

Каюмов И.Р. Обзор по оценкам спектра интегральных средних конформных отображений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 2. – С. 104–115.

УДК 517.54

## ОБЗОР ПО ОЦЕНКАМ СПЕКТРА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*И.Р. Каюмов*

### Аннотация

Настоящий обзор посвящен описанию результатов об оценках интегральных средних в различных классах аналитических функций. Большое внимание отведено граничным свойствам конформных отображений. Основным математическим аппаратом для такого исследования послужили систематические результаты по оценке спектра интегральных средних и знаменитый закон повторного логарифма для конформных отображений, доказанный Н.Г. Макаровым в 1985 г. Получены точные оценки интегральных средних в различных подклассах однолистных функций. Даны оценки спектра интегральных средних в классе функций отображающих внешность единичного круга на бассейны притяжения бесконечности алгебраических полиномов.

**Ключевые слова:** конформные отображения, спектр интегральных средних, гармоническая мера.

### Summary

*I.R. Kayumov.* A Survey on the Integral Means Spectrum for Conformal Mappings.

The present survey is devoted to the description of the results about estimates of the integral means in various classes of analytic functions. Great importance is given to the boundary properties of conformal mappings. The systematic results on the estimation of the integral means spectrum and the well-known law of the iterated logarithm for conformal mappings, which was proven by N.G. Makarov in 1985, were the basic mathematical tools for this study. Precise estimates of the integral means in various subclasses of univalent functions are described. Estimates of the integral means spectrum in the class of functions mapping the exterior of the unit disk onto the attraction basins of the infinity of algebraic polynomials are presented.

**Keywords:** conformal mappings, integral means spectrum, harmonic measure.

### Литература

1. *Littlewood J.* On inequalities in the theory of functions // Proc. London Math. Soc. (2). – 1925. – V. 23, No 1. – P. 481–519.
2. *Gronwall T.H.* Some remarks on conformal representation // Ann. of Math. – 1914–1915. – V. 16, No 1/4. – P. 72–76
3. *Clunie J., Pommerenke Ch.* On the coefficients of univalent functions // Michigan Math. J. – 1967. – V. 14, No 1. – P. 71–78.

4. *Carleson L., Jones P.W.* On coefficient problems for univalent functions and conformal dimension // Duke Math. J. – 1992. – V. 66, No 2. – P. 169–206.
5. *Makarov N.G.* Fine structure of harmonic measure // St. Petersburg Math. J. – 1999. – V. 10, No 2. – P. 217–268.
6. *Pommerenke Ch.* On the integral means of the derivative of a univalent function // J. London Math. Soc. (2). – 1985. – V. 32, No 2. – P. 254–258.
7. *Hedenmalm H., Shimorin S.* On the universal integral means spectrum of conformal mappings near the origin // Proc. Amer. Math. Soc. – 2007. – V. 135, No 7. – P. 2249–2255.
8. *Makarov N.G.* A note on the integral means of the derivative in conformal mapping // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 96, No 2. – P. 233–236.
9. *Pommerenke Ch.* Boundary Behaviour of Conformal Maps. – Berlin; Heidelberg; Springer, 1992. – 300 p.
10. *Kayumov I.R.* Lower estimates for integral means of univalent functions // Ark. Mat. – 2006. – V. 44, No 1. – P. 104–110.
11. *Kraetzer Ph.* Experimental bounds for the universal integral means spectrum of conformal maps // Complex Var. Theory Appl. – 1996. – V. 31, No 4. – P. 305–309.
12. *Beliaev D., Smirnov S.* Random conformal snowflakes // Ann. of Math. (2). – 2010. – V. 172, No 1. – P. 597–615.
13. *Каюмов И.Р., Маклаков Д.В., Каюмов Ф.Д.* Оценки спектра интегральных средних для лакунарных рядов // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 10. – С. 79–85.
14. *Carleson L., Makarov N.G.* Some results connected with Brennan’s conjecture // Ark. Mat. – 1994. – V. 32, No 1. – P. 33–62.
15. *Feng J., MacGregor T.H.* Estimates of integral means of the derivatives of univalent functions // J. Anal. Math. – 1976. – V. 29, No 1. – P. 203–231.
16. *Каюмов И.Р.* Об одном неравенстве для универсального спектра интегральных средних // Матем. заметки. – 2008. – Т. 84, № 1. – P. 139–143.
17. *Makarov N.G.* Conformal mapping and Hausdorff measures // Ark. Mat. – 1987. – V. 25, No 1–2. – P. 41–89.
18. *Makarov N.G.* On the distortion of boundary sets under conformal mappings // Proc. London Math. Soc. (3). – 1985. – V. 51, No 3. – P. 369–384.
19. *Каюмов И.Р.* Спектр интегральных средних и закон повторного логарифма для конформных отображений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 2. – С. 85–96.
20. *Kayumov I.R.* The law of the iterated logarithm for locally univalent functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. – 2002. – V. 27, No 2. – P. 357–364.
21. *Hedenmalm H., Kayumov I.R.* On the Makarov law of the iterated logarithm // Proc. Amer. Math. Soc. – 2007. – V. 135, No 7. – P. 2235–2248.
22. *Каюмов И.Р.* К закону повторного логарифма для конформных отображений // Матем. заметки. – 2006. – Т. 79, Вып. 1. – С. 150–153.
23. *Лаверентьев М.А.* О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций // Матем. сб. – 1936. – Т. 1. – С. 815–846.
24. *Каюмов И.Р.* Метрические свойства гармонической меры на жордановых кривых // Междунар. конф. «Функциональные пространства и теория аппроксимаций», посвящ. 110-летию со дня рожд. С.М. Никольского: Тез. докл. – М., 2015. – С. 156.

25. *McMullen C.T.* Thermodynamics, dimension and the Weil–Petersson metric // *Invent. Math.* – 2008. – V. 173, No 2. – P. 365–425.
26. *Le Thanh Hoang N., Zinsmeister M.* On Minkowski dimension of Jordan curves // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* – 2014. – V. 39, No 2. – P. 787–810.
27. *Каюмов И.Р.* The integral means spectrum for lacunary series // *Ann. Acad. Sci. Fennicae.* – 2001. – V. 26, No 2. – P. 447–453.
28. *Милнор Дж.* Голоморфная динамика. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – 320 с.
29. *Каюмов И.Р.* Граничное поведение аналитических произведений Рисса в круге // *Матем. труды.* – 2006. – Т. 9, № 1. – С. 34–51.
30. *Littlewood J.* On the coefficients of schlicht functions // *Quart. J. Math. Oxford Ser.* – 1938. – V. 9, No 1. – P. 14–20.
31. *Каюмов И.Р.* Теорема искажения для однолистных лакунарных рядов // *Сиб. матем. журн.* – 2003. – Т. 44, № 6. – С. 1273–1279.
32. *Kraetzer Ph.* Algorithmische Methoden der konformen Abbildungen auf fraktale Gebiete: Dissertation. – Berlin, 2000. – 60 S.
33. *Каюмов И.Р.* О гипотезе Бреннана для специального класса функций // *Матем. заметки.* – 2005. – Т. 78, Вып. 4. – С. 537–541.
34. *Brennan J.E.* The integrability of the derivative in conformal mapping // *J. London Math. Soc. (2).* – 1978. – V. 18, No 2. – P. 261–272.
35. *Каюмов Ф.Д.* Интегральные оценки для производных однолистных функций // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 83–90.
36. *Каюмов И.Р.* Точные оценки интегральных средних для трех классов областей // *Матем. заметки.* – 2004. – Т. 76, Вып. 4. – С. 510–516.

Поступила в редакцию  
04.03.15

---

**Каюмов Ильгиз Рифатович** – доктор физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [ikaumov@gmail.com](mailto:ikaumov@gmail.com)