С. Р. Насыров

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

snasyrov@kpfu.ru

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА КОМПЛЕКСНЫХ ТОРОВ НАД СФЕРОЙ РИМАНА С ТОЧКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим однопараметрическое семейство эллиптических функций $f(z,t)$ порядка $n \geqslant 2$ с периодами $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, гладко зависящее от вещественного параметра t. Предположим, что у функции $f(z,t)$ при фиксированном значении t имеется единственный полюс в начале координат. Представим $f'(z,t)$ в виде

$$f'(z,t) = c(t)\,\frac{\prod\limits_{k=0}^{n} \sigma(z-a_k(t))}{\sigma^{n+1}(z)},$$

где $\sigma(z)$ — σ-функция Вейерштрасса, $a_k(t)$ — полный набор критических точек функции $f'(z,t)$, причем

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t) = 0.$$

Пусть $A_k(t) = f(a_k(t),t)$ — образы этих критических точек. Без ограничения общности можно считать, что $A_0(t) \equiv 0$.

В случае, когда все критические точки a_k попарно различны, в [1] была найдена системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют $a_k(t)$, если заданы зависимости $A_k(t)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Здесь мы исследуем ситуацию, когда кратности нулей производной — произвольные натуральные числа. Тогда производная имеет вид

$$f'(z,t) = c(t)\,\frac{\prod\limits_{j=0}^{N} \sigma(z-a_j(t))^{m_j}}{\sigma^{n+1}(z)},$$

где $a_j(t)$ — попарно различные точки, $\sum_{j=0}^{N} m_j = n$. Для вывода соответствующей системы мы могли бы провести рассуждения, аналогичные тем, которые были для простых точек ветвления, однако, как и в [2], где был рассмотрен случай полиномов, униформизирующих семейства компактных римановых поверхностей над сферой рода нуль, получим систему формальным переходом к пределу, когда сближаются некоторые из точек a_j. Основным техническим моментом является

Лемма. *Пусть $f(x)$ — некоторая функция, определенная и k раз непрерывно дифференцируемая в окрестности точки a. Пусть $h(x)$ — четная в окрестности нуля функция, которая имеет разложение $h(x) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \beta_k x^k + o(x^k)$, $x \to 0$, и $g(x) = x/h(x)$. Тогда обобщенные разделенные разности k-го порядка*

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{f(a_j)}{\prod_{s\neq j} g(a_j - a_s)}$$

при $a_1,\ldots,a_{k+1} \to a$, стремятся к

$$\frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dx^k}(f(x+a)[h(x)]^{k+1})\Big|_{x=0},$$

т. е. к величине $\sum_{j=0}^{k} \gamma_{kj} f^{(j)}(a)$, где $\gamma_{kj} = \delta_{k,k-j}/j!$, а $\delta_{k,l}$ — коэффициенты тейлоровского разложения функции $(h(x))^{k+1}$: $(h(x))^{k+1} = \sum_{l=0}^{k} \delta_{k,l} x^l + o(x^k)$, $k \to 0$

Для вывода искомой системы дифференциальных уравнений мы применяем лемму к выражениям, стоящим в правых частях системы, полученной для простых точек ветвления. Эти выражения записываются через обобщенные разделенные разности, при этом роль функции g играет σ-функция Вейерштрасса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Насыров С.Р. *Однопараметрические семейства многолистных функций и риманвоых поверхностей* / Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы межд. конф. Воронежская зимняя матем. школа (27 января – 2 февраля 2015 г.). – Воронеж: ВГУ, 2015. – С. 83–85.

2. Насыров С.Р. *Нахождение полинома, униформизирующего заданную компактную риманову поверхность* // Математические заметки. – 2012. – Т. 91. – Вып. 4. – С. 597-607.