ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2012, том 446, № 5, с. 490–492

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕЩЕНИЕМ АРГУМЕНТОВ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ

© 2012 г. В. И. Жегалов

Представлено академиком Е.И. Моисеевым 02.04.2012 г.

Поступило 10.04.2012 г.

1. Имеется обширная литература по исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых аргумент искомой функции претерпевает определенное смещение. Одни авторы называют подобные уравнения функционально-дифференциальными, другие – с "запаздывающим", или "отклоняющимся" аргументом (см. библиографию в [1–5]). Для уравнений с частными производными обсуждаемое направление исследований является малоизученным: нам известны лишь некоторые результаты, когда смещения представляют собой разность аргументов искомой функции [6].

В данном сообщении рассматривается новый вариант реализации идеи смещения для уравнения гиперболического типа.

В области $D = \{0 < x, y < 1\}$ определим операторы

$$L_s\theta \equiv \alpha_s\theta_{xy} + \beta_s\theta_x + \gamma_s\theta_y + \delta_s\theta, \quad s = 1, 2,$$

с непрерывными в $\overline{D}$ функциями δ_s, $\dfrac{\partial\beta_s}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\gamma_s}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2\alpha_s}{\partial x\partial y}$.

З а д а ч а Г. Найти в D регулярное решение уравнения

$$L_{1^u} + L_{2^v} = f, \quad f \in C(\overline{D}), \tag{1}$$

непрерывно продолжимое на ∂D при $x \to 0$, $y \to 0$ и удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad u(x, 0) = \psi(x), \qquad \varphi(0) = \psi(0), \quad \varphi, \psi \in C^1[0, 1]. \tag{2}$$

При этом $v(x, y)$ определяется по $u(x, y)$ по формуле

$$v(x, y) \equiv u[\lambda(y), \mu(x)], \tag{3}$$

где каждая из функций $\lambda, \mu \in C^1[0, 1]$ отображает отрезок $[0, 1]$ на себя с сохранением направления движения, т.е., в частности,

$$\lambda(0) = \mu(0) = 0, \quad \lambda(1) = \mu(1) = 1, \tag{4}$$

а повторное применение преобразования (λ, μ) возвращает координаты (x, y) в исходное положение:

$$v[\lambda(y), \mu(x)] \equiv u\{\lambda[\mu(x)], \mu(\lambda(y))\} \equiv u(x, y). \tag{5}$$

Указанными свойствами обладают, например, пары $\lambda = y$, $\mu = x$ и $\lambda = \dfrac{e^y - 1}{e - 1}$, $\mu = \ln[1 + (e - 1)x]$, где e – основание натурального логарифма.

Понятно, что данная постановка включает в себя хорошо известную [7, с. 167] задачу Гурса для уравнения $L_{1^u} = f$.

2. Положим в (1) $x = t$, $y = \tau$ и проинтегрируем рассматриваемое уравнение по t от 0 до x, а по τ от 0 до y. Учитывая при этом условия (2) и вытекающие из (3), (4) соотношения

$$v(x, 0) = \varphi[\mu(x)], \quad v(0, y) = \psi[\mu(y)],$$

получаем

$$\alpha_1(x, y)u(x, y) + \alpha_2(x, y)u[\lambda(y), \mu(x)] = \int_0^x \{h_1(t, y)u(t, y) + h_2(t, y)u[\lambda(y), \mu(t)]\}\,dt + \int_0^y \{k_1(x, \tau)u(x, \tau) + k_2(x, \tau)u[\lambda(\tau), \mu(x)]\}\,d\tau - \int_0^x\int_0^y \{H_1(t, \tau)u(t, \tau) + H_2(t, \tau)u[\lambda(\tau), \mu(t)]\}\,d\tau dt + \varpi(x, y), \tag{6}$$

где

$$h_s(t, y) = \frac{\partial\alpha_s(t, y)}{\partial t} - \gamma_s(t, y),$$

$$k_s(x, t) = \frac{\partial\alpha_s(x, \tau)}{\partial\tau} - \beta_s(x, \tau),$$

$$H_s(t, \tau) = \frac{\partial^2\alpha_s(t, \tau)}{\partial t\partial\tau} - \frac{\partial\beta_s(t, \tau)}{dt} - \frac{\partial\gamma_s(t, \tau)}{d\tau} + \delta_s(t, \tau),$$

$$\varpi(x, y) = \alpha_1(x, 0)\psi(x) + \alpha_2(x, 0)\varphi[\mu(x)] +$$

Казанский (Приволжский) федеральный университет