \det L_i^{-1} = \det A,$$

т. е. равенство $\det(AB) = \det A \det B$ доказано. \square

Из формулы

$$\det A \det B = \det(AB)$$

и

$$AA^{-1} = I,$$

очевидно, вытекает, что если матрица A невырождена, то

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Пусть A — прямоугольная матрица. Матрица

$$A^* = (\bar{A})^T$$

называется сопряженной по отношению к матрице A . Ясно, что

$$(A^*)^* = A, \quad (\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*, \quad (A + B)^* = A^* + B^*.$$

Квадратная матрица A называется эрмитовой (самосопряженной),
если

$$A = A^*.$$



Шарль Эрмит (Charles Hermite; 1822 — 1901) — французский математик.

Квадратная матрица A называется косоэрмитовой, если

$$A = -A^*.$$

•

Определитель эрмитовой матрицы вещественное число.

В самом деле, поскольку

$$\det(A^*) = \det((\overline{A})^T) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)},$$

то для эрмитовой матрицы, т. е. такой, что

$$A = A^*,$$

имеем

$$\det(A) = \det(A^*),$$

и

$$\det(A) = \overline{\det(A)}.$$

Любая квадратная матрица A представима в виде

$$A = H_1 + iH_2,$$

здесь H_1, H_2 — эрмитовы матрицы, i — мнимая единица. Матрицы H_1, H_2 однозначно определяются матрицей A .

Возможность представления

$$A = H_1 + iH_2,$$

вытекает из очевидного тождества

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + i\frac{1}{2i}(A - A^*)$$

и легко проверяемых соотношений

$$(A + A^*)^* = A + A^*, \quad \left(\frac{1}{i}(A - A^*)\right)^* = \frac{1}{i}(A - A^*).$$

Если предположить, что наряду с

$$A = H_1 + iH_2$$

возможно представление

$$A = \tilde{H}_1 + i\tilde{H}_2$$

с эрмитовыми матрицами \tilde{H}_1, \tilde{H}_2 , то

$$(H_1 - \tilde{H}_1) + i(H_2 - \tilde{H}_2) = 0.$$

Переходя в

$$(H_1 - \tilde{H}_1) + i(H_2 - \tilde{H}_2) = 0$$

к сопряженным матрицам, получим

$$(H_1 - \tilde{H}_1) - i(H_2 - \tilde{H}_2) = 0.$$

Складывая почленно два этих равенства, будем иметь, что

$$H_1 = \tilde{H}_1,$$

но тогда и

$$H_2 = \tilde{H}_2,$$

т. е. представление

$$A = H_1 + iH_2$$

однозначно.

•

Матрицы, у которых все элементы вещественны, называют вещественными матрицами.

Вещественная эрмитова матрица A называется симметричной.

Для такой матрицы

$$A = A^T.$$

Вещественная матрица A называется кососимметричной, если

$$A = -A^T.$$

Для любой квадратной вещественной матрицы справедливо представление

$$A = A_1 + A_2,$$

где A_1 симметричная, A_2 кососимметричная матрицы. Такое представление единственно:

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^T), \quad A_2 = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Матрица A называется унитарной, если

$$AA^* = I, \quad A^*A = I,$$

иными словами, если

$$A^{-1} = A^*.$$

•

Определитель унитарной матрицы по модулю равен единице.

Действительно, по определению

$$AA^* = I,$$

следовательно,

$$\det(AA^*) = \det(I) = 1.$$

Запишем левую часть равенства подробнее:

$$\det(AA^*) = \det(A) \det(A^*) = \det(A) \overline{\det(A)} = |\det(A)|.$$

Значит,

$$|\det(A)| = 1.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что произведение унитарных матриц является унитарной матрицей.

УПРАЖНЕНИЕ. Проверить, что диагональная матрица, диагональ которой состоит из чисел q_1, q_2, \dots, q_n , равных единице по модулю (n — порядок матрицы), является унитарной.

Вещественная унитарная матрица называется ортогональной матрицей. Для такой матрицы

$$AA^T = I, \quad A^T A = I.$$

Определитель ортогональной матрицы может быть равен только плюс единице или минус единице.

УПРАЖНЕНИЕ. Проверить, что любая матрица перестановки P_{kl} ортогональна, например,

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

УПРАЖНЕНИЕ. Проверить, что матрица второго порядка

$$Q_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

где φ — любое вещественное число, является ортогональной.

Квадратная матрица A называется нормальной, если она перестановочна с матрицей A^* , т. е.

$$AA^* = A^*A.$$

Нетрудно убедиться, что эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные матрицы — нормальные матрицы:

$$A = A^* \implies AA^* = A^*A,$$

$$A = -A^* \implies AA^* = A^*A,$$

$$AA^* = I, \quad A^*A = I \implies AA^* = A^*A.$$

ПРИМЕР. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

является нормальной, но не принадлежит ни к одному из перечисленных выше классов. Действительно,

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

НО

$$A \neq A^* \quad A \neq -A^* \quad AA^* \neq I.$$

Во многих случаях оказывается полезным «разрезать» матрицу на блоки, т. е. представить ее в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix},$$

где элементы A_{ij} , в свою очередь, являются матрицами.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 9 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 7 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array} \right)$$

Размеры блоков предполагаются согласованными, т. е. все элементы, стоящие в одной строке, должны иметь одинаковое число строк, все элементы, стоящие в одном столбце, должны иметь одинаковое число столбцов. Одна и та же матрица может быть разбита на блоки различными способами.

Нетрудно убедиться, что с блочными матрицами можно действовать по тем же формальным правилам, что и с обычными. Если

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix},$$

причем для любой пары индексов i, j размеры блоков A_{ij}, B_{ij} совпадают, то матрица

$$C = A + B$$

может быть представлена как блочная с блоками

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Если

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{np} \end{pmatrix},$$

то матрица

$$C = AB$$

может быть представлена как блочная с блоками

$$C_{ij} = \sum_{q=1}^n A_{iq} B_{qj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

При этом, конечно, требуется, чтобы все произведения $A_{iq} B_{qj}$ имели смысл, т. е. горизонтальные и вертикальные размеры перемножаемых блоков должны быть согласованы.

•

Получим некоторые полезные формулы для вычисления определителей блочных матриц.

Рассмотрим сначала самый простой случай. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} I & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

есть блочная 2×2 матрица, I — единичная матрица, A_{22} — квадратная матрица, A_{12} — прямоугольная, вообще говоря, матрица. Тогда

$$|A| = |A_{22}|.$$

Справедливость равенства

$$|A| = |A_{22}|$$

легко устанавливается разложением определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} I & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}$$

по первому столбцу.

Аналогично, если

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где A_{11} — квадратная матрица, то

$$|A| = |A_{11}|.$$

ТЕОРЕМА. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{11} , A_{22} — квадратные матрицы. Тогда

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что если

$$|A_{11}| = 0$$

и

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = 0.$$

Обозначим через n_1 порядок матрицы A_{11} , через n_2 — порядок матрицы A_{22} . Если

$$|A_{11}| = 0,$$

то существует такой вектор

$$x^1 \neq 0$$

длины n_1 , что

$$A_{11}x^1 = 0.$$

Итак,

$$A_{11}x^1 = 0, \quad x^1 \neq 0.$$

Теперь для вектора

$$x = (x^1, 0, \dots, 0) \neq 0$$

длины $n_1 + n_2$ имеем

$$Ax = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$|A| = 0.$$

Таким образом, показано, что если

$$|A_{11}| = 0,$$

то

$$|A| = 0,$$

и равенство

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|$$

выполняется тривиальным образом.

Пусть теперь $|A_{11}| \neq 0$. Нетрудно убедиться, что

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| |A_{22}|. \quad \square$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

есть блочно–треугольная матрица, A_{ii} , $i = 1, \dots, n$, — произвольные квадратные матрицы. Доказать, что

$$|A| = |A_{11}| |A_{22}| \cdots |A_{nn}|.$$

2) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

есть блочная матрица A_{11} , A_{22} — квадратные матрицы, причем

$$|A_{11}| \neq 0.$$

Показать, что

$$|A| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}|.$$

Справедливо равенство:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители обеих частей этого равенства:

$$|A| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|.$$

Формулу

$$|A| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}|$$

можно рассматривать как обобщение формулы для вычисления определителя второго порядка.