

УДК 519.6

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

И.А. Козлов*, В.А. Чугунов**

(* аспирант, 420008, Казань ул. Кремлевская, 18, К(П)ФУ, garevo@mail.ru;

** д.ф.-м.н., 420008, Казань ул. Кремлевская, 18, К(П)ФУ, chug@ksu.ru)

АННОТАЦИЯ

В работе рассматриваются обратные задачи идентификации неизвестных коэффициентов и начального условия в нелинейном уравнении параболического типа. В качестве дополнительной информации задаются дискретные значения решения в определенные моменты времени. Для решения нелинейного уравнения были использованы численные методы, для решения обратной задачи применялась теория регуляризации, а также метод Левенберга-Марквардта для минимизации овражного функционала. На примерах наглядно показана возможность использования разработанных алгоритмов для решения определенных типов прикладных задач.

Ключевые слова: обратные краевые задачи, нелинейное уравнение параболического типа, теория регуляризации, термометрия

1. ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день обратные задачи [1] являются предметом пристального изучения ученых в связи с их важным прикладным значением. Данный тип задач находит приложения при решении задач планирования разработки нефтяных месторождений (определение фильтрационных параметров месторождений), при создании новых видов измерительной техники, при решении задач мониторинга окружающей среды и др.

В соответствии с восстанавливаемыми характеристиками вводят следующие виды обратных задач [2] – ретроспективные, граничные, коэффициентные, геометрические и задачу об источнике. Ретроспективные задачи заключаются в восстановлении начальных условий; граничные – определение функций и параметров, входящих в граничные условия; коэффициентные – определение функций и параметров, входящих в коэффициенты основных уравнений; геометрические – реконструирование геометрических характеристик области или каких-либо характерных точек, линий, поверхностей внутри ее; задача об источнике – определение источника. Следует отметить, что данная классификация не является полной. Возможны случаи комбинации восстанавливаемых характеристик.

Данная статья ограничена рассмотрением ретроспективной и коэффициентной обратной задачи для нелинейного одномерного уравнения теплопроводности.

2. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Обратные задачи ставятся только по отношению к прямым задачам. В математической физике под прямыми задачами [3] обычно понимают задачи моделирования каких-либо физических полей, процессов или явлений (тепловых, электромагнитных, акустических, сейсмических и т. п.). В прямых задачах требуется определить функцию, описывающую физическое поле или процесс в каждой точке исследуемой области и в каждый момент времени в случае нестационарного поля.

Прямая задача для одномерного уравнения теплопроводности в осесимметричной постановке в цилиндрических координатах описывается следующей системой уравнений [4]

$$c(\theta)\rho\frac{\partial\theta(r,\tau)}{\partial\tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(\theta)\frac{\partial\theta(r,\tau)}{\partial r}\right) + f(r,\tau), r_1 < r < r_2, \tau > 0 \quad (1.1)$$

$$\tau = 0: \theta(r, 0) = \theta_0(r), \quad (1.2)$$

В качестве граничных условий могут рассматриваться равенства температур

$$\tau > 0, r = r_i: \theta(r, \tau) = \theta_i(\tau), i = 1, 2; \quad (1.3)$$

тепловых потоков

$$\tau > 0, r = r_i: \lambda(\theta)\frac{\partial\theta(r,\tau)}{\partial r} = q_i(\tau), i = 1, 2; \quad (1.4)$$

а также условия конвективного теплообмена

$$\tau > 0, r = r_i: \lambda(\theta)\frac{\partial\theta(r,\tau)}{\partial r} = \alpha_0[\theta(r,\tau) - \theta_i^*(r,\tau)], i = 1, 2. \quad (1.5)$$

Возможны и различные сочетания перечисленных граничных условий. В (1.1) - (1.5) использованы следующие обозначения: $\theta(r, \tau)$ – температура; $c(\theta)$, ρ , $\lambda(\theta)$ – теплоемкость, плотность и теплопроводность тела, соответственно; r – радиальная координата; $r_i (i = 1, 2)$ – координаты границ рассматриваемой области; τ – время; $f(r, \tau)$ – тепловой источник; $\theta_0(r)$ – начальная температура; $q_{1,2}(\tau)$ – заданные тепловые потоки; $\theta_{1,2}(\tau)$ – заданные температуры на границах r_1 и r_2 , соответственно; α_0 – коэффициент теплообмена с окружающей средой; $\theta_{1,2}^*(r, \tau)$ – температура окружающей среды.

В прямой постановке задачи (1.1) – (1.5) функции $c(\theta)$, $\lambda(\theta)$, $f(r, \tau)$ и $\theta_0(r)$, вместе с граничными условиями, являются известными. В общем случае прямая задача (1.1) – (1.5) решается численно методом левой прогонки на равномерной по времени и на неравномерной по пространству сетках [5]. В обратной постановке указанные функции неизвестны и требуют определения. С этой целью к заданным уравнениям (1.1) – (1.5) необходимо

добавить какую-либо дополнительную информацию о решении прямой задачи – данные обратной задачи. Например, дополнительной информацией могут служить данные измерений температуры на границе области или во внутренних точках рассматриваемого тела.

3. ПОСТАНОВКА РЕТРОСПЕКТИВНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Примем, что в задаче (1.1) – (1.5) начальная температура $\theta_0(r)$ неизвестна и подлежит определению. В качестве дополнительной информации для отыскания функции $\theta_0(r)$ будем использовать результаты термометрии на границе тела после остановки процесса нагревания, а именно значения $\theta_t^j = \theta(r_1, \tau_j)$, $j = 1, \dots, N_t$. В этом случае при $r = r_1$ в уравнении (1.4) надо положить $q_1 = 0$. Примем, что на другой границе задана постоянная температура. Тогда искомая функция $\theta_0(r)$ должна быть подобрана так, чтобы решение задачи (1.1) – (1.5) с данным начальным условием было близко к результатам замеров θ_t^j . Сформулированная задача определения начального условия для дифференциального уравнения параболического типа по дискретному набору значений решения относится к классу математически некорректных обратных задач [6]. Следуя результатам указанной работы, введем в рассмотрение квазирешение сформулированной выше задачи.

Под квазирешением задачи (1.1) – (1.5) по определению ее начального условия будем понимать функцию $\theta_0(r)$, минимизирующую функционал

$$\rho(\theta_0) = \frac{1}{2N_t} \sum_{j=1}^{N_t} [\theta(r_1, \tau_j; \theta_0) - \theta_t(\tau_j)]^2 \rightarrow \inf \quad (1.6)$$

где $\theta(r_1, \tau_j; \theta_0)$ – след решения прямой задачи (1.1) – (1.5) с начальным условием $\theta(r, 0) = \theta_0(r)$. Единственное решение вариационной задачи (1.6) существует лишь на компактном классе корректности M_p [6]. Функции из M_p определяются конечным равномерно ограниченным набором параметров $\vec{p} = \{p_k\}, k = 0..N_p, |p_k| < P$. Учитывая сказанное и (1.6), определение квазирешения сводится к отысканию вектора $\vec{p} = \{p_k\}, k = 0..N_p$, однозначно определяющего функцию $\theta_0(r; \vec{p})$ и минимизирующего функционал вида

$$\rho(\vec{p}) = \frac{1}{2N_t} \sum_{j=1}^{N_t} [\theta(r_1, \tau_j; \theta_0(r; \vec{p})) - \theta_t(\tau_j)]^2 \rightarrow \min_{p_0, \dots, p_{N_p}} ; |p_k| < P \quad (1.7)$$

Математически отыскание квазирешения $\theta_0(r; \vec{p})$ сводится к минимизации функции $N_p + 1$ переменных при ограничениях-неравенствах,

причем вычисление самой этой функции предполагает многократное решение прямой задачи (1.1) – (1.5).

4. ПОСТАНОВКА КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Примем, что в задаче (1.1) – (1.5) коэффициенты $c(\theta)$ и $\lambda(\theta)$ неизвестны и подлежат определению. Для отыскания неизвестных функций можно воспользоваться результатами замеров температуры, полученных с двух температурных датчиков, помещенных в точки r_{d1} и r_{d2} тела. Замеры температуры θ_{t1}^j и θ_{t2}^j осуществляются в моменты времени τ_j , $j=1..N_t$, где N_t – количество замеров. Искомые функции $c(\theta)$ и $\lambda(\theta)$ должны быть подобраны так, чтобы решение задачи (1.1) – (1.5) с данными тепловыми параметрами, а конкретно значения $\theta(r_{d1}, \tau_j)$ и $\theta(r_{d2}, \tau_j)$, были близки к результатам замеров θ_{t1}^j и θ_{t2}^j соответственно. Как и предыдущем случае введем в рассмотрение квазирешение сформулированной задачи.

Квазирешение обратной коэффициентной задачи для (1.1) – (1.5), определим как функции $c(\theta)$ и $\lambda(\theta)$, минимизирующие функционал

$$\rho(c, \lambda) = \frac{1}{2N_t} \sum_{j=1}^{N_t} \left\{ \left[\theta(r_{d1}, \tau_j; c; \lambda) - \theta_{t1}^j \right]^2 + \left[\theta(r_{d2}, \tau_j; c; \lambda) - \theta_{t2}^j \right]^2 \right\} \rightarrow \inf, \quad (1.8)$$

где $\theta(r_{d1}, \tau_j; c; \lambda)$ и $\theta(r_{d2}, \tau_j; c; \lambda)$ – следы решения прямой задачи (1.1) – (1.5) с тепловыми параметрами тела $c(\theta)$ и $\lambda(\theta)$.

Единственное решение вариационной задачи (1.8) также может существовать лишь на компактном классе корректности M_p . Функции из класса корректности M_p определяются конечным набором параметров $\vec{p} = \{p_k\}$, $k=1..2N_p$. Примем, что набор параметров $\vec{p}_c = \{p_{ck}\}$, $k=1..N_p$ определяет функцию $c(\theta)$; $\vec{p}_\lambda = \{p_{\lambda k}\}$, $k=1..N_p$ – определяет функцию $\lambda(\theta)$. Далее для удобства записи будем использовать общий вектор параметров

$$\vec{p} = \{p_k\} = \{p_{c1}, \dots, p_{cN_p}, p_{\lambda 1}, \dots, p_{\lambda N_p}\}, \quad k=1..2N_p.$$

При этом будем полагать, что $|p_k| < P$. Тогда квазирешением обратной задачи (1.8) будут являться функции $c_p = c(\theta; \vec{p}) \in M_p$ и $\lambda_p = \lambda(\theta; \vec{p}) \in M_p$, однозначно определяемые вектором параметров \vec{p} , а сама задача (1.8) примет вид

$$\rho(\vec{p}) = \frac{1}{2N_t} \sum_{j=1}^{N_t} \left\{ \left[\theta(r_{d1}, \tau_j; c_p; \lambda_p) - \theta_{t1}^j \right]^2 + \left[\theta(r_{d2}, \tau_j; c_p; \lambda_p) - \theta_{t2}^j \right]^2 \right\} \rightarrow \min_{p_1, \dots, p_{2N_p}} \quad (1.9)$$

Отметим, что построение конкретной параметризации квазирешения и выбор метода минимизации функционалов (1.7) и (1.9) является довольно

сложной задачей и во многом определяют качество идентификации неизвестных параметров.

5. СПОСОБ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Точность и скорость сходимости метода минимизации функционалов (1.7) и (1.9) в значительной мере определяется выбором класса корректности M_p [7]. Для рассматриваемых в качестве класса корректности M_p будем использовать класс кубических сплайнов. Тогда искомые функции $\theta_0(r)$ и $c(\theta)$, $\lambda(\theta)$ можно представить кубическими сплайнами, а вектор параметров \vec{p} будет определяться через вектор значений искомых функций в узлах сплайна. Это позволяет ввести естественные ограничения на вектор параметров \vec{p} .

Для минимизации функционалов (1.7) и (1.9) при заданных ограничениях на вектор параметров будем использовать метод штрафов и метод Левенберга-Марквардта [8]. Данный метод дает наилучшую сходимость для функций квадратичного вида и хорошо зарекомендовал себя при минимизации овражных функционалов. В методе Левенберга-Марквардта точки строятся по закону:

$$\vec{p}^{(n+1)} = \vec{p}^{(n)} - \left[H(\vec{p}^{(n)}) + \lambda^n E \right]^{-1} \nabla \rho(\vec{p}^{(n)}), \quad n > 1, \quad (1.10)$$

где индекс n в скобках означает номер итерации, H – матрица Гессе, E – единичная матрица, $\nabla \rho$ – вектор градиента, λ^n – последовательность положительных чисел, обеспечивающих положительную определенность матрицы $\left[H(\vec{p}^{(n)}) + \lambda^n E \right]$. Значение λ^n выбирается стандартным способом, в качестве начального значения берется $\lambda^0 = 10^4$.

Для вычисления k -ой компоненты вектора градиента продифференцируем задачи (1.7) и (1.9) по параметру p_k . Для вычисления компонент матрицы Гессе продифференцируем полученные выражения для вектора градиента по параметру p_m . Полученные в результате дифференцирования компоненты $\frac{\partial \theta}{\partial p_k}$ и $\frac{\partial^2 \theta}{\partial p_k \partial p_m}$ имеют сложную структуру, поэтому целесообразно вычислять их приближенно, используя метод конечных разностей [5].

6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Решение ретроспективных обратных задач находит применение в задаче детектирования возможных нарушений целостности обсадной колонны вертикальной нагнетательной скважины. Так, температура горных пород в окрестности вертикальной нагнетательной скважины принципиально зависит от наличия фильтрации жидкости из скважины в окружающие ее горные породы. Наличие участков горных пород с температурой близкой к температуре жидкости в скважине является прямым указанием на

существование дефекта целостности обсадной колонны скважины на рассматриваемом участке. Таким образом, определение температуры горных пород в окрестности скважины в пределах интересующего участка по замерам температуры в самой скважине позволит выявить наличие фильтрации жидкости. Для реализации указанного метода не требуется осуществлять остановку скважины на продолжительный период времени и не предъявляются требования к режиму работы скважины до ее остановки. Однако необходимо уметь восстанавливать температуру в окрестности скважины по замерам температуры на ее стенке. Данная задача совпадает с той, которая была описана в разделе 3. Поэтому для ее решения был применен алгоритм, описанный в разделе 5.

Результатом численной реализации указанной задачи является программный комплекс, позволяющий определять участки фильтрации жидкости из вертикальной нагнетательной скважины в горные породы.

В качестве примера была исследована нагнетательная скважина №135 Ромашкинского месторождения. На Рис. 1 приведены графики термометрии скважины в различные промежутки времени (кривые 1 – 6), значение геотермальной температуры (кривая 8), а также значение угла $\text{tg}(\varphi)$ между профилем восстановленной начальной температуры и вертикальной осью (кривая 7). При $\varphi \rightarrow 90^\circ$ начальное распределение температуры в окрестности скважины будет близко к температуре флюида, что свидетельствует о наличии утечки флюида в пласт. При $\varphi \rightarrow 0^\circ$ начальное распределение температуры в окрестности скважины будет близким к невозмущенной геотермальной температуре, что свидетельствует об отсутствии утечки флюида в пласт.

Из анализа Рис. 1 видно, что вычисленное значение $\text{tg}(\varphi)$ близко к нулю на трех интервалах: 874-910 м., 926-947 м. и 960-965 м. В остальной части скважины отклонения носят случайный характер. На основании этого был сделан вывод, что флюид внедряется в районе указанных выше отметок, где и следует искать нарушение целостности обсадной колонны.

Впоследствии, во время проведения ремонтных работ на данной скважине, на указанных глубинах были зафиксированы нарушения целостности обсадной колонны.

Решение коэффициентных обратных задач находит применение в задаче определения тепловых свойств неконсолидированных или сыпучих материалов. Так, проблема определения теплопроводности и теплоемкости неконсолидированных материалов имеет место в строительной, пищевой, нефтяной и других областях промышленности. Достоверный прогноз протекания технологических процессов, связанных с переносом тепла, невозможен в указанных отраслях промышленности без достоверной информации о тепловых свойствах материалов. Например, отмеченные выше свойства необходимы для проектирования тепловых методов разработки месторождений тяжелых нефтей и природных битумов [9]. При этом достоверное измерение теплопроводности и теплоемкости

битумонасыщенного керна (песчаника), затрудняется тем, что извлекаемые из скважины образцы, цементированные только битумом, как правило, представляют собой дисперсную массу. При этом необходимым условием эксперимента является моделирование условий естественного залегания пластов, к которым относится давление, температура, а также характер насыщения. Для решения отмеченной задачи в Альметьевском нефтяном институте разрабатывается специальная установка, которая должна определять тепловые свойства материалов по замерам температуры в заданных точках. Эта проблема совпадает с коэффициентной задачей, описанной в разделе 4. Для ее решения применялся алгоритм, описанный в разделе 5.

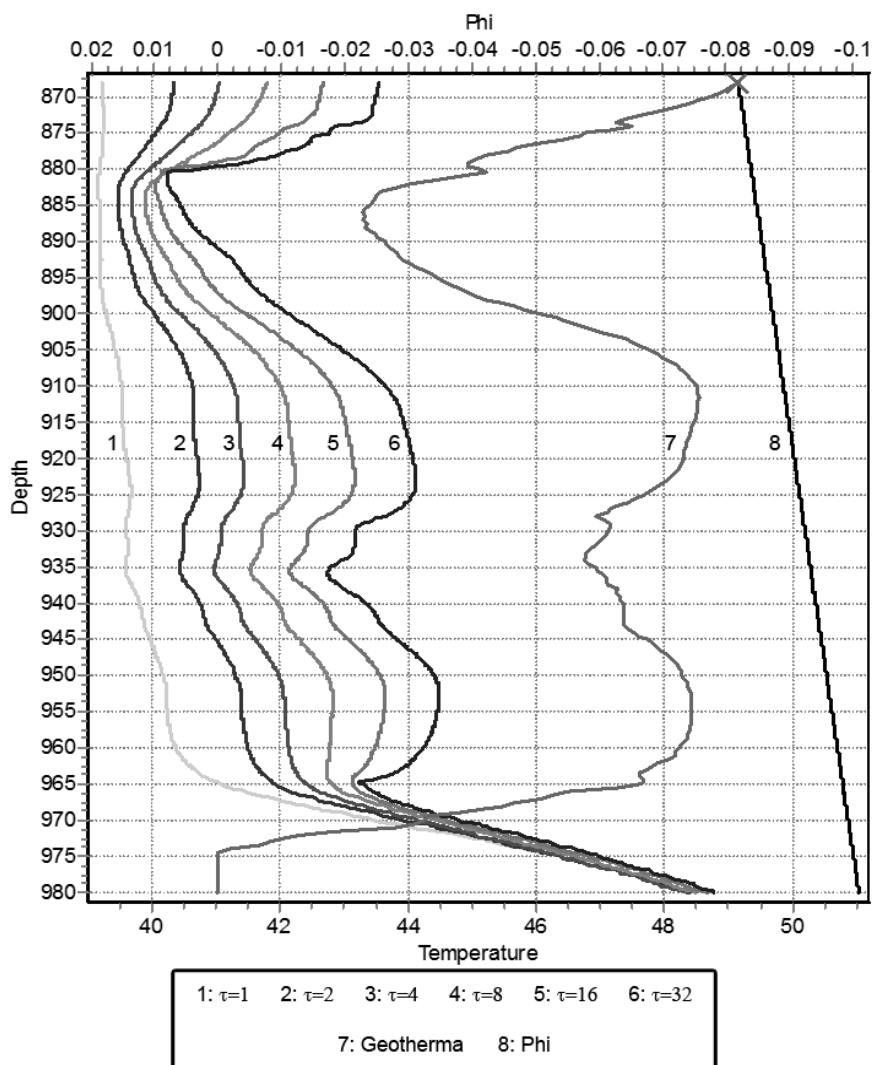


Рис. 1. Термометрия нагнетательной скважины №135 Ромашкинского месторождения после ее остановки

Ниже приведены результаты эксперимента по определению тепловых свойств песчаника нефтенасыщенного Ромашкинского месторождения Республики Татарстан. На Рис. 2, 3 приведено сравнение точной (сплошная линия) и вычисленной (пунктирная линия) зависимости теплопроводности и теплоемкости, соответственно.

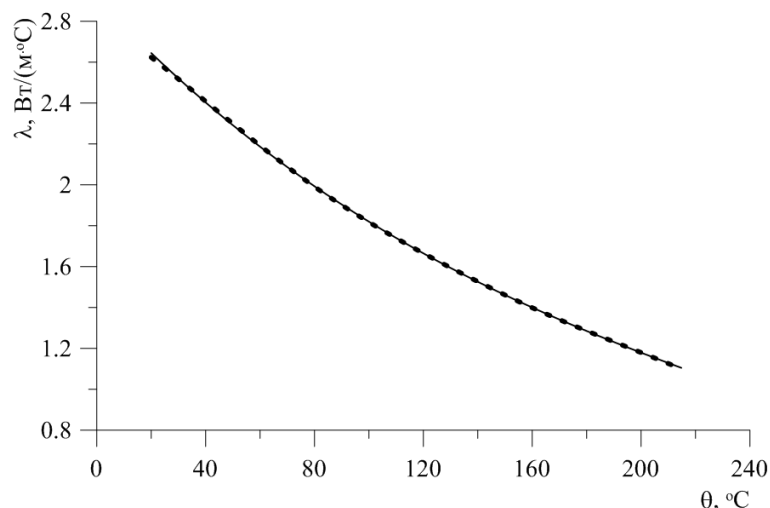


Рис. 2. Сравнение точной и вычисленной зависимости теплопроводности от температуры

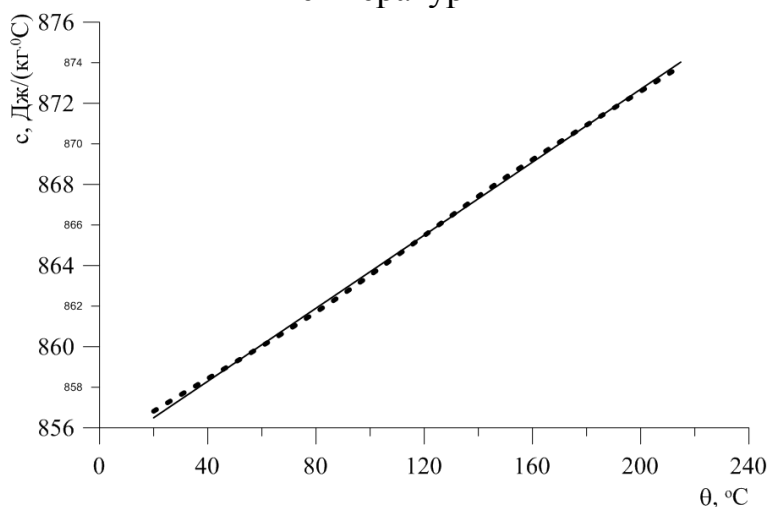


Рис. 3. Сравнение точной и вычисленной зависимости теплоемкости от температуры

Как видно из анализа Рис. 2 и 3, теплопроводность и теплоемкость образца по данным замеров температуры с двух температурных датчиков определены с высокой степенью точности, при этом обеспечивается высокая скорость сходимости метода минимизации функционала, а также существование и единственность решения.

Способ решения обратных задач, описанный в данной работе, позволяет решать большое количество прикладных задач. При наличии дополнительной информации о решении прямой задачи можно более точно восстановить неизвестные параметры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 263 с.
2. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 207 с.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1987. 437 с.
4. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
5. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.
6. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 286 с.
7. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит., 1988. 552 с.
8. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с., ил.
9. *Липаев А.А., Гуревич В.М., Липаев С.А.* Тепловые свойства горных пород нефтяных месторождений Татарстана. Справочник. Казань: Издательство КМО, 2001. 205 с.