Известия вузов. Математика
2012, №1, с. 54–60

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

А.Н. МИРОНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИМАНА К ФАКТОРИЗОВАННОМУ УРАВНЕНИЮ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Выведены достаточные условия однозначной разрешимости граничной задачи для гиперболического уравнения в области, ограниченной его характеристиками.

Ключевые слова: метод Римана, гиперболическое уравнение.

УДК: 517.956

Abstract. We obtain sufficient conditions for the unique solvability of the characteristic boundary problem for one hyperbolic equation.

Keywords: Riemann method, hyperbolic equation.

В работах [1]–[5] исследован ряд задач в треугольных областях для уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u\right)=0, \tag{1}$$

относящегося к одному из канонических видов, указанных в [6]. В работе [7] рассмотрена задача в прямоугольнике, образованном отрезками характеристик $x=\text{const}$, $y=\text{const}$.

В [8] методика и результаты из [7] распространяются на аналоги (1) с тремя и четырьмя независимыми переменными.

Здесь рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}\right)Lu=0, \tag{2}$$

$$Lu\equiv D^{\widetilde{\alpha}}u+\sum_{\alpha<\widetilde{\alpha}}a_\alpha(x_1,x_2,\dots,x_n)D^\alpha u,$$

где мультииндексы имеют n компонент, $\widetilde{\alpha}=(1,1,\dots,1)$, отношение подчиненности $\alpha<\widetilde{\alpha}$ означает, что α получен из $\widetilde{\alpha}$ уменьшением по меньшей мере одной компоненты. Очевидно, (2) является аналогом (1) в n-мерном пространстве.

Целью данной работы является распространение результатов статьи [8] на уравнение (2). При этом необходима формализация всех рассуждений из [8], позволяющая получить и сформулировать результаты в пространстве произвольного числа переменных.

Далее решения (2) будем называть регулярными, если все входящие в рассматриваемые уравнения производные искомых функций непрерывны. Кроме того, будем обозначать через $C^{(k_1,\dots,k_n)}$ класс функций, имеющих непрерывные производные $\partial^{s_1+\dots+s_n}u/\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_n^{s_n}$ для всех значений $s_r\leqslant k_r$, $r=\overline{1,n}$.

Поступила 22.01.2011

1. Постановка задачи и ее сведе́ние к интегральным уравнениям. Пусть $G = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : 0 < x_i < x_i^1,\ i = \overline{1,n}\}$, $G_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : 0 < x_j < x_j^1,\ j \neq i,\ x_i = 0\}$ — части границы G, являющиеся частями плоскостей $x_i = 0$. Расположенные внутри G части плоскостей $x_1 = x_2, \ldots,\ x_1 = x_n,\ x_2 = x_3, \ldots,\ x_{n-1} = x_n$ обозначим соответственно через $M_{12}, \ldots,\ M_{1n},\ M_{23}, \ldots,\ M_{(n-1)n}$.

Обозначим через e_i единичный мультииндекс, $e_i = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_j = 0$, $j \neq i$.

Задача Z. *Найти в* G *функцию* $u \in C(\overline{G}) \bigcap \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} C^{e_i}(G \bigcup G_i) \Big)$, *являющуюся в* $G \setminus \Big(\bigcup\limits_{i,j} M_{ij} \Big)$ *регулярным решением уравнения* (2) *и удовлетворяющую условиям*

$$u\big|_{\overline{G}_i} = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{\overline{G}_i} = \psi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

При этом предполагаем, что выполняются включения

$$a_\alpha \in C^\alpha(\overline{G}), \quad \varphi_i, \psi_i \in C^{2\widetilde{\alpha}}(\overline{G}_i). \tag{5}$$

Применяем к этой задаче схему рассуждений из [8]. Заметим, что (2) можно записать в виде $Lu = v$, где v есть решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0. \tag{6}$$

Следовательно,

$$Lu = \omega(x_n - x_1, x_n - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}), \tag{7}$$

где ω — произвольная функция. Из уравнения для v и постановки задачи вытекает, что должно выполняться требование

$$\omega(x_n - x_1, x_n - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}) \in C^{\widetilde{\alpha}}\Big(G \setminus \Big(\bigcup_{i,j} M_{ij}\Big)\Big).$$

С помощью вспомогательных переменных $\xi_i = x_n - x_i$, $i = \overline{1, n-1}$, правая часть (7) записывается в виде $\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$, $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) \in P = \{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) : -x_i^1 < \xi_i < x_n^1,$ $i = \overline{1, n-1}\}$. Многообразиям M_{ij} соответствуют уравнения

$$\xi_i = 0 \ \text{ при } \ j = n, \quad \xi_j - \xi_i = 0 \ \text{ при } \ j \neq n. \tag{8}$$

Так как решение $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнения (2) отыскивается в $G \setminus \Big(\bigcup\limits_{i,j} M_{ij}\Big)$, то уравнение (6) должно рассматриваться на том же множестве. Таким образом, $\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ есть произвольная функция класса $C^{\widetilde{\alpha}}(P_0)$, где P_0 — множество P без точек, удовлетворяющих уравнениям (8).

Известно ([9], с. 79; [10], формула (12)), что если

$$a_\alpha \in C^\alpha(\overline{G}), \quad \omega \in C(\overline{G}), \tag{9}$$

то решение уравнения (7) допускает представление

$$u = u_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \ldots \int_0^{x_n} R(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) \times \\ \times \omega(t_n - t_1, t_n - t_2, \ldots, t_n - t_{n-1}) dt_n dt_{n-1} \ldots dt_1, \tag{10}$$

где u_0 — решение уравнения $Lu = 0$, для которого R является функцией Римана (которая определяется как решение интегрального уравнения с частными интегралами ([9], с. 76; [10], [11])). Вместе с тем, из (10) видно, что функция u_0 должна удовлетворять условиям (3), вследствие чего u_0 — решение задачи Гурса в G для уравнения $Lu = 0$ с условиями (3), которое может быть записано в явном виде в терминах функции Римана по формуле (3.54) из [9].

Рассуждая как в [8], получаем интегральные уравнения Вольтерра второго рода с частными интегралами и непрерывными коэффициентами относительно функций

$$\begin{aligned} f_1(x_2, x_3, \dots, x_n) &= \omega(x_n, x_n - x_2, x_n - x_3, \dots, x_n - x_{n-1}),\\ f_2(x_1, x_3, \dots, x_n) &= \omega(x_n - x_1, x_n, x_n - x_3, \dots, x_n - x_{n-1}),\\ f_3(x_1, x_2, x_4, \dots, x_n) &= \omega(x_n - x_1, x_n - x_2, x_n, x_n - x_4, \dots, x_n - x_{n-1}),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= \omega(x_n - x_1, x_n - x_2, \dots, x_n - x_{n-2}, x_n),\\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= \omega(-x_1, -x_2, \dots, -x_{n-2}, -x_{n-1}), \end{aligned} \tag{11}$$

причем каждая функция f_i задана на множестве $\overline{G}_i$, $i = \overline{1, n}$. В соответствующих областях $\overline{G}_i$ существуют единственные непрерывные решения всех указанных интегральных уравнений. Для принадлежности решения u классу функций, определенному в постановке задачи, необходимо, чтобы функция ω в каждой области $\overline{G}_i$ была непрерывно дифференцируема, т. е. должны быть непрерывно дифференцируемы в этих областях и $f_1, f_2, \dots, f_n$. Известно ([9], с. 27), что степень гладкости решений уравнений Вольтерра второго рода с частными интегралами та же, что у коэффициентов и свободных членов этих уравнений. Следовательно, надо потребовать, чтобы на $\overline{G}_i$ гладкость коэффициентов была увеличена:

$$a_\alpha \in C^\beta(\overline{G}_i), \quad \alpha_i = 1, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}), \quad \beta_j = 1,\ j = \overline{1, n-1}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Перейдем к рассмотрению множества $P \subset R^{n-1}$. Определим подмножества P, в которых отыскиваются функции $f_1, f_2, \dots, f_n$. Возьмем первое соотношение из (11) и положим $x_n = \xi_1$, $x_n - x_2 = \xi_2, \dots, x_n - x_{n-1} = \xi_{n-1}$. Имеем

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = f_1(\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3, \dots, \xi_1 - \xi_{n-1}, \xi_1),$$

причем $\xi_1 \in [0, x_n^1]$, $(\xi_1 - \xi_2) \in [0, x_2^1], \dots, (\xi_1 - \xi_{n-1}) \in [0, x_{n-1}^1]$. Получаем, что f_1 определяется в области Q_1, ограниченной плоскостями

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_1 = x_n^1, \quad \xi_1 - \xi_2 = 0, \quad \xi_1 - \xi_3 = 0, \dots, \xi_1 - \xi_{n-1} = 0,$$
$$\xi_2 = -x_2^1, \quad \xi_3 = -x_3^1, \dots, \quad \xi_{n-1} = -x_{n-1}^1.$$

Аналогично из второго соотношения (11) для f_2 имеем

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = f_2(\xi_2 - \xi_1, \xi_2 - \xi_3, \dots, \xi_2 - \xi_{n-1}, \xi_2),$$
$$\xi_2 \in [0, x_n^1], \quad (\xi_2 - \xi_1) \in [0, x_1^1], \quad (\xi_2 - \xi_3) \in [0, x_3^1], \dots, (\xi_2 - \xi_{n-1}) \in [0, x_{n-1}^1].$$

Очевидно, f_2 определяется в области Q_2, ограниченной плоскостями

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_2 = x_n^1, \quad \xi_2 - \xi_1 = 0, \quad \xi_2 - \xi_3 = 0, \dots,$$
$$\xi_2 - \xi_{n-1} = 0, \quad \xi_1 = -x_1^1, \quad \xi_3 = -x_3^1, \dots, \quad \xi_{n-1} = -x_{n-1}^1.$$

Далее, последовательно получаем

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = f_3(\xi_3 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2, \dots, \xi_3 - \xi_{n-1}, \xi_3),$$
$$\xi_3 \in [0, x_n^1], \quad (\xi_3 - \xi_1) \in [0, x_1^1], \quad (\xi_3 - \xi_2) \in [0, x_2^1], \quad (\xi_3 - \xi_4) \in [0, x_4^1], \dots,$$
$$(\xi_3 - \xi_{n-1}) \in [0, x_{n-1}^1];$$

$$Q_3: \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_3 = x_n^1, \quad \xi_3 - \xi_1 = 0, \quad \xi_3 - \xi_2 = 0, \quad \xi_3 - \xi_4 = 0, \ \ldots,$$
$$\xi_3 - \xi_{n-1} = 0, \quad \xi_1 = -x_1^1, \quad \xi_2 = -x_2^1, \quad \xi_4 = -x_4^1, \ \ldots, \quad \xi_{n-1} = -x_{n-1}^1;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = f_{n-1}(\xi_{n-1} - \xi_1, \xi_{n-1} - \xi_2, \ldots, \xi_{n-1} - \xi_{n-2}, \xi_{n-1}),$$
$$\xi_{n-1} \in [0, x_n^1], \quad (\xi_{n-1} - \xi_1) \in [0, x_1^1], \quad (\xi_{n-1} - \xi_2) \in [0, x_2^1], \ \ldots,$$
$$(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}) \in [0, x_{n-2}^1];$$
$$Q_{n-1}: \quad \xi_{n-1} = 0, \quad \xi_{n-1} = x_n^1, \quad \xi_{n-1} - \xi_1 = 0, \quad \xi_{n-1} - \xi_2 = 0, \ \ldots,$$
$$\xi_{n-1} - \xi_{n-2} = 0, \quad \xi_1 = -x_1^1, \quad \xi_2 = -x_2^1, \ \ldots, \quad \xi_{n-2} = -x_{n-2}^1.$$

Последнее соотношение (11) дает

$$\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) = f_n(-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_{n-2}, -\xi_{n-1}),$$
$$-\xi_1 \in [0, x_1^1], \quad -\xi_2 \in [0, x_2^1], \ \ldots, \ -\xi_{n-2} \in [0, x_{n-2}^1], \quad -\xi_{n-1} \in [0, x_{n-1}^1];$$
$$Q_n: \xi_1 = 0, \quad \xi_1 = -x_1^1, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_2 = -x_2^1, \ \ldots, \quad \xi_{n-1} = 0, \ \ \xi_{n-1} = -x_{n-1}^1.$$

В каждой из областей $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ соответствующая функция $f_1, f_2, \ldots, f_n$ определяется однозначно.

Для $n = 3$ или $n = 4$ предыдущие рассуждения могут быть дополнены соответствующими чертежами. Например, при $n = 4$ получаем чертеж (рис. 1), на котором изображены области $P = A_1B_1C_1DE_1D_1F_1G_1$, $Q_1 = OFGED_1F_1G_1E_1$, $Q_2 = ABOEA_1B_1D_1E_1$, $Q_3 = OBCFD_1B_1C_1F_1$, $Q_4 = ABCDEOFG$.

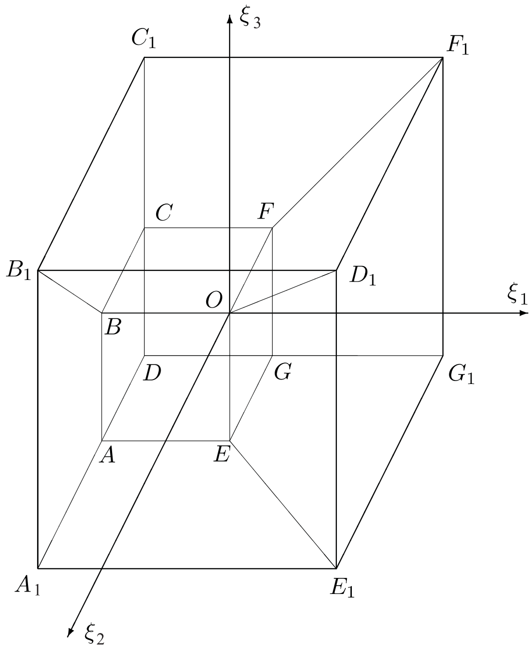

Рис. 1.

Точки на чертеже имеют следующие координаты: $O(0,0,0)$, $A(-x_1^1, 0, -x_3^1)$, $B(-x_1^1, 0, 0)$, $C(-x_1^1, -x_2^1, 0)$, $D(-x_1^1, -x_2^1, -x_3^1)$, $E(0, 0, -x_3^1)$, $F(0, -x_2^1, 0)$, $G(0, -x_2^1, -x_3^1)$, $A_1(-x_1^1, x_4^1, -x_3^1)$, $B_1(-x_1^1, x_4^1, x_4^1)$, $C_1(-x_1^1, -x_2^1, x_4^1)$, $D_1(x_4^1, x_4^1, x_4^1)$, $E_1(x_4^1, x_4^1, -x_3^1)$, $F_1(x_4^1, -x_2^1, x_4^1)$, $G_1(x_4^1, -x_2^1, -x_3^1)$.

Из (9) видим, что на частях границ $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, лежащих внутри P, должны выполняться условия согласования, обеспечивающие непрерывность ω в P (очевидно, таких условий $n(n-1)/2$). Указанные условия согласования должны рассматриваться как условия разрешимости задачи Z. Требуется определить их в исходных данных задачи.

2. Вывод условий разрешимости. Ясно, что условия согласования задаются следующим образом: на плоскостях $\xi_i - \xi_j = 0$

$$f_i(t_1, \ldots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \ldots, t_{n-1}) = f_j(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_{n-1}); \tag{13}$$

на плоскостях $\xi_i = 0$

$$f_n(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}) = f_i(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{n-2}, 0). \tag{14}$$

Учитывая связь между ω и f_k, например, для f_1 и f_2 получаем следующие соотношения:

$$\int_0^{x_2}\int_0^{x_3}\cdots\int_0^{x_n} R(0, t_2, t_3, \ldots, t_n, 0, x_2, x_3, \ldots, x_n) f_1(t_2, t_3, \ldots, t_n) dt_n \ldots dt_3 dt_2 = \\ = (\psi_1 - \psi_{01})(x_2, x_3, \ldots, x_n), \tag{15}$$

$$\int_0^{x_1}\int_0^{x_3}\cdots\int_0^{x_n} R(t_1, 0, t_3, \ldots, t_n, x_1, 0, x_3, \ldots, x_n) f_2(t_1, t_3, \ldots, t_n) dt_n \ldots dt_3 dt_1 = \\ = (\psi_2 - \psi_{02})(x_1, x_3, \ldots, x_n). \tag{16}$$

Дифференцируем (15) по t_2 и полагаем $t_2 = 0$, а (16) — по t_1 и полагаем $t_1 = 0$. Запишем разность полученных выражений:

$$\int_0^{x_3}\int_0^{x_4}\cdots\int_0^{x_n} R(0, 0, t_3, t_4, \ldots, t_n, 0, 0, x_3, x_4, \ldots, x_n)(f_1(0, t_3, t_4, \ldots, t_n) - \\ - f_2(0, t_3, t_4, \ldots, t_n)) dt_n \cdots dt_4 dt_3 = \\ = \left[\frac{\partial}{\partial x_2}(\psi_1 - \psi_{01})(x_2, x_3, \ldots, x_n)\right]_{x_2=0} - \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\psi_2 - \psi_{02})(x_1, x_3, \ldots, x_n)\right]_{x_1=0}. \tag{17}$$

Пусть теперь

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(\psi_1 - \psi_{01})(x_2, x_3, \ldots, x_n)\right]_{x_2=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\psi_2 - \psi_{02})(x_1, x_3, \ldots, x_n)\right]_{x_1=0}.$$

Дифференцируя (17) по $x_3, x_4, \ldots, x_n$, получаем однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода с частными интегралами относительно $(f_1 - f_2)(0, x_3, x_4, \ldots, x_n)$, всегда имеющее лишь нулевое решение. Поэтому на M_{12} выполняется условие согласования

$$f_1(0, t_3, t_4, \ldots, t_n) = f_2(0, t_3, t_4, \ldots, t_n).$$

Рассуждая точно так же в остальных случаях, получаем достаточные условия, при которых имеют место (13), (14):

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi_j - \psi_{0j})(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)\right]_{x_i=0} \equiv \\ \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi_i - \psi_{0i})(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\right]_{x_j=0}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Условия (18) могут быть записаны в другой форме. Для простоты ограничимся рассмотрением случая $i = 1$, $j = 2$.

Из (10) следует $\psi_{0i}|_{x_j=0} \equiv \psi_i|_{x_j=0}$, $i \neq j$, а из непрерывности $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $\overline{G}$ вытекает $\varphi_i|_{x_j=0} \equiv \varphi_j|_{x_i=0}$, причем данные тождества можно дифференцировать.

В работе [12] получены уравнения, связывающие граничные значения функции, являющейся решением уравнения

$$Lu = 0$$

при $n = 3$ с граничными значениями ее нормальных производных первого порядка на характеристиках G_i (см. также [9], с. 106–114). Имеется обобщение данных формул на случаи $n = 4$ и произвольного n ([9], § 5, с. 115–131). При сделанных выше предположениях о гладкости коэффициентов уравнения (2) и данных (3), (4), указанные уравнения для произвольного n могут быть записаны в виде

$$\sum_{\alpha_1=1} a_\alpha D^{\alpha-e_1}\psi_{01}|_{x_1=0} + \sum_{\alpha_1=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_1|_{x_1=0} = 0, \tag{19}$$

$$\sum_{\alpha_2=1} a_\alpha D^{\alpha-e_2}\psi_{02}|_{x_2=0} + \sum_{\alpha_2=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_2|_{x_2=0} = 0, \tag{20}$$

где e_1, e_2 — единичные мультииндексы. Формула (19) получается из уравнения $Lu = 0$ формальной заменой всех производных функции u_{x_1} на производные функции ψ_{01}, а производных функции u, не содержащих дифференцирования по x_1, — на производные φ_1. То же относится и к (20).

Формулы (19), (20) можно переписать в виде

$$\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_1}\psi_{01}|_{x_1=0} = -\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=0}} a_\alpha D^{\alpha-e_1}\psi_{01}|_{x_1=0} - \sum_{\alpha_1=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_1|_{x_1=0}, \tag{21}$$

$$\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_2}\psi_{02}|_{x_2=0} = -\sum_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_2}\psi_{02}|_{x_2=0} - \sum_{\alpha_2=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_2|_{x_2=0}. \tag{22}$$

Из (18) следует, что на M_{12}

$$\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_1-e_2}[D^{e_2}(\psi_1-\psi_{01})]_{\substack{x_1=0\\ x_2=0}} = \sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_1-e_2}[D^{e_1}(\psi_2-\psi_{02})]_{\substack{x_1=0\\ x_2=0}}. \tag{23}$$

Подставляем в (23) левые части формул (21), (22). Получаем

$$\left[\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_1}\psi_1 + \sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=0}} a_\alpha D^{\alpha-e_1}\psi_1 + \sum_{\alpha_1=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_1\right]_{M_{12}} =$$

$$= \left[\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_2}\psi_2 + \sum_{\substack{\alpha_1=0\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_2}\psi_2 + \sum_{\alpha_2=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_2\right]_{M_{12}}. \tag{24}$$

Условие (24) записано через данные задачи Z. Оно эквивалентно условию (18) при $i = 1$, $j = 2$. В этом можно убедиться, рассматривая (23) как задачу Гурса ([9], с. 75–79; [10]) для уравнения

$$\sum_{\substack{\alpha_1=1\\ \alpha_2=1}} a_\alpha D^{\alpha-e_1-e_2} w = 0$$

с нулевыми условиями (полученными из (10))

$$w|_{x_i=0} = 0, \quad i = \overline{3,n}.$$

Решение задачи Гурса существует и единственно [10]. Это решение $w \equiv 0$ приводит к (18) при $i = 1$, $j = 2$.

С помощью аналогичных рассуждений получаем все оставшиеся условия разрешимости задачи. Таким образом, все условия разрешимости можно записать в форме

$$\left[\sum_{\alpha_i=1} a_\alpha D^{\alpha-e_i}\psi_i + \sum_{\alpha_i=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_i\right]_{M_{ij}} =$$

$$= \left[\sum_{\alpha_j=1} a_\alpha D^{\alpha-e_j}\psi_j + \sum_{\alpha_j=0} a_\alpha D^\alpha \varphi_j\right]_{M_{ij}}, \quad i \neq j, \quad i,j=\overline{1,n}. \qquad (25)$$

Из предыдущих рассуждений следует

Теорема. *При условиях гладкости* (5), (12) *и выполнении равенств* (25) *задача* Z *однозначно разрешима.*

Литература

[1] Елубаев С.Е. *Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа*, Сиб. матем. журн. **2** (4), 510–519 (1961).

[2] Елубаев С.Е. *Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка с двумя независимыми переменными*, Вестн. АН Казахск. ССР, №6, 54–62 (1962).

[3] Джураев Т.Д. *Об уравнениях смешанно-составного типа*, Изв. АН УзбССР. Сер. физ.-матем. наук, №6, 3–14 (1961).

[4] Джураев Т.Д. *О некоторых краевых задачах для уравнений смешанно-составного типа*, Сиб. матем. журн. **4** (4), 775–787 (1963).

[5] Ni Xingtang. *Boundary value problem with three characteristic supports for linear totally hyperbolic equation of the third order*, Kexue tongbao **25** (5), 361–369 (1980).

[6] Джураев Т.Д., Попёлек Я. *О канонических видах уравнений с частными производными 3-го порядка*, УМН **44** (4), 237–238 (1989).

[7] Жегалов В.И. *Об одной граничной задаче для уравнения в частных производных третьего порядка*, Тр. междунар. научн. конф. “Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы”, Стерлитамак, 24–26 июня 2003 (Гилем, Уфа, 2003), с. 119–123.

[8] Жегалов В.И., Миронов А.Н. *К пространственным граничным задачам для гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения **46** (3), 364–371 (2010).

[9] Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными* (Казанск. матем. об-во, Казань, 2001).

[10] Миронов А.Н. *К методу Римана решения одной смешанной задачи*, Вестн. Самарск. техн. ун-та. Сер. физ.-матем. наук, №2, 27–32 (2007).

[11] Миронов А.Н. *Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в* R^n, Сиб. матем. журн. **47** (30), 584–594 (2006).

[12] Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Трехмерные характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях*, Дифференц. уравнения **36** (6), 833–836 (2000).

А.Н. Миронов

доцент, кафедра математического анализа, алгебры и геометрии,
Филиал ФГАОУ ВПО КФУ в г. Елабуга,
ул. Казанская, д. 89, г. Елабуга, 423600,

e-mail: lbmironova@yandex.ru

A.N. Mironov

Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry,
Elabuga Branch of Kazan (Volga Region) Federal University,
89 Kazanskaya str., Elabuga, 423600 Russia,

e-mail: lbmironova@yandex.ru