Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Г.Р.Антропова, С.Н.Матвеев, А.Н.Углов

МАТЕМАТИКА (в трёх частях).
Часть 1

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов заочной и дистанционной форм обучения по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров

Набережные Челны
2019

УДК 51 (076)

Печатается по решению кафедры математики Набережночелнинского института Казанского (Приволжского) федерального университета

Рецензенты:
Ж.И. Зайцева, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики Набережночелнинского института К(П)ФУ
И.А. Шакиров, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и методики обучения ФГБОУ ВО НГПУ

Антропова Г.Р., Матвеев С.Н., Углов А.Н.
Математика (в трёх частях). Часть 1: Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов заочной и дистанционной форм обучения по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров. -Набережные Челны: Изд-во: НЧИ К(П)ФУ, 2019, -75 с.

Учебно-методическое пособие составлено на основании требований Государственных образовательных стандартов высшего образования для студентов инженерно-технических направлений подготовки бакалавров. Разработано на кафедре «Математика» и предназначено для использования в учебном процессе студентами заочной и дистанционной форм обучения. Учебно-методическое пособие может быть использовано и для самостоятельной работы студентами дневной формы обучения.

Первая часть учебно-методического пособия включает в себя разделы математики: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия, комплексные числа и многочлены.

В учебно-методическом пособии изложены цели и задачи дисциплины, её содержание, методические указания по изучению дисциплины и выполнению индивидуальной контрольной работы; приведены задания для индивидуальной контрольной работы и теоретические вопросы к экзамену (зачёту); указана рекомендуемая литература. В приложениях приведены: образец решения контрольных задач типового варианта, краткие теоретические сведения, необходимые для решения практических задач, образец оформления обложки тетради с индивидуальной контрольной работой, таблица номеров выполняемых заданий.

УДК 51 (076)

1.Цель и задачи дисциплины, её место в учебном процессе.

Целью освоения дисциплины «Математика» является - формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи науки и практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными задачами дисциплины являются:

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни, с характерными чертами математического метода изучения реальных задач;
- обучение студентов теоретическим основам курса;
- привитие практических навыков математического моделирования реальных естественнонаучных и технических задач с использованием математического аппарата данного курса;
- развитие у студентов навыков творческого и логического мышления, повышение общего уровня математической культуры.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимо знание элементарной математики в объёме курса средней школы. Дисциплина является предшествующей для освоения большинства естественнонаучных и технических дисциплин, использующих математический аппарат.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать: теоретические основы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии; дифференциального и интегрального исчисления; дифференциальных уравнений; числовых и функциональных рядов; теории вероятностей и математической статистики;
- уметь: использовать математический аппарат в профессиональной деятельности; проводить расчёты на основе построенных математических моделей;
- владеть: методами линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии, математического анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики; навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач;
- демонстрировать способность и готовность: применять результаты освоения дисциплины в профессиональной деятельности.

Изучение дисциплины предусматривает проведение лекционных, практических занятий и самостоятельную работу студентов. На лекциях излагается теоретический материал. Прослушав лекцию, студент должен ознакомиться с более подробным изложением материала в учебниках из списка основной и дополнительной литературы. Практические занятия проводятся с целью закрепления теоретических основ курса, получения практических навыков решения математических задач. Контроль знаний осуществляется с помощью индивидуальных контрольных работ, зачётов и экзаменов.

2. Содержание дисциплины (часть 1).

Раздел. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.
Тема. Определители.
Определители 2-ого, 3-его, порядков, порядка n. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам строки или столбца. Вычисление определителей.
Тема. Матрицы.
Определение матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами. Линейная зависимость и независимость строк матрицы. Базисный минор. Ранг матрицы. Обратная матрица, условие существования, основные способы её нахождения. Матричные уравнения, их решение.
Тема. Системы линейных алгебраических уравнений.
Системы линейных уравнений (СЛУ). Основные понятия и определения. Матричная запись СЛУ. Теорема Кронеккера-Капелли. Формулы Крамера. Решение СЛУ методом обратной матрицы. Решение СЛУ методом Гаусса. Базисные и свободные неизвестные. Общее решение СЛУ. Однородные системы линейных уравнений, свойства их решений. Условия существования ненулевых решений однородных СЛУ. Фундаментальная система решений. Структура общего решения СЛУ.
Тема. Арифметические векторы и их системы. Векторные пространства.
N–мерный арифметический вектор. Линейные операции над векторами, их свойства. Понятие n-мерного векторного пространства R^n. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Базис и ранг пространства R^n. Координаты вектора в R^n. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Ортогональный базис. Разложение вектора по ортогональному базису.
Тема. Линейные операторы.
Линейный оператор, действия над ними. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов, их свойства и нахождение.
Тема. Квадратичные формы.
Квадратичные формы. Закон инерции квадратичных форм. Положительно и отрицательно определённые квадратичные формы. Критерии знакоопределённости квадратичных форм.

Раздел. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Тема. Векторная алгебра.
Геометрические векторы на прямой, плоскости и в пространстве, действия над ними. Проекция вектора. Прямоугольная декартова система координат. Радиус-вектор. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме. Длина и направляющие косинусы вектора. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное, векторное,

смешанное произведения векторов, их свойства, выражение в координатной форме, приложения для решения геометрических задач. Условия перпендикулярности, параллельности и компланарности векторов.

Тема. Прямые линии и плоскости.

Прямая на плоскости и в пространстве. Различные виды уравнений прямой на плоскости ив пространстве. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Плоскость. Различные виды уравнений плоскости. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Тема. Кривые и поверхности второго порядка.

Кривые 2-ого порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их определения, канонические уравнения, форма. Приведение общего уравнения кривой 2-ого порядка к каноническому виду и построение**.** Поверхности 2-ого порядка, их канонические уравнения и форма.

Раздел. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ.

Тема. Комплексные числа и многочлены.

Комплексные числа, их геометрическое изображение на плоскости. Различные формы записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Многочлены и алгебраические уравнения. Основная теорема алгебры. Теорема Безу. Разложение многочленов на линейные и квадратичные множители.

3. Рекомендуемая литература.

Основная литература:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. -312с. –ISBN: 978-5-9221-0979-6.
2. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс: Учебник для бакалавров. –СПб.: Изд-во «Лань», 2008. -960с. ISBN: 978-5-8114-0445-2.
3. Задачник по высшей математике для вузов [Текст] : учебное пособие / В. Н. Земсков [и др.] ; под ред. А. С. Поспелова .- 3-е изд., стер .- Екатеринбург : Изд-во АТП, 2015 .- 512 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Учебник для вузов. –М.: Айрис-пресс, 2009. -608с.
5. Шипачёв В.С. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебник / В.С. Шипачёв. – Москва: ИНФРА-М, 2018. -479 с. – (Высшее образование). – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=945790.

Дополнительная литература:

1. Антонов В.И., Копелевич Ф.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. –СПб.:Изд-во «Лань», 2013. -112с. ISBN: 978-5-8114-1413-0.
2. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учебное пособие. –СПб.: Изд-во «Лань», 2008. -496с. ISBN 978-5-8114-0861-0.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Учеб. пособие для вузов. Часть I: -М: Высшая школа, 2008. -304с.
6. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике: учеб. пособие. –СПб.: Изд-во «Лань», 2009. -688с. ISBN: 978-5-8114-0572-5.
4. Сборник задач по математике для вузов. Учеб. пособие для студентов вузов. /Абрамова В.В., Бикчурина Л.Ж., Валеева М.И. и др.; под ред. Котляра Л.М., Углова А.Н.; 5-е изд., перераб. и доп. -Наб. Челны: ИНЭКА, 2006. – 472с. (Гриф Министерства образования и науки РФ)
5. Шипачёв В.С. Задачник по высшей математике [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.С. Шипачёв. –10-е изд., стереотип. - Москва: ИНФРА-М, 2018. -304 с. – (Высшее образование). – Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=927763.

4. Методические указания по изучению дисциплины и выполнению индивидуальной контрольной работы.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить по одной индивидуальной контрольной работе в каждом из семестров обучения (задания для контрольной работы приведены в разделе **5.1**).

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы и номер зачетной книжки; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу (образец оформления обложки приведён в *Приложении 6.4*).

3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

4. Номера решаемых задач выбираются из *ТАБЛИЦЫ НОМЕРОВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЗАДАНИЙ (Приложение 6.5).*

5. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение (чертежи можно выполнять аккуратно от руки). В конце решения приводится ответ.

6. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров.

7. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.

8. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.

9. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.

10. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки контрольная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Образец решения типового варианта контрольной работы приведён в *Приложении 6.1*.

5. Материалы для контроля знаний студентов.

Итоговой формой контроля знаний является экзамен (зачёт) в конце семестра обучения. На экзамене (зачёте) студент должен показать знание теоретических основ дисциплины в объёме вопросов, приведённых в разделе **5.2** и умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

5.1. Задания для контрольной работы.

1 – 10. Вычислить определитель:
а) непосредственным разложением по $i-ой$ строке**;**
б) непосредственным разложением по $j-ому$ столбцу.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ $(i=1, \quad j=2)$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ $(i=1, \quad j=4)$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ $(i=1, \quad j=3)$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ $(i=2, \quad j=1)$

5. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $(i=3, \quad j=1)$

6. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $(i=2, \quad j=2)$

7. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ $(i=1, \quad j=1)$

8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $(i=2, \quad j=4)$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ $(i=4, \quad j=1)$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $(i=3, \quad j=2)$

11 – 20. Найти матрицу C , если $C = A^T \cdot B + 2A$ **.**

11. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **12.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **14.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **16.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ **18.** $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **20.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

21 – 30. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется: **а)** найти решение системы методом Крамера**;**
б) записать систему в матричном виде и найти её решение методом обратной матрицы; **в)** найти решение системы методом Гаусса.

21. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 6 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 5y + z = -7 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 16 \\ 3x - 2y - 5z = 12 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 5y - z = 7 \\ 2x - y - z = 4 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 2x - y - 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$

31–40. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

31. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 8x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 0 \\ 3x_2 - 7x_3 - 10x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

41 – 50. Требуется:

а) найти собственные числа и векторы матрицы A**;**

б) исследовать квадратичную форму на знакоопределённость (по критерию Сильвестра)**.**

41. а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **б)** $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+4x_3^2$

42. а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **б)** $4x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3-3x_2^2+4x_3^2$

43. а) $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ **б)** $x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+4x_3^2$

44. а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **б)** $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-x_3^2$

45. а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **б)** $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-4x_3^2$

46. а) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **б)** $x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$

47. а) $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **б)** $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$

48. а) $A=\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ **б)** $-x_1^2-x_2^2-2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3-3x_3^2$

49. а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **б)** $x_1^2-7x_2^2+8x_1x_2-8x_1x_3-8x_2x_3+3x_3^2$

50. а) $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ **б)** $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+10x_2x_3+4x_3^2$

51 – 60. Даны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$. Показать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

51. $\overline{a} = (1,-1,-1)$, $\overline{b} = (0,1,1)$, $\overline{c} = (-1,0,1)$, $\overline{d} = (-3,3,5)$.

52. $\overline{a} = (1,1,0)$, $\overline{b} = (-1,0,-1)$, $\overline{c} = (1,1,1)$, $\overline{d} = (0,2,-1)$.

53. $\overline{a} = (2,-3,1)$, $\overline{b} = (3,-3,1)$, $\overline{c} = (2,-1,2)$, $\overline{d} = (6,-8,1)$.

54. $\overline{a} = (1,1,0)$, $\overline{b} = (1,0,1)$, $\overline{c} = (1,1,1)$, $\overline{d} = (2,3,1)$.

55. $\overline{a} = (2,1,3)$, $\overline{b} = (4,2,1)$, $\overline{c} = (3,4,5)$, $\overline{d} = (1,3,2)$.

56. $\overline{a} = (2,3,1)$, $\overline{b} = (-1,2,-2)$, $\overline{c} = (1,2,1)$, $\overline{d} = (2,-2,1)$.

57. $\overline{a} = (1,2,1)$, $\overline{b} = (2,-1,3)$, $\overline{c} = (3,-1,4)$, $\overline{d} = (5,1,6)$.

58. $\overline{a} = (-1,0,2)$, $\overline{b} = (-2,2,1)$, $\overline{c} = (1,-3,2)$, $\overline{d} = (1,4,-6)$.

59. $\overline{a} = (1,-1,0)$, $\overline{b} = (0,1,-1)$, $\overline{c} = (0,0,1)$, $\overline{d} = (2,-1,0)$.

60. $\overline{a} = (3,3,-1)$, $\overline{b} = (3,1,0)$, $\overline{c} = (-1,2,1)$, $\overline{d} = (-1,0,2)$.

61 – 70. Даны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Требуется:

а) найти векторы $\overline{m} = \overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{n} = 2\overline{b} - \overline{c}$ **;**

б) вычислить скалярное произведение $\overline{m} \cdot \overline{n}$;

в) найти проекцию вектора $\overline{m}$ на направление вектора $\overline{n}$;

г) найти векторное произведение $\overline{m} \times \overline{n}$ и его модуль $|\overline{m} \times \overline{n}|$.

61. $\overline{a} = (4,5,2)$, $\overline{b} = (3,0,1)$, $\overline{c} = (-1,4,2)$.

62. $\overline{a} = (3,-5,2)$, $\overline{b} = (4,5,1)$, $\overline{c} = (-3,0,-4)$.

63. $\overline{a} = (-2,3,5)$, $\overline{b} = (1,-3,4)$, $\overline{c} = (7,8,-1)$.

64. $\overline{a} = (1,3,5)$, $\overline{b} = (1,2,1)$, $\overline{c} = (5,7,3)$.

65. $\overline{a} = (2,4,-6)$, $\overline{b} = (1,3,5)$, $\overline{c} = (0,3,7)$.

66. $\overline{a} = (4,3,-1)$, $\overline{b} = (5,0,4)$, $\overline{c} = (2,1,2)$.

67. $\overline{a} = (3,4,-3)$, $\overline{b} = (-2,2,0)$, $\overline{c} = (2,1,-4)$.

68. $\overline{a} = (-2,1,7)$, $\overline{b} = (3,3,-8)$, $\overline{c} = (5,4,-1)$.

69. $\overline{a} = (1,0,5)$, $\overline{b} = (3,2,7)$, $\overline{c} = (5,0,9)$.

70. $\overline{a} = (2,1,0)$, $\overline{b} = (4,3,-3)$, $\overline{c} = (6,5,-7)$.

71-80. Даны вершины треугольника ABC. Требуется найти:
а) длину стороны AB; **б)** уравнение стороны AB;
в) уравнение медианы BE, проведённой из вершины B;
г) уравнение высоты CD, проведённой из вершины C;
д) длину h высоты CD; **е)** площадь S треугольника ABC. Сделать чертёж.

71. $A(4,1), B(0,-2), C(-5,10)$. **72.** $A(-7,3), B(5,-2), C(8,2)$
73. $A(5,-1), B(1,-4), C(-4,8)$ **74.** $A(6,0), B(2,-3), C(-3,9)$
75. $A(-9,2), B(3,-3), C(6,1)$ **76.** $A(7,-4), B(3,-7), C(-2,5)$
77. $A(-14,6), B(-2,1), C(1,5)$ **78.** $A(-8,4), B(4,-1), C(7,3)$
79. $A(3,-3), B(-1,-6), C(-6,6)$ **80.** $A(-6,5), B(6,0), C(9,4)$

81 – 90. Даны вершины пирамиды $ABCD$. Требуется найти:
а) длины ребер AB и AC; **б)** угол между ребрами AB и AC;
в) площадь грани ABC; **г)** объем пирамиды $ABCD$;
д) уравнение плоскости грани ABC; **е)** длину h высоты DO пирамиды.

81. $A(-1,2,1)$, $B(-2,2,5)$, $C(-3,3,1)$, $D(-1,4,3)$.
82. $A(1,1,2)$, $B(0,1,6)$, $C(-1,2,2)$, $D(1,3,4)$.
83. $A(-2,1,-1)$, $B(-3,1,3)$, $C(-4,2,-1)$, $D(-2,3,1)$.
84. $A(-1,-2,1)$, $B(-2,-2,5)$, $C(-3,-1,1)$, $D(-1,0,3)$.
85. $A(2,-1,1)$, $B(1,-1,5)$, $C(0,0,1)$, $D(2,1,3)$.
86. $A(-1,1,-2)$, $B(-2,1,2)$, $C(-3,2,-2)$, $D(-1,3,0)$.
87. $A(1,2,1)$, $B(0,2,5)$, $C(-1,3,1)$, $D(1,4,3)$.
88. $A(1,3,6)$, $B(2,2,1)$, $C(-1,0,1)$, $D(-4,6,-3)$.
89. $A(2,0,3)$, $B(1,0,7)$, $C(0,1,3)$, $D(2,2,5)$.
90. $A(2,3,2)$, $B(1,3,6)$, $C(0,4,2)$, $D(2,5,4)$.

91–100. Установить, какую невырожденную кривую определяет алгебраическое уравнение второго порядка, построить её.

91. $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$ **92.** $x^2+y^2-4x+6y-3=0$
93. $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$ **94.** $x^2-4x-y-5=0$
95. $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$ **96.** $x^2+y^2-4y+3=0$
97. $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$ **98.** $x+y^2-2y+3=0$
99. $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ **100.** $x^2+y^2-6x+5=0$

101-110. Даны комплексные числа z_1, z_2, z_3. Требуется: **а)** вычислить $z_1 + z_2$, $z_1 - \overline{z_2}$, $z_1 z_2$, $\overline{(z_1/z_2)}$; **б)** представить комплексное число z_3 в тригонометрической форме, вычислить $(z_3)^6$ и результат представить в алгебраической форме.

101. $z_1 = 5 + 10i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = -1 + i$.

102. $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = \sqrt{3} + i$.

103. $z_1 = -8 + 4i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = 1 + i$.

104. $z_1 = 4 - 16i$, $z_2 = 5 - 3i$, $z_3 = -\sqrt{3} + i$.

105. $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = -1 + \sqrt{3}\, i$.

106. $z_1 = 15 + 10i$, $z_2 = 2 - 3i$, $z_3 = -1 - i$.

107. $z_1 = 18 + 12i$, $z_2 = 5 - i$, $z_3 = \sqrt{3} - i$.

108. $z_1 = -5 + i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 1 - i$.

109. $z_1 = 6 - 3i$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = 1 + \sqrt{3}\, i$.

110. $z_1 = 6 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}\, i$.

111-120. Дано алгебраическое уравнение $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$. Требуется найти все корни алгебраического уравнения на множестве комплексных чисел.

111. $z^2 + 2z + 5 = 0$. **112.** $z^3 - 8 = 0$. **113.** $4z^2 - 2z + 1 = 0$.

114. $z^3 + 8 = 0$. **115.** $z^2 - 2z + 2 = 0$. **116.** $z^2 + 4z + 13 = 0$.

117. $z^3 + 9z = 0$. **118.** $z^3 + 1 = 0$. **119.** $z^2 + 6z + 13 = 0$.

120. $z^3 - 1 = 0$.

5.2. Вопросы к экзамену (зачёту).

Раздел. Линейная алгебра.

1. Понятие матрицы. Частные виды матриц (квадратная, треугольная, диагональная, нулевая, единичная). Элементарные преобразования матриц. Понятие эквивалентности и равенства матриц.
2. Действия над матрицами (сложение, вычитание, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу) и их свойства. Линейная комбинация матриц.
3. Определители 2-ого и 3-егопорядка, их вычисление. Основные свойства определителей.
4. Понятие определителя n-ого порядка. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.
5. Понятие системы линейных уравнений (СЛУ). Частные виды СЛУ (квадратная, однородная, неоднородная). Матрица, расширенная матрица, определитель СЛУ.
6. Решение, множество решений СЛУ. Совместность, несовместность, определённость, неопределённость, эквивалентность СЛУ. Элементарные преобразования СЛУ, их основное свойство.
7. Теорема Крамера (о разрешимости СЛУ порядка n). Формулы Крамера для решения СЛУ, условия их применимости.
8. Метод Гаусса решения СЛУ, условия его применимости. Базисные и свободные переменные. Нахождение общего решения СЛУ. Частные решения СЛУ.
9. Понятие обратной матрицы. Вырожденные и невырожденные матрицы. Теорема о существовании обратной матрицы. Основные способы нахождения обратной матрицы.
10. Матричные уравнения и их решение. Матричная форма записи СЛУ. Матричный способ (метод обратной матрицы) решения СЛУ и условия его применимости.
11. Однородные СЛУ, условия существования их ненулевых решений. Свойства частных решений однородных СЛУ.
12. Понятие линейной независимости и зависимости частных решений однородной СЛУ. Фундаментальная система решений (ФСР), её нахождение. Представление общего решения однородной СЛУ через ФСР.
13. Минор k -ого порядка, базисный минор, ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы. Критерий совместности СЛУ (теорема Кронеккера-Капелли).

14. Понятие n-мерного арифметического вектора. Равенство векторов. Действия над векторами (сложение, вычитание, умножение на число, умножение на матрицу). Линейная комбинация векторов.
15. Скалярное произведение арифметических векторов. Длина вектора и угол между векторами. Понятие ортогональности векторов.
16. Система векторов и её линейная комбинация. Понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Теорема о необходимом и достаточном условиях линейной зависимости системы векторов.
17. Понятие векторного пространства R^n,евклидова пространства E^n. Базис, канонический базис, ранг R^n. Разложение вектора в R^n по векторам его базиса, координаты вектора. Теорема о единственности разложения вектора в данном базисе.
18. Понятие ортогональной системы векторов, ортогонального базиса. Нахождение координат вектора в ортогональном базисе.
19. Понятие оператора, линейного оператора. Матрица линейного оператора. Сумма (разность) операторов, произведение оператора на число, произведение оператора на оператор, обратный оператор.
20. Понятие собственного числа и собственного вектора оператора. Характеристическое уравнение. Нахождение собственных чисел и векторов оператора.
21. Понятие квадратичной формы. Матрица квадратичной формы. Вырожденная, невырожденная, каноническая, нормальная квадратичная форма. Закон инерции квадратичных форм.
22. Понятие знакоопределённости квадратичной формы. Главные миноры матрицы квадратичной формы. Критерии знакоопределённости квадратичной формы.

Раздел. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

23. Понятие геометрического вектора. Равенство векторов. Противоположный вектор. Орт вектора. Графические правила сложения, вычитания, умножения вектора на число. Проекция вектора на вектор.
24. Коллинеарность и компланарность векторов. Базис и канонический базис плоскости R^2; базис и канонический базис пространства R^3. Координаты вектора.
25. Понятие декартовой системы координат в R^3. Радиус-вектор, координаты точки. Вычисление длины и направляющих косинусов вектора; координат вектора, заданного двумя точками; расстояния между точками.
26. Преобразования прямоугольных декартовых систем координат на плоскости (параллельный перенос, поворот, зеркальное отражение). Связь

между собой координат произвольной точки в старой и новой системах координат.

27. Скалярное произведение векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения через координаты векторов. Вычисление угла между векторами. Условие ортогональности векторов.
28. Векторное произведение векторов, его геометрический смысл и свойства. Выражение векторного произведения через координаты векторов. Условие коллинеарности векторов.
29. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл и свойства. Выражение смешанного произведения через координаты векторов. Условие компланарности векторов.
30. Понятие линии на плоскости. Общее уравнение линии и его нахождение по известному геометрическому свойству её точек. Окружность и её уравнение.
31. Прямая линия на плоскости и её общее уравнение. Нормальный и направляющий векторы прямой. Нахождение уравнения прямой, проходящей через точку перпендикулярно вектору. Построение прямой.
32. Каноническое уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через две точки; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой в отрезках. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости и его вычисление, условия $\perp$ и $||$ прямых.
33. Понятие поверхности. Общее уравнение поверхности, его нахождение по известному геометрическому свойству её точек. Сфера и её уравнение.
34. Плоскость и её общее уравнение. Нормальный вектор плоскости и его нахождение. Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору. Построение плоскости.
35. Уравнение плоскости, проходящей через три точки; уравнение плоскости в отрезках. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями и его вычисление, условия $\perp$ и $||$ плоскостей.
36. Понятие линии в пространстве и её общее уравнение. Понятие прямой линии в пространстве и её общее уравнение. Направляющий вектор прямой и его нахождение.
37. Каноническое уравнение прямой в пространстве; уравнение прямой, проходящей через две точки; параметрические уравнения прямой. Приведение общего уравнения к каноническому.
38. Угол между двумя прямыми в пространстве, между прямой и плоскостью и их вычисление, условия $\perp$ и $||$ двух прямых, прямой и плоскости. Точка пересечения прямой и плоскости.
39. Кривая 2-ого порядка на плоскости и её общее уравнение. Классификация кривых 2-ого порядка. Приведение уравнения кривых к каноническому виду.

40. Эллипс. Каноническое уравнение эллипса. Построение эллипса. Вершины, полуоси, фокусы, эксцентриситет, общее геометрическое свойство точек эллипса.
41. Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы. Построение гиперболы. Вершины, полуоси, фокусы, эксцентриситет, асимптоты, общее геометрическое свойство точек гиперболы.
42. Парабола. Каноническое уравнение параболы. Построение параболы. Вершина, фокус, эксцентриситет, директриса, общее геометрическое свойство точек параболы.
43. Сфера. Эллипсоид. Канонические уравнения и графики.
44. Гиперболоиды (однополостной и двуполостной). Канонические уравнения и графики.
45. Параболоиды (эллиптический и гиперболический). Канонические уравнения и графики.
46. Цилиндры (эллиптический, гиперболический, параболический), их уравнения и графики.

Раздел. Комплексные числа. Алгебра многочленов.

47. Комплексное число, его изображение на плоскости. Комплексно-сопряжённое число. Модуль и аргумент комплексного числа. Различные формы записи комплексного числа (алгебраическая, тригонометрическая, показательная). Формула Эйлера.
48. Действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение, деление) в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.
49. Возведение комплексного числа в степень. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа.
50. Понятие многочлена, алгебраического уравнения. Основная теорема алгебры и теорема Безу. Разложение многочлена на множители. Нахождение корней квадратного уравнения.

6. Приложения.

6.1. Образец решения контрольных задач типового варианта.

1 – 10. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $(i=1,\ j=2)$

а) непосредственным разложением по $i-ой$ строке;

б) непосредственным разложением по $j-ому$ столбцу;

Решение. а) вычисляем определитель разложением по элементам первой строки: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 2\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 3\cdot A_{14}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 2 + (-2)\cdot 1\cdot(-3) -$$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 4 - 0\cdot 2\cdot(-3) = 2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -(2\cdot(-1)\cdot 4 + 3\cdot 2\cdot 3 + (-2)\cdot 0\cdot(-3) -$$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot(-3)) = -16$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -(2\cdot 1\cdot(-3) + 3\cdot 0\cdot 2 + 0\cdot(-1)\cdot 3 -$$

$$-3\cdot 1\cdot 3 - 0\cdot 0\cdot(-3) - 2\cdot(-1)\cdot 2) = 11$$

Тогда $\Delta = 1\cdot A_{11} + 2\cdot A_{12} + 0\cdot A_{13} + 3\cdot A_{14} = 1\cdot 2 + 2\cdot(-16) + 3\cdot 11 = 3$

б) вычисляем определитель непосредственным разложением по элементам второго столбца: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32} + 2 \cdot A_{42}$.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 \cdot (-3) -$$

$$- (-2) \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot (-3)) = -16$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-3) -$$

$$- 3 \cdot 3 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) \cdot (-3)) = 39$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) -$$

$$- 3 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) = -2$$

Тогда $\Delta = 2 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32} + 2 \cdot A_{42} = 2 \cdot (-16) + 1 \cdot 39 + 2 \cdot (-2) = 3$.

Ответ: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3$.

11-20. Найти матрицу $C = B \cdot A^T + 3A$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1) Транспонируем матрицу A**:** $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Вычисляем произведение матриц $B \cdot A^T$:

$$B \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \\ \hline 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ \hline 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3) Находим матрицу $3A$:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

4) Находим матрицу C : $\quad C = B \cdot A^T + 3A =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 3+3 & 7+(-3) \\ 3+0 & 1+9 & 5+(-3) \\ 1+0 & 3+(-3) & 7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

21 – 30. Дана система уравнений: $\begin{cases} 4x + y - 4z = -6 \\ 2x - 4y + 6z = 12 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$. Требуется:

а) найти решение системы методом Крамера; **б)** записать систему в матричном виде и найти её решение методом обратной матрицы; **в)** найти решение системы методом Гаусса.

Решение.

А) <u>Метод Крамера</u>.

1а) Вычисляем определитель системы и проверяем, что он отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-4) \cdot (-1) + 1 \cdot 6 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 \cdot 2 -$$

$$- (-4) \cdot (-4) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -56 \neq 0 .$$

2а) Так как $\Delta = -56 \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

3а) Вычисляем определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -4 \\ 12 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-6)\cdot(-4)\cdot(-1) + 1\cdot 6\cdot 2 + (-4)\cdot 12\cdot 2 -$$

$$-(-4)\cdot(-4)\cdot 2 - 1\cdot 12\cdot(-1) - (-6)\cdot 6\cdot 2 = -56,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -4 \\ 2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot 12\cdot(-1) + (-6)\cdot 6\cdot 1 + (-4)\cdot 2\cdot 2 -$$

$$-(-4)\cdot 12\cdot 1 - (-6)\cdot 2\cdot(-1) - 4\cdot 6\cdot 2 = -112,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 2 & -4 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-4)\cdot 2 + 1\cdot 12\cdot 1 + (-6)\cdot 2\cdot 2 -$$

$$-(-6)\cdot(-4)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 2 - 4\cdot 12\cdot 2 = -168.$$

4а) Находим решение: $x = \dfrac{-56}{-56} = 1, \quad y = \dfrac{-112}{-56} = 2, \quad z = \dfrac{-168}{-56} = 3.$

5а) Выполняем проверку: $\begin{cases} 4\cdot 1 + 2 - 4\cdot 3 = -6 \\ 2\cdot 1 - 4\cdot 2 + 6\cdot 3 = 12 \\ 1 + 2\cdot 2 - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 = -6 \\ 12 = 12 \\ 2 = 2 \end{cases}.$

Ответ: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3.$

Б) <u>Метод обратной матрицы</u>.

1б) Записываем систему уравнений в матричном виде:

$$A\cdot X = B \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2б) Вычисляем определитель системы и проверяем, что он отличен от нуля:

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=4\cdot(-4)\cdot(-1)+1\cdot 6\cdot 1+(-4)\cdot 2\cdot 2-$$

$$-(-4)\cdot(-4)\cdot 1-1\cdot 2\cdot(-1)-4\cdot 6\cdot 2=-56\neq 0$$

3б) Так как $|A|=-56\neq 0$, то матрица системы A имеет обратную матрицу A^{-1} и единственное решение системы определяется формулой:

$$X=A^{-1}\cdot B \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 6\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-6\\ 12\\ 2\end{pmatrix}$$

4б) Находим обратную матрицу A^{-1} (методом присоединённой матрицы):

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}^{T}.$$

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}-4 & 6\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-8 \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & -1\end{vmatrix}=8 \qquad A_{13}=+\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7 \qquad A_{22}=+\begin{vmatrix}4 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}1 & -4\\ -4 & 6\end{vmatrix}=-10 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}4 & -4\\ 2 & 6\end{vmatrix}=-32 \qquad A_{33}=+\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-18$$

Тогда $A^{-1}=\dfrac{1}{-56}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 8 & 8\\ -7 & 0 & -7\\ -10 & -32 & -18\end{pmatrix}^{T}=\dfrac{1}{-56}\cdot\begin{pmatrix}-8 & -7 & -10\\ 8 & 0 & -32\\ 8 & -7 & -18\end{pmatrix}.$

5б) Находим решение: $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\dfrac{1}{-56}\cdot\begin{pmatrix}-8 & -7 & -10\\ 8 & 0 & -32\\ 8 & -7 & -18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\ 12\\ 2\end{pmatrix}=$

$$=\frac{1}{-56}\cdot\begin{pmatrix}(-8)\cdot(-6)+(-7)\cdot 12+(-10)\cdot 2\\ 8\cdot(-6)+0\cdot 12+(-32)\cdot 2\\ 8\cdot(-6)+(-7)\cdot 12+(-18)\cdot 2\end{pmatrix}=\frac{1}{-56}\cdot\begin{pmatrix}-56\\ -112\\ -168\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

6б) Выполняем проверку: $\begin{cases} 4\cdot 1+2-4\cdot 3=-6 \\ 2\cdot 1-4\cdot 2+6\cdot 3=12 \\ 1+2\cdot 2-3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6=-6 \\ 12=12 \\ 2=2 \end{cases}.$

Ответ: $x=1, \quad y=2, \quad z=3$.

В) <u>Метод Гаусса.</u>

1в) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A}=(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

2в) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

В результате прямого хода матрица системы A должна быть преобразована с помощью элементарных преобразований строк к матрице A' треугольного или трапециевидного вида с элементами $a'_{ii} \neq 0$. Система уравнений, матрица которой A' является треугольной с элементами $a'_{ii} \neq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, имеет единственное решение, а система уравнений, матрица которой A' является трапециевидной с элементами $a'_{ii} \neq 0$ $(i=1,2,\ldots,k, \quad где\ k<n)$, имеет бесконечно много решений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \textit{из второй строки, умноженной на } 2, \textit{ вычитаем первую} \\ \textit{из третьей строки, умноженной на } 4, \textit{ вычитаем первую} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -9 & 16 & 30 \\ 0 & 7 & 0 & 14 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \textit{к третьей строке, умноженной на } 9, \\ \textit{прибавляем вторую строку, умноженную на } 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & -9 & 16 & 30 \\ 0 & 0 & -112 & -336 \end{array}\right).$$ В результате элементарных преобразований матрица A системы преобразована к специальному виду A'. Система уравнений, матрица которой A', является треугольной с ненулевыми диагональными элементами $a'_{ii} \neq 0$, имеет всегда единственное решение, которое находим, выполняя обратный ход.

Если при выполнение преобразования расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$ в преобразованной матрице $\widetilde{A}'$ появляется строка $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & | \, b' \end{pmatrix}$, где $b' \neq 0$, то это говорит о несовместности исходной системы уравнений.

3в) Выполняем обратный ход метода Гаусса.

Записываем систему уравнений, соответствующую последней расширенной матрице прямого хода: $\begin{cases} 4x + y - 4z = -6 \\ -9y + 16z = 30 \\ -112z = -336 \end{cases}$ и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находим значения всех неизвестных: $\begin{cases} z = 3 \\ -9y = 30 - 16z = 30 - 16 \cdot (3) = -18 \Rightarrow y = 2 \\ 4x = -6 - y + 4z = -6 - 2 + 4 \cdot 3 = 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$.

4в) Выполняем проверку: $\begin{cases} 4 \cdot 1 + 2 - 4 \cdot 3 = -6 \\ 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 12 \\ 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 = -6 \\ 12 = 12 \\ 2 = 2 \end{cases}$.

Ответ: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$.

31-40. Найти общее решение для каждой из данных систем методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$.

Решение.

1а) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array}\right).$$

2а) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{из второй строки вычитаем первую, умноженную на } 3 \\ \text{из третьей строки вычитаем первую, умноженную на } 4 \\ \text{из четвёртой строки вычитаем первую, умноженную на } 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{из третьей строки вычитаем вторую, умноженную на } 3 \\ \text{к четвёртой строке прибавляем вторую, умноженную на } 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow (\text{вычёркиваем третью и четвёртую строки}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Матрица системы приведена к трапециевидному виду с ненулевыми диагональными элементами. Соответствующая такой матрице система уравнений имеет бесконечно много решений, которые находим, выполняя обратный ход, и записываем в виде общего решения. Для записи общего решения указываем её базисные и свободные неизвестные. Базисный минор матрицы системы образуют столбцы коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Поэтому выбираем в качестве базисных – неизвестные x_1 и x_2, тогда свободными будут неизвестные x_3 и x_4.

3а) Выполняем обратный ход метода Гаусса.

Записываем систему уравнений, соответствующую последней расширенной матрице прямого хода: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ \quad - x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$. Свободным неизвестным придаём разные, произвольные постоянные значения: $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находим значения всех базисных неизвестных:

$$\begin{cases} -x_2 = 6x_3 - 5x_4 = 6C_1 - 5C_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -6C_1 + 5C_2 \\ x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2 \cdot (-6C_1 + 5C_2) - 4C_1 + 3C_2 = 8C_1 - 7C_2 \end{cases}.$$

Тогда общее решение системы запишется в виде: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (8C_1 - 7C_2, -6C_1 + 5C_2, C_1, C_2)$.

4а) Выполняем проверку:

$$\begin{cases} 1 \cdot (8C_1 - 7C_2) + 2 \cdot (-6C_1 + 5C_2) + 4C_1 - 3C_2 = 0 \\ 3 \cdot (8C_1 - 7C_2) + 5 \cdot (-6C_1 + 5C_2) + 6C_1 - 4C_2 = 0 \\ 4 \cdot (8C_1 - 7C_2) + 5 \cdot (-6C_1 + 5C_2) - 2C_1 + 3C_2 = 0 \\ 3 \cdot (8C_1 - 7C_2) + 8 \cdot (-6C_1 + 5C_2) + 24C_1 - 19C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (8C_1 - 7C_2, -6C_1 + 5C_2, C_1, C_2)$.

б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$.

Решение.

1а) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right).$$

2а) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{из второй строки вычитаем первую, умноженную на } 2 \\ \text{из третьей строки вычитаем первую} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

В результате прямого хода матрица системы A должна быть преобразована с помощью элементарных преобразований строк к матрице A' треугольного или трапециевидного вида с элементами $a'_{ii} \neq 0$.

Если, при выполнении преобразования расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$, в преобразованной матрице $\widetilde{A}'$ появляется строка $(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad | \, b')$, где $b' \neq 0$, то это говорит о несовместности исходной системы уравнений.

Для выполнения условия $a'_{ii} \neq 0$ может потребоваться перестановка местами столбцов матрицы системы. Если при выполнении преобразований прямого хода в матрице системы переставлялись местами столбцы коэффициентов при неизвестных, то в дальнейшем, при записи системы уравнений, соответствующей последней расширенной матрице прямого хода, это следует учесть.

$$\Leftrightarrow (\text{переставляем местами второй и третий столбцы}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -22 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{из третьей строки вычитаем вторую, умноженную на } 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow (\text{вычёркиваем третью строку}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -11 & 0 \end{array}\right).$$

Матрица системы приведена к трапециевидному виду с ненулевыми диагональными элементами. Соответствующая такой матрице система уравнений имеет бесконечно много решений, которые находим, выполняя обратный ход, и записываем в виде общего решения. Для записи общего решения указываем её базисные и свободные неизвестные. Базисный минор матрицы системы, с учётом перестановки местами столбцов, образуют первый и второй столбцы коэффициентов при неизвестных x_1 и x_3: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$. Поэтому выбираем в качестве базисных – неизвестные x_1 и x_3, тогда свободными будут неизвестные x_2 и x_4.

3б) Выполняем обратный ход метода Гаусса.

Записываем систему уравнений, соответствующую последней расширенной матрице прямого хода: $\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & +7x_4 & =1 \\ & & -8x_3 & -11x_4 & =0 \end{cases}$. Свободным неизвестным придаём разные, произвольные постоянные значения: $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$, и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находим значения всех базисных неизвестных:

$$\begin{cases} -8x_3 = 11x_4 = 11C_2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\dfrac{11}{8}C_2 \\ 2x_1 = 1 + 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 1 + 3C_1 - 5\cdot\left(-\dfrac{11}{8}C_2\right) - 7C_2 = 1 + 3C_1 - \dfrac{1}{8}C_2 \end{cases}.$$

Тогда общее решение системы запишется в виде:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3C_1}{2} - \frac{C_2}{16},\ C_1,\ -\frac{11C_2}{8},\ C_2\right)$$

4б) Выполняем проверку:

$$\begin{cases} 2\cdot\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3C_1}{2} - \dfrac{C_2}{16}\right) - 3C_1 + 5\cdot\left(-\dfrac{11C_2}{8}\right) + 7C_2 = 1 \\ 4\cdot\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3C_1}{2} - \dfrac{C_2}{16}\right) - 6C_1 + 2\cdot\left(-\dfrac{11C_2}{8}\right) + 3C_2 = 2 \\ 2\cdot\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3C_1}{2} - \dfrac{C_2}{16}\right) - 3C_1 - 11\cdot\left(-\dfrac{11C_2}{8}\right) - 15C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3C_1}{2} - \dfrac{C_2}{16},\ C_1,\ -\dfrac{11C_2}{8},\ C_2\right)$.

в) $\begin{cases} 7x_1 & -4x_2 & +x_3 & +3x_4 & =5 \\ 3x_1 & -5x_2 & +2x_3 & +4x_4 & =2 \\ 5x_1 & +7x_2 & -4x_3 & -6x_4 & =3 \end{cases}$**.**

Решение.

1в) Записываем расширенную матрицу системы:

$$\widetilde{A}=(A\mid B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right).$$

2в) Выполняем прямой ход метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} \textit{из второй строки, умноженной на } 7, \textit{ вычитаем первую, умноженную на } 3 \\ \textit{из третьей строки, умноженной на } 7, \textit{ вычитаем первую, умноженную на } 5 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 69 & -33 & -57 & -4 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\textit{к третьей строке прибавляем вторую, умноженную на } 3\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right).$$

При выполнении преобразования расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$, в преобразованной матрице $\widetilde{A}'$ появилась строка $(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad | -7)$, соответствующая уравнению $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=-7$, которому не удовлетворяет ни один набор значений неизвестных (x_1, x_2, x_3, x_4), что говорит о несовместности исходной системы уравнений.

Ответ: Система несовместна.

41 – 50. Требуется:

а) найти собственные числа и векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Множество собственных чисел матрицы совпадает с множеством корней характеристического уравнения матрицы A *:* $|A - \lambda \cdot E| = 0$*, а множество собственных векторов, отвечающих собственному числу* λ_i*, совпадает с множеством ненулевых решений матричного уравнения:* $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot X = O$*, определяемым методом Гаусса.*

Решение:

1) Составляем характеристическое уравнение матрицы A:

$$|A - \lambda \cdot E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Записываем его в виде алгебраического уравнения и находим действительные корни (среди них могут быть и кратные):

$$(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)^2 - (2-\lambda)\cdot(-1)\cdot(-1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 \cdot (\lambda - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = 4.$$

Таким образом, собственными числами матрицы A являются: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 4$.

2) Находим собственные векторы матрицы A, отвечающие различным собственным числам $\lambda_{1,2}$ и λ_3.

2.1) Составляем матричное уравнение для нахождения собственных векторов $\bar{x}^{(\lambda_{1,2})}$, отвечающих собственному числу $\lambda_{1,2} = 2$: $(A - 2\cdot E)\cdot X = O$

или

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 & -1 \\ 0 & 3-2 & -1 \\ 0 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

записываем его в виде системы линейных уравнений: $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ и решаем методом Гаусса. Полученная система, очевидно, эквивалентна системе $\{x_2 - x_3 = 0$, имеющей специальный (трапециевидный) вид. Такая система имеет бесконечно много решений, которые записывают в виде общего решения. Для записи общего решения этой системы указываем её базисные и свободные неизвестные. Базисными являются неизвестные, столбцы коэффициентов системы при которых образуют базисный минор матрицы этой системы. Такой минор образует, например, столбец коэффициентов при неизвестной x_2: $\left|\,1\,\right| = 1 \neq 0$. Поэтому выбираем в качестве базисной – неизвестную x_2, тогда свободными будут неизвестные x_1 и x_3. Свободным неизвестным придаём разные, произвольные постоянные значения: $x_1 = C_1$, $x_3 = C_2$, где $C_1, C_2 \neq 0$, одновременно, и выражаем через них значение базисной неизвестной из уравнения системы: $x_2 = x_3 = C_2$. Тогда общее решение системы, задающее множество всех собственных векторов $\bar{x}^{(\lambda_{1,2})}$, отвечающих собственному числу $\lambda_{1,2} = 2$ будет иметь вид: $\bar{x}^{(\lambda_{1,2})} = (C_1, C_2, C_2)$.

2.2) Составляем матричное уравнение для нахождения собственных векторов $\bar{x}^{(\lambda_3)}$, отвечающих собственному числу $\lambda_3 = 4$: $\quad (A - 4 \cdot E) \cdot X = O$

или

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 1 & -1 \\ 0 & 3-4 & -1 \\ 0 & -1 & 3-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

записываем его в виде системы линейных уравнений: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad -x_2 - x_3 = 0 \\ \quad -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ и решаем методом Гаусса. Полученная система, очевидно, эквивалентна системе $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, имеющей специальный (трапециевидный) вид.

Система имеет бесконечно много решений. Для записи её общего решения указываем базисные и свободные неизвестные. Базисный минор матрицы системы образуют столбцы коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Поэтому выбираем в качестве базисных – неизвестные x_1 и x_2, тогда свободной будет неизвестная x_3. Свободной неизвестной придаём произвольное постоянное значение: $x_3 = C$, где $C \neq 0$ и выражаем через неё значения базисных неизвестных x_1 и x_2 из уравнений системы специального (трапециевидного) вида, начиная с последнего уравнения: $\begin{cases} -x_2 = x_3 \Rightarrow x_2 = -C \\ -2x_1 = -x_2 + x_3 \Rightarrow -2x_1 = 2C \Rightarrow x_1 = -C \end{cases}$. Тогда общее решение системы, задающее множество всех собственных векторов $\overline{x}^{(\lambda_3)}$, отвечающих собственному числу $\lambda_3 = 4$, будет иметь вид: $\overline{x}^{(\lambda_3)} = (-C, -C, C)$, $C \neq 0$.

Ответ: $\lambda_{1,2} = 2$, $\overline{x}^{(\lambda_{1,2})} = (C_1, C_2, C_2)$, $C_1, C_2 \neq 0$;

$\lambda_3 = 4$, $\overline{x}^{(\lambda_3)} = (-C, -C, C)$, $C \neq 0$.

б) исследовать квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ на знакоопределённость (по критерию Сильвестра)**.**

Решение.

1) Записываем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Проверяем является ли матрица A невырожденной. Для этого вычисляем её определитель $|A|$ и проверяем, равен ли он нулю: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$.

Так как $|A| = 1 \neq 0$, то матрица A - невырожденная и, следовательно, для исследования квадратичной формы на знакоопределённость можно применить критерий Сильвестра.

3) Вычисляем угловые миноры матрицы A и делаем вывод о знакоопределённости квадратичной формы: $\Delta_1 = |1| = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_3 = |A| = 1$.

Так как выполняется условие: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, то по критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена.
Ответ: Квадратичная форма положительно определена.

51 – 60. Даны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$: $\overline{a} = (0, 1, 2)$; $\overline{b} = (1, 0, 1)$; $\overline{c} = (-1, 2, 4)$; $\overline{d} = (-2, 4, 7)$. Показать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис R^3 и найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.
Решение.
1) Покажем, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис R^3**.** Для этого составим определитель, столбцами которого являются координаты этих векторов и покажем, что он отличен от нуля.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 0 \cdot 2 \cdot 1 = -1.$$

Так как $\Delta = -1 \neq 0$, то векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис R^3 и, следовательно, вектор $\overline{d} \in R^3$ единственным образом можно разложить по векторам этого базиса.
2) Записываем разложение вектора $\overline{d}$ по векторам базиса $B_{R^3} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$:

$$\overline{d} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} + \gamma \cdot \overline{c} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты разложения α, β, γ называют координатами вектора $\overline{d}$ в базисе B_{R^3} и записывают: $\overline{d}_{B_{R^3}} = (\alpha, \beta, \gamma)$**.**
3) Записываем векторное уравнение относительно α, β, γ в виде эквивалентной ему системы линейных уравнений: $\begin{cases} \beta - \gamma = -2 \\ \alpha + 2\gamma = 4 \\ 2\alpha + \beta + 4\gamma = 7 \end{cases}$, и находим единственное решение системы, например, по формулам Крамера:

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta},\ \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta},\ \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta},\quad \text{где}$$

$$\Delta = -1 \neq 0,\ \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2,\ \Delta_\beta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -1.$$

Таким образом: $\alpha = \frac{-2}{-1} = 2$, $\beta = \frac{1}{-1} = -1$, $\gamma = \frac{-1}{-1} = 1$. Следовательно, разложение имеет вид: $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$ или кратко: $\bar{d}_{B_{R^3}} = (2, -1, 1)$.

Ответ: $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c} = (2,-1,1)_{B_{R^3}}$.

61 – 70. Даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$: $\bar{a} = (0, 1, 2)$, $\bar{b} = (1, 0, 1)$, $\bar{c} = (-1, 2, 4)$. Требуется: **а)** найти векторы $\bar{m} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$ и $\bar{n} = 3\bar{b} - 2\bar{c}$ **; б)** вычислить скалярное произведение $\bar{m} \cdot \bar{n}$; **в)** найти проекцию вектора $\bar{m}$ на направление вектора $\bar{n}$; **г)** найти векторное произведение $\bar{m} \times \bar{n}$ и его модуль $|\bar{m} \times \bar{n}|$.

Решение.

а) Находим векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$:

$$\bar{m} = 2\bar{a} + 3\bar{b} = 2 \cdot (0, 1, 2) + 3 \cdot (1, 0, 1) = (0, 2, 4) + (3, 0, 3) =$$
$$= (0 + 3,\ 2 + 0,\ 4 + 3) = (3, 2, 7);$$

$$\bar{n} = 3\bar{b} - 2\bar{c} = 3 \cdot (1, 0, 1) - 2 \cdot (-1, 2, 4) = (3, 0, 3) - (-2, 4, 8) =$$
$$= (3 - (-2), 0 - 4, 3 - 8) = (5, -4, -5).$$

б) Вычисляем скалярное произведение векторов $\bar{m} \cdot \bar{n}$:

$$\bar{m} \cdot \bar{n} = (3, 2, 7) \cdot (5, -4, -5) = 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + 7 \cdot (-5) = -28.$$

в) Находим проекцию вектора $\bar{m}$ на направление вектора $\bar{n}$:

$$np_{\bar{n}}\bar{m} = \frac{\bar{m} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{(-28)}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-5)^2}} = -\frac{28}{\sqrt{66}}.$$

г) Находим векторное произведение векторов $\bar{m} \times \bar{n}$:

$$\bar{m} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} =$$

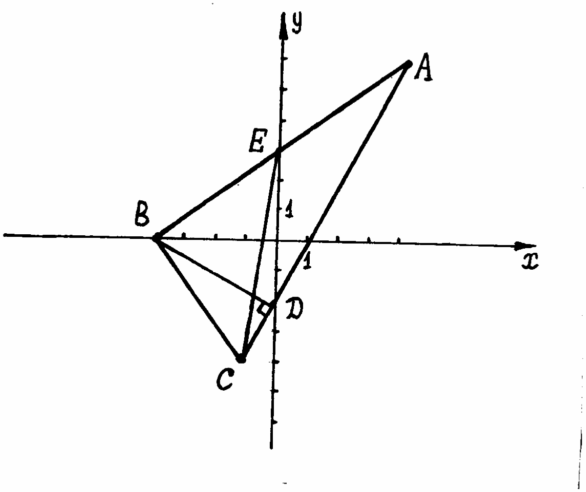
$$= \bar{i}\,(-10 - (-28)) - \bar{j}\,(-15 - 35) + \bar{k}\,(-12 - 10) = 18\bar{i} + 50\bar{j} - 22\bar{k} = (18,50,-22)$$

и вычисляем его модуль: $|\overline{m}\times\overline{n}| = \sqrt{18^2+50^2+(-22)^2} = \sqrt{3308} = 2\sqrt{827}$.

Ответ: а) $\overline{m} = 2\overline{a} + 3\overline{b} = (3,\ 2,\ 7)$; $\overline{n} = 3\overline{b} - 2\overline{c} = (5,\ -4,\ -5)$; **б)** $\overline{m}\cdot\overline{n} = -28$;
в) $пр_{\overline{n}}\overline{m} = -28/\sqrt{66}$; **г)** $\overline{m}\times\overline{n} = (18{,}50{,}-22)$, $|\overline{m}\times\overline{n}| = 2\sqrt{827}$.

71-80. Даны вершины треугольника ABC: $A(4,\ 6)$, $B(-4,\ 0)$, $C(-1,\ -4)$
Требуется найти:
а) длину стороны AC ; **б)** уравнение стороны AC ;
в) уравнение медианы CE , проведённой из вершины C ;
г) уравнение высоты BD , проведённой из вершины B ;
д) длину h высоты BD ; **е)** площадь S треугольника ABC **.** Сделать чертёж.

Решение. Сделаем чертёж:



а) Длину стороны AC находим как длину вектора $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} = (x_C - x_A,\ y_C - y_A) = (-1-4,\ -4-6) = (-5,\ -10),$$

$$AC = |\overline{AC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = 5\sqrt{5}\ .$$

б) Уравнение стороны AC находим как уравнение прямой, проходящей через точки $A(4,\ 6)$ и $C(-1,\ -4)$, и записываем его в виде общего уравнения прямой:

$$AC: \frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow \frac{x-4}{-5} = \frac{y-6}{-10} \Rightarrow (-10)\cdot(x-4) = (-5)\cdot(y-6)$$

$$\Rightarrow \underline{2x - y - 2 = 0}.$$

в) Уравнение медианы CE находим как уравнение прямой, проходящей через точки $C(-1, -4)$ и $E(x_E, y_E)$, и записываем его в виде общего уравнения прямой. Неизвестные координаты точки E находим как координаты точки, делящей сторону AB пополам:

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + (-4)}{2} = 0; \quad y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 0}{2} = 3.$$

Тогда: $CE: \dfrac{x - x_C}{x_E - x_C} = \dfrac{y - y_C}{y_E - y_C} \Rightarrow \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+4}{7} \Rightarrow 7\cdot(x+1) = y + 4 \Rightarrow$

$$\underline{7x - y + 3 = 0}.$$

г) Уравнение высоты BD находим как уравнение прямой, проходящей через точку $B(-4, 0)$ перпендикулярно вектору $\overline{AC} = (-5, -10)$, который принимаем за нормальный вектор прямой BD. Тогда $BD: (-5)\cdot(x+4) + (-10)\cdot(y-0) = 0 \Rightarrow \underline{x + 2y + 4 = 0}$

д) Длину h высоты BD находим как расстояние от точки $B(-4, 0)$ до прямой AC, заданной общим уравнением $2x - y - 2 = 0$:

$$h = \rho(B, AC) = \frac{|2x_B - y_B - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2\cdot(-4) - 0 - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}.$$

е) Площадь треугольника ABC находим по формуле: $S = \dfrac{h \cdot AC}{2}$. Откуда

$$S = \frac{10 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot 2} = 25.$$

Ответ: а) $AC = 5\sqrt{5}$ **;** **б)** $AC: 2x - y - 2 = 0$ **;** **в)** $CE: 7x - y + 3 = 0$ **;**

г) $BD: x + 2y + 4 = 0$ **;** **д)** $h = 10/\sqrt{5}$ **;** **е)** $S = 25$ **.**

81 – 90. Даны вершины пирамиды $ABCD$. Требуется найти**:**

а) длины ребер AB **и** AD; **б)** угол между ребрами AB **и** AD;

в) площадь грани ABD; **г)** объем пирамиды $ABCD$;

д) уравнение плоскости грани ABD; **е)** длину h высоты CE пирамиды.

Решение.

а) Длины рёбер AB и AD находим как длины векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A,\, y_B - y_A,\, z_B - z_A) = (-1-2,\, -3-(-4),\, 4-5) = (-3,\, 1,\, -1);$$

$$\overline{AD} = (x_D - x_A,\, y_D - y_A,\, z_D - z_A) = (1-2,\, -2-(-4),\, 2-5) = (-1,\, 2,\, -3);$$

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11};$$

$$AD = |\overline{AD}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}.$$

б) Угол φ между рёбрами AB и AD находим как угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ по формуле: $\cos\varphi = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}|}$. Учитывая, что:

$\overline{AB}\cdot\overline{AD} = (-3,\, 1,\, -1)\cdot(-1,\, 2,\, -3) = (-3)\cdot(-1) + 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) = 8$,

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{11}$, $\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{14}$ получим $\cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$. Откуда $\varphi = \arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{154}}\right)$

в) Площадь S грани ABD находим, используя геометрический смысл векторного произведения векторов, по формуле $S = 0.5\,|\overline{AB}\times\overline{AD}|$. Учитывая, что:

$$\overline{AB}\times\overline{AD} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= -\bar{i} - 8\bar{j} - 5\bar{k} = (-1,\, -8,\, -5)$, $|\overline{AB}\times\overline{AD}| = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + (-5)^2}$, получим $S = \dfrac{\sqrt{90}}{2} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

г) Объём V пирамиды $ABCD$ находим, используя геометрический смысл смешанного произведения векторов, по формуле $V = \dfrac{1}{6}\cdot|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}|$.

Учитывая, что:

$$\overline{AC} = (x_C - x_A,\, y_C - y_A,\, z_C - z_A) = (5-2,\, 5-(-4),\, -1-5) = (3,\, 9,\, -6),$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-3)\cdot\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 45,$$

получим $V = 45/6 = 7.5$.

д) Уравнение плоскости грани ABD находим как уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,-4,5)$, $B(-1,-3,4)$ и $D(1,-2,2)$, и записываем его в виде общего уравнения плоскости:

$$ABD:\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-5 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}-(y+4)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}+(z-5)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\underline{x+8y+5z+5=0}$$

е) Длину h высоты CE пирамиды $ABCD$ находим как расстояние от точки $C(5,5,-1)$ до плоскости ABD, заданной общим уравнением $x+8y+5z+5=0$:

$$h=\rho(C,ABD)=\frac{|x_C+8y_C+5z_C+5|}{\sqrt{1^2+8^2+5^2}}=\frac{|5+8\cdot5+5\cdot(-1)+5|}{\sqrt{90}}=\frac{15}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: а) $AB=\sqrt{11}$**,** $AD=\sqrt{14}$ **; б)** $\varphi=\arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{154}}\right)$**;** **в)** $S=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$**;**

г) $V=7.5$ **;** **д)** $x+8y+5z+5=0$**;** **е)** $h=15\big/\sqrt{10}$**.**

91–100. Установить, какую невырожденную кривую определяет алгебраическое уравнение второго порядка, построить её:

а) $x^2-4y^2+8x-24y-24=0$; **б)** $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$;

в) $2x^2-8x-y+5=0$.

Решение:

а) Так как $B=0$, $AC-B^2=1\cdot(-4)-0^2=-4<0$, то уравнение определяет гиперболу с центром в точке (x_0,y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm1$. Вид кривой и расположение её на плоскости известны. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения $x^2-4y^2+8x-24y-24=0$, преобразуем его следующим образом:

$$(x^2+8x)-4\cdot(y^2+6y)-24=0$$

$$(x^2+8x+16-16)-4\cdot(y^2+6y+9-9)-24=0$$

$$(x^2+8x+16)-4\cdot(y^2+6y+9)=4 \quad \Rightarrow \quad (x+4)^2-4\cdot(y+3)^2=4$$

$$\frac{(x-(-4))^2}{2^2}-\frac{(y-(-3))^2}{1^2}=1.$$

Полученное уравнение определяет гиперболу с центром в точке $(-4,-3)$ и осями симметрии параллельными координатным осям. Для построения гиперболы в системе координат Oxy: **1)** отмечаем центр гиперболы $(-4,-3)$; **2)** проводим через центр $(-4,-3)$ пунктиром оси симметрии гиперболы; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник гиперболы с центром $(-4,-3)$ и сторонами $2a=4$ и $2b=1$ параллельными осям симметрии; **4)** проводим через противоположные вершины основного прямоугольника пунктиром прямые, являющиеся асимптотами гиперболы, к которым неограниченно близко при бесконечном удалении от начала координат приближаются ветви гиперболы, не пересекая их; **5)** изображаем сплошной линией ветви гиперболы (рис. 1).

Ответ: Гипербола с центром в точке $(-4,-3)$ (см. рис.1)..

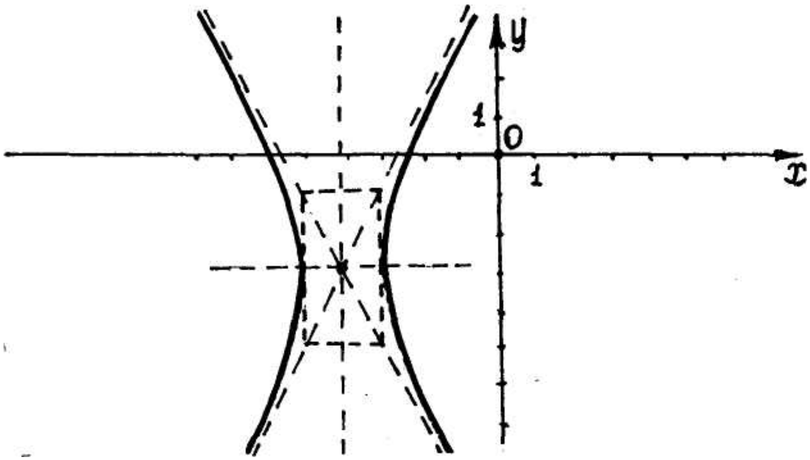


Рис.1

б) Так как $B=0$, $AC-B^2=4\cdot9-0^2=36>0$, $A\neq C$, то уравнение определяет эллипс с центром в точке (x_0, y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. Вид кривой и расположение её на плоскости известны. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$, преобразуем его следующим образом:

$$4\cdot(x^2-2x)+9\cdot(y^2-4y)+4=0$$

$$4\cdot(x^2-2x+1-1)+9\cdot(y^2-4y+4-4)+4=0$$

$$4\cdot(x^2-2x+1)+9\cdot(y^2-4y+4)=36 \quad\Rightarrow\quad 4\cdot(x-1)^2+9\cdot(y-2)^2=36$$

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2}=1.$$

Полученное уравнение определяет эллипс с центром в точке $(1,\,2)$ и осями симметрии параллельными осям координат. Для построения эллипса в системе координат Oxy: **1)** отмечаем центр эллипса $(1,\,2)$; **2)** проводим через центр $(1,\,2)$ пунктиром оси симметрии эллипса; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник эллипса с центром $(1,\,2)$ и сторонами $2a=9$ и $2b=4$ параллельными осям симметрии; **4)** изображаем сплошной линией эллипс, вписывая его в основной прямоугольник так, чтобы эллипс касался его сторон в точках пересечения прямоугольника с осями симметрии (рис.2).

Ответ: Эллипс с центром в точке $(1,\,2)$ (см. рис.2).

в) Так как $B=0$, $AC-B^2=2\cdot 0-0^2=0$, $A\neq 0$, то уравнение определяет параболу с вершиной в точке (x_0, y_0) и осью симметрии, параллельной координатной оси Oy: $(x-x_0)^2=2p\cdot(y-y_0)$. Вид кривой и расположение её на плоскости известны. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения $2x^2-8x-y+5=0$, преобразуем его следующим образом:

$$2\cdot(x^2-4x)-y+5=0 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot(x^2-4x+4-4)-y+5=0$$

$$2\cdot(x^2-4x+4)=1\cdot(y+3) \quad\Rightarrow\quad (x-2)^2=0.5\cdot(y-(-3))$$

Полученное уравнение определяет параболу с вершиной в точке $(2,-3)$ и осью симметрии параллельной оси Oy. Для построения параболы в системе координат Oxy: **1)** отмечаем вершину параболы $(2,-3)$; **2)** проводим через вершину $(2,-3)$ пунктиром ось симметрии параболы; **3)** изображаем сплошной линией параболу, направляя её ветвь, с учётом того, что параметр параболы $p = 1/4 > 0$, в положительную сторону оси Oy (рис.3).

Ответ: Парабола с вершиной в точке $(2,-3)$ (см. рис.3).

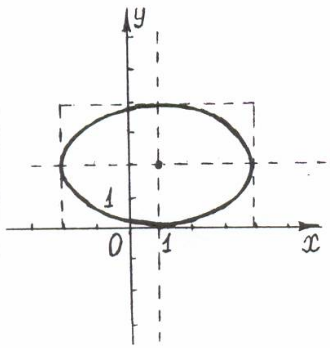


Рис.2.

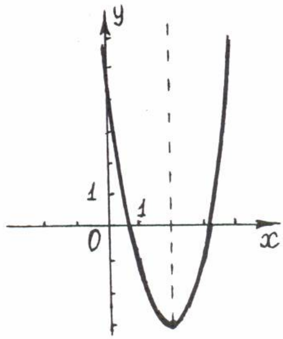


Рис.3.

101-110. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 4i$, $z_3 = -1 - \sqrt{3}\,i$.

Требуется: **а)** вычислить $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2}$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ **; б)** представить комплексное число z_3 в тригонометрической форме, вычислить $(z_3)^4$ и результат представить в алгебраической форме.

Решение.

1а) Вычисляем $z_1 + z_2$: $\quad z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 4i) = 2 + 3i + 5 - 4i = 7 - i$.

2а) Вычисляем $\overline{z_1 \cdot z_2}$.

Сначала находим $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (5 - 4i) = 10 - 8i + 15i - 12i^2 =$ (учитываем, что $i^2 = -1$) $= 22 + 7i$. Тогда $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(22 + 7i)} = 22 - 7i$

3а) Вычисляем $\dfrac{z_1}{z_2}$ **:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{(2 + 3i) \cdot \overline{(5 - 4i)}}{(5 - 4i) \cdot \overline{(5 - 4i)}} = \dfrac{(2 + 3i) \cdot (5 + 4i)}{(5 - 4i) \cdot (5 + 4i)} =$

$= \dfrac{10 + 8i + 15i + 12i^2}{25 + 20i - 20i - 16i^2} =$ (учитываем, что $i^2 = -1$) $= \dfrac{-2 + 23i}{41} = -\dfrac{2}{41} + \dfrac{23}{41}i$.

1б) Представляем комплексное число $z_3 = -1 - \sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме $z_3 = r_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$, где $r_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$\varphi_3 = \pi + arctg\left(\dfrac{y_3}{x_3}\right) = \pi + arctg\sqrt{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$ (так как комплексное число, изображается точкой $(-1,-\sqrt{3})$, лежащей в третьем квадранте координатной плоскости). Тогда $z_3 = 2\cdot\left(\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)\right)$.

2б) Вычисляем $\left(z_3\right)^4$ по формуле Муавра:

$$\left(z_3\right)^4 = r_3^4\cdot(\cos(4\varphi_3) + i\sin(4\varphi_3)) = 2^4\cdot\left(\cos\left(4\cdot\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 16\cdot\left(\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right) = 16\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2\cdot 2\pi\right)\right) =$$

$= 16\cdot\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$. Полученный результат представляем в алгебраической форме: $\left(z_3\right)^4 = (-1-\sqrt{3})^4 = 16\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = -8\sqrt{3} - 8i$.

Ответ:

а) $z_1 + z_2 = 7 - i$, $\overline{z_1\cdot z_2} = 22 - 7i$, $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{2}{41} + \dfrac{23}{41}i$ **; б)** $\left(z_3\right)^4 = -8\sqrt{3} - 8i$.

111-120. Дано алгебраическое уравнение $z^4 + 27z = 0$. Требуется найти все корни алгебраического уравнения на множестве комплексных чисел.

Решение.

1) Для нахождения корней алгебраического уравнения $z^4 + 27z = 0$, раскладываем его левую часть на множители:

$$z^4 + 27z = z\cdot(z^3 + 27) = z\cdot(z+3)\cdot(z^2 - 3z + 9).$$

2) Находим корни уравнения на множестве комплексных чисел, приравнивая каждый из множителей нулю (число корней, с учётом кратности, должно равняться порядку уравнения):

1) $z = 0$ $\Rightarrow$ $z_1 = 0$.

2) $z + 3 = 0$ $\Rightarrow$ $z_2 = -3$.

3) $z^2 - 3z + 9 = 0$. Так как дискриминант квадратного уравнения $D = 9 - 4 \cdot 9 = -27 < 0$, то уравнение имеет два комплексно-сопряжённых корня: $z_{3,4} = \dfrac{-(-3) \pm i \cdot \sqrt{|-27|}}{2} = \dfrac{3 \pm i \cdot \sqrt{27}}{2} = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2} i$.

Корни z_2, $z_{3,4}$ можно найти и как корни уравнения $z^3 + 27 = 0$, по формуле $z_{2,3,4} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)_{1,2,3}$. Для нахождения комплексных значений корня, число -27 следует представить в виде комплексного числа в тригонометрической форме: $-27 = -27 + 0 \cdot i = 27 \cdot \left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$, после чего значения корня найти по формуле:
$\left(\sqrt[3]{-27}\right)_k = \sqrt[3]{27} \cdot \left(\cos\left(\dfrac{\pi + 2\pi(k-1)}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi + 2\pi(k-1)}{3}\right)\right)$, *где* $k = 1, 2, 3$.

Ответ: $z_1 = 0$, $z_2 = -3$, $z_{3,4} = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{3\sqrt{3}}{2} i$.

6.2. Краткие теоретические сведения.

Тема. <u>Определители.</u>

Квадратной матрицей порядка n называется квадратная таблица из чисел a_{ij} $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n})$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, состоящая из n строк и n столбцов. У квадратной матрицы различают главную диагональ: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ и побочную диагональ: $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$. Любой квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие число $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых, составленных определённым образом из элементов a_{ij} матрицы A, называемое определителем матрицы. Кратко обозначается $|A|$, Δ.

Определителем 1-ого порядка называется число $|A| = |a_{11}| = a_{11}$.

Определителем 2-ого порядка называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определителем 3-его порядка называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Минором элемента a_{ij} называется определитель M_{ij}, полученный из определителя $|A|$ вычёркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} ***элемента*** a_{ij} называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{если } (i+j) - \text{чётное число} \\ -M_{ij} & \text{если } (i+j) - \text{нечётное число} \end{cases}.$$

Определителем порядка n называется число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

Разложением определителя $|A|$ ***по*** i***-ой строке*** $(i = \overline{1,n})$ называется соотношение:
$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Разложением определителя $|A|$ ***по*** j***-ому столбцу*** $(j = \overline{1,n})$ называется соотношение: $$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Определители обладают следующими ***свойствами***:

1) определитель не изменится при замене всех его строк столбцами с теми же номерами;
2) определитель изменит знак на противоположный, если переставить местами любые две строки (два столбца) определителя;
3) общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя;
4) определитель равен нулю, если он содержит нулевую строку (столбец), две одинаковые или пропорциональные строки (столбца);
5) определитель не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на любое число;
6) определитель треугольного вида (когда все элементы, лежащие по одну сторону одной из его диагоналей равны нулю) равен произведению диагональных элементов: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Тема. <u>Матрицы.</u>

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij} ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$): $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, состоящая из m строк и n столбцов. Если необходимо указать размеры матрицы, то пишут $A_{m \times n}$.

Если $m = n$, то матрица A называется ***квадратной***.

Нулевой называется матрица O, все элементы которой равны нулю, например: $O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ***Единичной*** называется квадратная матрица E, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, например: $E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. ***Треугольной*** называется квадратная матрица A, все элементы которой расположенные по одну сторону от главной диагонали равны нулю, например: $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$. ***Трапецие-***

видной (ступенчатой) называется матрица $A_{m\times n}$ $(m < n)$, все элементы которой, расположенные ниже элементов $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ равны нулю, например: $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Матрицы A и B называются ***равными*** и пишут $A = B$, если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Матрицы можно транспонировать, складывать, вычитать, умножать на число, умножать на другую матрицу.

Транспонированной к матрице $A_{m\times n}$ называется матрица $A^T_{n\times m}$, столбцами которой являются соответствующие строки матрицы $A_{m\times n}$.

Суммой (разностью) матриц A и B одного размера $m\times n$, называется матрица $C = A \pm B$ того же размера, для которой:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Произведением матрицы A размера $m\times n$ ***на число*** α называется матрица $B = \alpha A$ того же размера, для которой: $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Линейной комбинацией матриц A и B одного размера $m\times n$, называется матрица $C = \alpha A + \beta B$ того же размера (α и β - произвольные числа), для которой: $c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$,

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ ***на матрицу*** $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times k}$, каждый элемент которой c_{ij} вычисляется по правилу:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\ ,\ i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,k}.$$

Операция умножения матрицы на матрицу определена не для всех матриц, а только для таких у которых число столбцов левой матрицы A равно числу строк правой матрицы B. Такие матрицы называются согласованными для умножения. Поэтому прежде чем выполнять операцию умножения матрицы на матрицу следует проверить их согласованность для умножения и определить размерность матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k}$. Особенность операции умножения матриц состоит в том, что в общем случае: $A \cdot B \neq B \cdot A$, т.е. переместительное свойство места не имеет.

Элементарными преобразованиями матрицы называются:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число;

4) вычёркивание нулевой строки (столбца).

Матрицы A и B, полученные одна из другой в результате элементарных преобразований называются ***эквивалентными*** и пишут $A \Leftrightarrow B$.

Обратной к квадратной матрице A порядка n, называется матрица A^{-1} того же порядка, если: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица порядка n.

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если её определитель $|A| \neq 0$. Обратная матрица всегда существует для невырожденных матриц.

Основными методами вычисления обратной матрицы являются:

Метод присоединённой матрицы. Если A -невырожденная матрица, то $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \hat{A} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$, где $\hat{A}$ - присоединённая матрица, для которой: $\hat{a}_{ij} = A_{ji}$ $i, j = \overline{1, n}$. Здесь A_{ji} - алгебраические дополнения элементов a_{ji} матрицы A.

В частности, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$

Метод элементарных преобразований. Для данной квадратной матрицы A порядка n строится прямоугольная матрица $(A \mid E)$ размера $n \times 2n$ приписыванием к A справа единичной матрицы. Далее, с помощью элементарных преобразований над строками, матрица $(A \mid E)$ приводится к виду $(E \mid A^{-1})$, что всегда возможно, если A - невырожденная.

Матричными называются уравнения вида: $AX = C$, $XA = C$, $AXB = C$, где матрицы A, B, C - известны, матрица X - неизвестна. Если квадратные матрицы A и B - невырожденные, то решения матричных уравнений записываются, соответственно, в виде: $X = A^{-1}C$, $X = CA^{-1}$, $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Минором k ***-ого порядка матрицы*** A ***размера*** $m \times n$ называется определитель M_k квадратной матрицы порядка k, образованной элементами матрицы A, стоящими на пересечении произвольно выбранных её k строк и k столбцов $(k \le \min(m,n))$.

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A, называется её ***рангом*** и обозначается $rangA$ или $r(A)$, а любой минор порядка r, отличный от нуля – ***базисным минором***.

Тема. Системы линейных алгебраических уравнений.

…Система уравнений вида: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ называется ***системой*** m ***линейных уравнений с*** n ***неизвестными***. Числа a_{ij} называются коэффициентами, b_i - свободными членами, x_j - неизвестными системы.

В матричной форме система имеет вид: $AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Здесь A -матрица системы, X -матрица-столбец неизвестных, B -матрица-столбец свободных членов.

Если $B = O$, то система называется ***однородной,*** в противном случае ***неоднородной.***

Система, матрица A которой является треугольной с диагональными элементами $a_{ii} \ne 0$, называется ***треугольной.*** Система, матрица A которой является трапециевидной, называется ***трапециевидной.***

Решением системы называется всякий упорядоченный набор чисел $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, обращающий каждое уравнение системы в равенство. Совокупность всех решений называется ***множеством решений системы***.

Система называется ***совместной***, если она имеет, по крайней мере, одно решение; ***определённой***, если она имеет только одно решение; ***неопределённой***, если она имеет бесконечно много решений; ***несовместной,*** если она не имеет решений.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как всегда имеет, по крайней мере, нулевое решение $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Треугольная система является определённой, трапециевидная система – неопределённой.

Две системы называются ***эквивалентными***, если множества их решений совпадают.

Элементарными преобразованиями систем уравнений называются:

1) перестановка уравнений;

2) перестановка местами слагаемых $a_{ij} \cdot x_j$ в каждом из уравнений системы;

3) умножение уравнения на число, отличное от нуля;

4) прибавление к уравнению другого, умноженного на любое число;

5) вычёркивание уравнения вида: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.

Основными точными методами решения систем линейных уравнений являются методы: Крамера, обратной матрицы и Гаусса.

Если число уравнений в системе m совпадает с числом неизвестных n и определитель матрицы системы $\Delta = |A| \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти:

а) ***методом Крамера*** по формулам: $x_j = \Delta_j / \Delta$, $j = \overline{1, n}$, где Δ_j - определитель, получаемый из определителя матрицы системы Δ заменой j-ого столбца на столбец свободных членов;

б) ***методом обратной матрицы*** по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Методом Гаусса находят решение произвольной системы линейных уравнений. Метод состоит в приведении системы уравнений, с помощью элементарных преобразований, к системе специального вида, эквивалентной исходной, решение которой очевидно. Преобразования по методу Гаусса выполняют в два этапа. Первый этап называют прямым ходом, второй - обратным.

В результате **прямого хода** выясняют: совместна или нет система и если совместна то, сколько имеет решений - одно или бесконечно много, а также, в случае бесконечного множества решений, указывают базисные и свободные неизвестные для записи общего решения системы. Преобразования прямого хода выполняют, как правило, над расширенной матрицей системы $\widetilde{A} = (A \mid B)$, которую получают, приписывая справа к матрице системы A столбец свободных членов B. В результате элементарных преобразований строк и перестановкой столбцов, матрица системы A должна быть приведена к матрице A' треугольного или трапециевидного вида с элементами $a'_{ii} \neq 0$. При этом, система уравнений, матрица которой A', является треугольной с диагональными элементами $a'_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, будет иметь единственное решение; система уравнений, матрица которой A', является трапециевидной с элементами $a'_{ii} \neq 0$ $(i = 1,2,...,k, \quad где\ k < n)$, будет иметь бесконечно много решений. Если, при выполнении преобразований расширенной матрицы $\widetilde{A} \Leftrightarrow \widetilde{A}'$, в преобразованной матрице $\widetilde{A}'$ появится строка $(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad | \, b')$, где $b' \neq 0$, то это говорит о несовместности исходной системы уравнений. Базисные неизвестные указывают, выписывая базисный минор преобразованной матрицы системы A'. Базисными являются неизвестные преобразованной системы, столбцы коэффициентов a'_{ij} при которых образуют базисный минор (определитель максимального порядка, отличный от нуля). Свободными являются неизвестные, не являющиеся базисными.

В результате **обратного хода** находят решение системы, записывая его в виде общего решения, если их бесконечно много. Преобразования обратного хода часто выполняют, над уравнениями системы, соответствующей последней расширенной матрице $\widetilde{A}'$ прямого хода. В случае единственного решения, его получают, находя последовательно значения всех неизвестных из уравнений системы, начиная с последнего. В случае, когда решений бесконечно много, их записывают в виде общего решения. Для этого свободным неизвестным придают разные произвольные постоянные значения: C_1, C_2,..., C_{n-k}, и последовательно из уравнений системы, начиная с последнего, находят значения всех базисных неизвестных. Полученное решение называют общим. Придавая произвольным постоянным, конкретные значения, находят частные решения системы уравнений.

Тема. Арифметические векторы и их системы. Векторные пространства.

Арифметическим вектором называют упорядоченную совокупность из n чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обозначают $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Числа x_i называют ***компонентами*** вектора $\bar{x}$, число компонент называют его ***размерностью***.

Векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называют ***равными***, если они одинаковой размерности и их соответствующие компоненты равны: $x_i = y_i, i = \overline{1,n}$.

Суммой векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ одной размерности, называют вектор $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ той же размерности, для которого: $z_i = x_i + y_i$, $i = \overline{1,n}$.

Произведением вектора $\bar{x}$ ***на число*** α называют вектор $\bar{y} = \alpha \bar{x}$ той же размерности, для которого: $y_i = \alpha x_i$, $i = \overline{1,n}$.

Линейной комбинацией векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ одной размерности, называют вектор $\bar{z} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ той же размерности (α и β - произвольные числа), для которого: $z_i = \alpha x_i + \beta y_i$, $i = \overline{1,n}$.

Множество всех n-мерных векторов, в котором введены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие определённым требованиям (аксиомам) называют ***векторным пространством*** и обозначают R^n.

Систему векторов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ называют ***линейно зависимой***, если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, $\neq 0$ одновременно, такие, что $\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_k\bar{x}_k = \bar{0}$ (где $\bar{0} = (0,0,\ldots,0)$ - нулевой вектор), в противном случае, систему называют ***линейно независимой***.

Базисом системы векторов $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ называют упорядоченную систему векторов $B_S = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\bar{b}_i \in S$, $i = \overline{1,m}$; **2)** система B_S линейно независима; **3)** для любого вектора $\bar{x} \in S$ найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ такие, что $\bar{x} = \alpha_1\bar{b}_1 + \alpha_2\bar{b}_2 + \ldots + \alpha_m\bar{b}_m$. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, однозначно определяемые вектором $\bar{x}$, называют ***координатами вектора*** в базисе B_S, а формулу называют ***разложением вектора*** $\bar{x}$ ***по базису*** B_S и пишут: $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{B_S}$.

В пространстве R^n базисом является каждая упорядоченная система из n линейно независимых векторов: $B_{R^n} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n)$. Формулу $\bar{x} = \alpha_1\bar{b}_1 + \alpha_2\bar{b}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{b}_n$ называют ***разложением вектора*** $\bar{x} \in R^n$ ***по базису*** B_{R^n}, коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - ***координатами вектора*** **в базисе** B_{R^n} и пишут $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{B_{R^n}}$.

Всякая упорядоченная система из n векторов $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n)$ образует базис R^n, если определитель, столбцами которого являются компоненты векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$, не равен нулю.

Пространство R^n, в котором введено скалярное произведение векторов, удовлетворяющее определённым требованиям (аксиомам), называют евклидовым.

Скалярным произведением двух векторов $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ называют число: $\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

Два вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называют ***ортогональными***, если $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0$.

Базис $B^{\perp} = (\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n)$ n-мерного евклидова пространства называют ***ортогональным***, если $\overline{b}_i \cdot \overline{b}_j = 0$ при $i \neq j$. В разложении вектора $\overline{x}$ по базису $B^{\perp}$: $\overline{x} = \alpha_1 \overline{b}_1 + \alpha_2 \overline{b}_2 + \ldots + \alpha_n \overline{b}_n$, числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называемые ***координатами вектора*** $\overline{x}$ ***в ортогональном базисе*** $B^{\perp}$, определяют по формулам: $\alpha_i = (\overline{x}_i \cdot \overline{b}_i) / (\overline{b}_i \cdot \overline{b}_i)$, $(i = \overline{1, n})$.

Тема. <u>Линейные операторы.</u>

Оператором называется закон (правило), по которому каждому вектору $\overline{x} \in R^n$ ставится в соответствие единственный вектор $\overline{y} \in R^m$, и пишут $\widetilde{A} : R^n \to R^m$ или $\overline{y} = \widetilde{A}(\overline{x})$. В дальнейшем, рассматривается случай $\widetilde{A} : R^n \to R^n$ (***преобразование пространства*** R^n). Оператор $\widetilde{A}$ называется ***линейным***, если для любых векторов $\overline{x}, \overline{y} \in R^n$ и действительных чисел α, β выполнено условие: $\widetilde{A}(\alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y}) = \alpha \cdot \widetilde{A}(\overline{x}) + \beta \cdot \widetilde{A}(\overline{y})$.

Если $B_{R^n} = (\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n)$ - базис пространства R^n, то ***матрицей линейного оператора*** $\widetilde{A}$ ***в базисе*** B_{R^n} называется квадратная матрица A порядка n, столбцами которой являются столбцы координат векторов $\widetilde{A}(\overline{b}_i)$. Между линейными операторами, действующими в R^n и квадратными матрицами порядка n, существует взаимно однозначное соответствие, что позволяет оператор $\overline{y} = \widetilde{A}(\overline{x})$ представить в матричном виде $Y = A \cdot X$, где X, Y - матрицы-столбцы координат векторов $\overline{x}, \overline{y}$, A - матрица оператора $\widetilde{A}$ в базисе B_{R^n}.

Для линейных операторов, действующих в R^n вводятся следующие операции: **1)** ***сложение операторов***: $(\widetilde{A}+\widetilde{B})(\overline{x})=\widetilde{A}(\overline{x})+\widetilde{B}(\overline{x})$; **2)** ***умножение операторов на число***: $(\alpha\widetilde{A})(\overline{x})=\alpha(\widetilde{A}(\overline{x}))$; **3)** ***умножение операторов***: $(\widetilde{A}\cdot\widetilde{B})(\overline{x})=\widetilde{A}(\widetilde{B}(\overline{x}))$.

Обратным к оператору $\widetilde{A}$ называется оператор $\widetilde{A}^{-1}$ такой, что $\widetilde{A}\cdot\widetilde{A}^{-1}=\widetilde{A}^{-1}\cdot\widetilde{A}=\widetilde{E}$, где $\widetilde{E}$ - ***единичный*** *(тождественный)* ***оператор***, реализующий отображение $\widetilde{E}(\overline{x})=\overline{x}$. Обратный оператор $\widetilde{A}^{-1}$ существует только для невырожденных операторов $\widetilde{A}$ (операторов, матрица которых является невырожденной). Все, рассмотренные выше, действия над линейными операторами выполняют, выполняя аналогичные действия над их матрицами.

Пусть число λ и вектор $\overline{x}\in R^n$, $(\overline{x}\neq\overline{0})$, таковы, что выполняются равенства: $\widetilde{A}(\overline{x})=\lambda\cdot\overline{x}$ или $A\cdot X=\lambda\cdot X$. Тогда число λ называется ***собственным числом*** линейного оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A), а вектор $\overline{x}$ - ***собственным вектором*** этого оператора (или матрицы), соответствующим собственному числу λ. Равенство $A\cdot X=\lambda\cdot X$ может быть записано в виде $(A-\lambda\cdot E)\cdot X=O$, где E - единичная матрица порядка n, X - матрица-столбец координат собственного вектора $\overline{x}^{(\lambda)}$, соответствующего собственному числу λ, O - нулевая матрица-столбец.

Характеристическим уравнением оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A) называется уравнение:
$$|A-\lambda\cdot E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Множество собственных чисел оператора (или матрицы) совпадает с множеством корней его характеристического уравнения: $|A-\lambda\cdot E|=0$, а множество собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_i, совпадает с множеством ненулевых решений матричного уравнения: $(A-\lambda_i\cdot E)\cdot X=O$.

Тема. Квадратичные формы.

Квадратичной формой $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (или кратко $L(\bar{x})$) от n-переменных называется однородный многочлен второй степени с действительными коэффициентами: $L(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$. Квадратичную форму всегда можно записать в матричном виде: $L = X^T \cdot A \cdot X$, где $A = (a_{ij})$ - матрица квадратичной формы (являющаяся симметрической, так как выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$), X - матрица-столбец, X^T - матрица-строка, составленные из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Квадратичная форма называется ***невырожденной***, если её матрица является невырожденной.

Квадратичная форма называется **канонической,** если она имеет вид:

$$L(\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 .$$

Всякую квадратичную форму всегда можно привести к каноническому виду, например, методами Лагранжа и ортогональных преобразований.

Квадратичные формы подразделяют на различные типы в зависимости от множества их значений. Квадратичная форма $L(\bar{x})$ называется:

положительно (отрицательно) определённой, если для любого $\bar{x} \neq \bar{0}$ выполняется неравенство $L(\bar{x}) > 0$ ($L(\bar{x}) < 0$); ***неотрицательно (неположительно) определённой***, если для любого $\bar{x}$ выполняется неравенство $L(\bar{x}) \geq 0$ ($L(\bar{x}) \leq 0$), причём существует $\bar{x} \neq \bar{0}$, для которого $L(\bar{x}) = 0$; ***знакопеременной*** (или ***неопределённой***), если существуют такие $\bar{x}$ и $\bar{y}$, что $L(\bar{x}) > 0$ и $L(\bar{y}) < 0$.

Невырожденная квадратичная форма может быть либо положительно определённой, либо отрицательно определённой, либо знакопеременной. Тип невырожденной квадратичной формы можно определить, проверяя знаки главных миноров матрицы квадратичной формы.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, где $a_{ij} = a_{ji}$ - матрица квадратичной формы. ***Главными минорами матрицы*** A называются миноры порядка k

($k = 1,2,...,n$), составленные из первых k строк и первых k столбцов матрицы: $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, … , $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Критерием знакоопределённости невырожденной квадратичной формы является ***критерий Сильвестра***:

- квадратичная форма $L(\overline{x})$ ***положительно определена*** тогда и только тогда, когда все главные миноры её матрицы положительны, т.е. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n > 0$;
- квадратичная форма $L(\overline{x})$ ***отрицательно определена*** тогда и только тогда, когда для всех главных миноров её матрицы выполняются неравенства: $-\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $-\Delta_3 > 0$, …, $(-1)^n \Delta_n > 0$ (все миноры нечётного порядка отрицательны, а чётного – положительны) ;
- квадратичная форма $L(\overline{x})$ ***знакопеременна*** тогда и только тогда, когда для главных миноров её матрицы выполняется хотя бы одно из условий: один из главных миноров равен нулю, один из главных миноров чётного порядка отрицателен, два главных минора нечётного порядка имеют разные знаки .

Тема. <u>Векторная алгебра.</u>

Вектором (***геометрическим***) называется направленный отрезок, задаваемый упорядоченной парой точек (началом и концом вектора). Обозначают вектор $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{a}$. Расстояние между началом и концом вектора называется его ***длиной*** и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $\overline{a}$. ***Углом между векторами*** $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется угол $\varphi = (\overline{a},\overline{b})^{\wedge}$, $0 \le \varphi \le \pi$, на который следует повернуть один из векторов, чтобы его направление совпало с направлением другого вектора, при условии, что их начала совпадают. ***Проекцией вектора*** $\overline{a}$ ***на вектор*** $\overline{b}$ называется число $пр_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos(\overline{a},\overline{b})^{\wedge}$.

Векторы называются ***коллинеарными***, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы называются ***компланарными***, если они расположены в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***равными*** и пишут $\overline{a} = \overline{b}$, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ***противоположными*** и пишут $\overline{a} = -\overline{b}$, если они коллинеарны, направлены в разные стороны и имеют равные длины.

Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, соединяющий начало вектора $\overline{a}$ и конец вектора $\overline{b}$, при условии, что конец вектора $\overline{a}$ совпадает с началом вектора $\overline{b}$ (***правило треугольника***). ***Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное число λ*** называется вектор $\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$:
1) коллинеарный вектору $\overline{a}$; **2)** имеющий длину $|\overline{b}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$; **3)** направленный одинаково с вектором $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$.

Ортом вектора $\overline{a}$, называется вектор $\overline{a}^0$, имеющий единичную длину и направление вектора $\overline{a}$: $\overline{a}^0 = \overline{a}/|\overline{a}|$.

Базисом в пространстве R^3 называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов, ***базисом на плоскости*** R^2 – упорядоченная пара неколлинеарных векторов, ***базисом на прямой*** R – любой ненулевой вектор на этой прямой. Базис, в котором все векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину, называется ***ортонормированным***. Векторы ортонормированного базиса обозначаются: $\overline{i}, \overline{j}$ и $\overline{k}$, и называются ***базисными ортами***. Различают правый и левый ортонормированные базисы. Базис $(\overline{i}, \overline{j})$ - называется правым, если кратчайший поворот от $\overline{i}$ к $\overline{j}$ совершается против хода часовой стрелки, в противном случае он – левый. Базис $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ - называется правым, если из конца вектора $\overline{k}$ кратчайший поворот от вектора $\overline{i}$ к $\overline{j}$ виден совершающимся против хода часовой стрелки, в противном случае он – левый.

Условием коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ является равенство: $\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$, где λ - некоторое число. ***Условием компланарности векторов*** $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ является равенство: $\overline{c} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b}$, где α, β - некоторые числа.

Всякий геометрический вектор может быть разложен единственным образом по векторам базиса, коэффициенты разложения называются при этом ***координатами вектора*** в данном базисе. Например, если $B_{R^3} = (\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3)$ - базис R^3 и $\overline{a} \in R^3$, то всегда существует единственное разложение: $\overline{a} = \alpha_1 \overline{b}_1 + \alpha_2 \overline{b}_2 + \alpha_3 \overline{b}_3$, где числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - координаты вектора $\overline{a}$ в базисе B_{R^3}, при этом пишут $\overline{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)_{B_{R^3}}$. Если в R^3 зафиксирован ортонормированный базис $(\overline{i},\overline{j},\overline{k})$ и $\overline{a}\in R^3$, то равносильны записи: $\overline{a}=\alpha_1\overline{i}+\alpha_2\overline{j}+\alpha_3\overline{k}$ и $\overline{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ (*в записи вектора в координатной форме ортонормированный базис не указывают*).

Представление геометрических векторов в координатной форме, позволяет выполнять действия над ними, как над арифметическими векторами:

$$\overline{a}+\overline{b}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3);$$

$$\lambda\cdot\overline{a}=\lambda\cdot(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\lambda\alpha_3).$$

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называется совокупность точки O (начало координат) и правого ортонормированного базиса $\left\langle O,(\overline{i},\overline{j},\overline{k})\right\rangle$ и обозначается $Oxyz$. Прямые Ox, Oy, Oz, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются ***координатными осями:*** первая – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат. Плоскости, проходящие через оси координат, называются ***координатными плоскостями***. Аналогично вводится система координат на плоскости: $\left\langle O,(\overline{i},\overline{j})\right\rangle=Oxy$.

Пусть M - произвольная точка пространства, в котором введена система координат $\left\langle O,(\overline{i},\overline{j},\overline{k})\right\rangle=Oxyz$. ***Радиус-вектором точки*** M называется вектор $\overline{OM}$, который всегда единственным образом можно представить в виде: $\overline{OM}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}=(x,y,z)$. Числа x,y,z, являющиеся координатами радиус-вектора, совпадают с проекциями вектора $\overline{OM}$ на базисные орты $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$ (на координатные оси Ox,Oy и Oz). ***Координатами точки*** M в системе координат $Oxyz$ называются координаты её радиус-вектора $\overline{OM}$ и пишут $M(x,y,z)$. В свою очередь, координаты точки $M(x,y,z)$ полностью определяют её радиус-вектор $\overline{OM}=(x,y,z)=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$. Всякий геометрический вектор $\overline{a}\in R^3$ в системе координат $Oxyz$, всегда можно представить как радиус-вектор некоторой точки и записать в виде: $\overline{a}=x_a\overline{i}+y_a\overline{j}+z_a\overline{k}=(x_a,y_a,z_a)$.

Длина $|\overline{a}|$ вектора $\overline{a}$, заданного координатами $\overline{a}=(x_a,y_a,z_a)$, определяется формулой: $|\overline{a}|=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}$. ***Направляющими косинусами вектора***

$\overline{a}$ называются числа: $\cos\alpha = \cos(\overline{a},\hat{Ox}) = \dfrac{x_a}{|\overline{a}|}$, $\cos\beta = \cos(\overline{a},\hat{Oy}) = \dfrac{y_a}{|\overline{a}|}$, $\cos\gamma = \cos(\overline{a},\hat{Oz}) = \dfrac{z_a}{|\overline{a}|}$, при этом $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Координаты вектора $\overline{AB}$, заданного точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ определяются по формуле: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. Расстояние $\rho(A,B)$ между точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ определяется как длина вектора $\overline{AB}$ и находится по формуле:

$$\rho(A,B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\ .$$

Координаты точки $C(x_C, y_C, z_C)$ делящей отрезок AB пополам находятся по формулам: $x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$, $z_C = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos(\overline{a},\hat{\overline{b}})$. Скалярное произведение обладает свойствами:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$ **;** **2)** $(\lambda\cdot\overline{a})\cdot\overline{b} = \lambda\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})$ где λ - число**;**

3) $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot\overline{c}$ **;** **4)** $\overline{a}\cdot\overline{a} = \overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$

5) $\overline{a}\perp\overline{b} \Leftrightarrow \overline{a}\cdot\overline{b} = 0$**;** **6)** $\overline{i}\cdot\overline{j} = 0$**,** $\overline{i}\cdot\overline{k} = 0$**,** $\overline{j}\cdot\overline{k} = 0$, $\overline{i}^2 = 1$, $\overline{j}^2 = 1$, $\overline{k}^2 = 1$.

Для векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, заданных своими координатами $\overline{a} = x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + z_a\overline{k} = (x_a, y_a, z_a)$, $\overline{b} = x_b\overline{i} + y_b\overline{j} + z_b\overline{k} = (x_b, y_b, z_b)$ скалярное произведение вычисляется по формуле: $\overline{a}\cdot\overline{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Скалярное произведение применяют: **1)** для вычисления угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по формуле: $cos(\overline{a},\hat{\overline{b}}) = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$; **2)** для вычисления проекции вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ по формуле: $np_{\overline{b}}\overline{a} = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|}$; **3)** для вычисления длины вектора $\overline{a} = \alpha\cdot\overline{p} + \beta\cdot\overline{q}$ по формуле: $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2} = \sqrt{(\alpha\cdot\overline{p} + \beta\cdot\overline{q})^2}$; **4)** в качестве условия перпендикулярности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a}\perp\overline{b} \Leftrightarrow \overline{a}\cdot\overline{b} = 0$.

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$, определяемый условиями: **1)** $|\overline{c}| = |\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$; **2)** $\overline{c} \perp \overline{a}$ и $\overline{c} \perp \overline{b}$; **3)** $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ - правая тройка векторов.

Упорядоченная тройка $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ некомпланарных векторов называется ***правой тройкой***, если из конца третьего вектора $\overline{c}$, кратчайший поворот от первого вектора $\overline{a}$ ко второму $\overline{b}$, виден совершающимся против хода часовой стрелки. В противном случае, тройка $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ называется левой.

Векторное произведение обладает свойствами:

1) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$ **;** **2)** $(\lambda \cdot \overline{a}) \times \overline{b} = \lambda \cdot (\overline{a} \times \overline{b})$**,** где λ - число**;**

3) $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$ **;** **4)** $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$ **5)** $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$ **;**

6) $\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}$ **,** $\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j}$ **,** $\overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}$, $\overline{i} \times \overline{i} = \overline{0}$, $\overline{j} \times \overline{j} = \overline{0}$, $\overline{k} \times \overline{k} = \overline{0}$.

Для векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, заданных своими координатами $\overline{a} = x_a \overline{i} + y_a \overline{j} + z_a \overline{k} = (x_a, y_a, z_a)$, $\overline{b} = x_b \overline{i} + y_b \overline{j} + z_b \overline{k} = (x_b, y_b, z_b)$ векторное произведение вычисляется по формуле: $\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$.

Векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$ применяют: **1)** для вычисления площадей треугольника и параллелограмма, построенных на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, как на сторонах, по формуле: $2S_\Delta = S_{пар} = |\overline{a} \times \overline{b}|$; **2)** в качестве условия параллельности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$.

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\overline{a}$,$\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$.

Смешанное произведение обладает свойствами:

1) $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$ **;** **2)** $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a}$ **;**

3) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b}$ **;** **4)** $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ **-**компланарны $\Leftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$ **;**

5) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \pm V$ **,** где V -объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$,$\overline{b}$ и $\overline{c}$ **.**

Для векторов $\overline{a}$,$\overline{b}$ и $\overline{c}$, заданных своими координатами $\overline{a} = x_a \overline{i} + y_a \overline{j} + z_a \overline{k} = (x_a, y_a, z_a)$, $\overline{b} = x_b \overline{i} + y_b \overline{j} + z_b \overline{k} = (x_b, y_b, z_b)$,

$\overline{c} = x_c\overline{i} + y_c\overline{j} + z_c\overline{k} = (x_c, y_c, z_c)$ смешанное произведение вычисляется по формуле: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$.

Смешанное произведение $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ применяют: **1)** для вычисления объёмов тетраэдра и параллелепипеда, построенных на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, как на рёбрах, по формуле: $6V_{тетр} = V_{пар} = |\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$; **2)** в качестве условия компланарности векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0 \Leftrightarrow \overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ - компланарны.

Тема. Прямые линии и плоскости.

Нормальным вектором прямой L, называется всякий ненулевой вектор $\overline{N}$ перпендикулярный данной прямой. ***Направляющим вектором прямой*** L, называется всякий ненулевой вектор $\overline{q}$ параллельный данной прямой.

Прямая L ***на плоскости*** в системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + C = 0$ - ***общее уравнение*** прямой, где $(A, B) = \overline{N}$ - нормальный вектор прямой;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{N} = (A, B)$;

3) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно данному вектору $\overline{q} = (l, m)$ (***каноническое уравнение***);

4) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$;

5) $y = \begin{cases} y_0 + k(x - x_0) \\ kx + b \end{cases}$ **-** уравнения прямой ***с угловым коэффициентом*** $k = tg\alpha$, где $M_0(x_0, y_0)$ - точка через которую прямая проходит; α ($-\pi/2 < \alpha < \pi/2$) – угол, который прямая составляет с осью Ox; b - длина отрезка (со знаком $\pm$), отсекаемого прямой на оси Oy (знак «$+$», если отрезок отсекается на положительной части оси и «$-$», если на отрицательной).

6) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ **-** уравнение прямой ***в отрезках,*** где a и b - длины отрезков (со знаком $\pm$), отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy (знак «$+$», если отрезок отсекается на положительной части оси и «$-$», если на отрицательной).

Расстояние от точки $M^*(x^*, y^*)$ ***до прямой*** L, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$ на плоскости, находится по формуле:

$$\rho(M^*, L) = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Угол $\varphi = (L_1 \hat{,} L_2)$**,** $(0 \le \varphi \le \pi/2)$ ***между прямыми*** L_1 и L_2, заданными общими уравнениями или уравнениями с угловым коэффициентом, находится по одной из следующих формул:

$$\cos\varphi = |\cos(\overline{N}_1, \overline{N}_2)| = \frac{|\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2|}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|}; \qquad tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

$L_1 \parallel L_2$, если $\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ или $k_1 = k_2$.

$L_1 \perp L_2$, если $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Rightarrow \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ или $k_1 k_2 = -1$

Координаты точки пересечения прямых L_1 и L_2 находятся как решение системы линейных уравнений: $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}$.

Нормальным вектором плоскости P, называется всякий ненулевой вектор $\overline{N}$ перпендикулярный данной плоскости.

Плоскость P в системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ - ***общее уравнение*** плоскости, где $(A, B, C) = \overline{N}$ - нормальный вектор плоскости;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{N} = (A, B, C)$;

3) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$;

4) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ **-** уравнение плоскости ***в отрезках,*** где a, b и c - дины отрезков (со знаком $\pm$), отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy и Oz (знак «$+$», если отрезок отсекается на положительной части оси и «$-$», если на отрицательной).

Расстояние от точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ ***до плоскости*** P, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле:

$$\rho(M^*, P) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Угол $\varphi = (\widehat{P_1, P_2})$, $(0 \le \varphi \le \pi/2)$ ***между плоскостями*** P_1 и P_2, заданными общими уравнениями, находится по формуле:

$$\cos\varphi = |\cos(\overline{N}_1, \overline{N}_2)| = \frac{|\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2|}{|\overline{N}_1| \cdot |\overline{N}_2|}.$$

$P_1 \parallel P_2$, если $\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

$P_1 \perp P_2$, если $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Rightarrow \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Прямая L ***в пространстве*** в системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ - ***общее уравнение*** прямой, как линии пересечения двух плоскостей, где $(A_1, B_1, C_1) = \overline{N}_1$ и $(A_2, B_2, C_2) = \overline{N}_2$ - нормальные векторы плоскостей P_1 и P_2;

2) $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно данному вектору $\overline{q} = (l, m, n)$ (***каноническое уравнение***);

3) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$;

4) $\begin{cases} x=x_0+l\cdot t \\ y=y_0+m\cdot t \\ z=z_0+n\cdot t \end{cases}$ **-** уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно данному вектору $\overline{q}=(l,m,n)$, $-\infty<t<+\infty$ (***параметрическое уравнение***);

Угол $\varphi=(L_1 \hat{,} L_2)$***,*** $(0\le\varphi\le\pi/2)$ ***между прямыми*** L_1 и L_2 ***в пространстве***, заданными каноническими уравнениями находится по формуле:

$$\cos\varphi=|\cos(\overline{q}_1,\overline{q}_2)|=\frac{|\overline{q}_1\cdot\overline{q}_2|}{|\overline{q}_1|\cdot|\overline{q}_2|}.$$

$L_1 \parallel L_2$, если $\overline{q}_1 \parallel \overline{q}_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.

$L_1 \perp L_2$, если $\overline{q}_1 \perp \overline{q}_2 \Rightarrow \overline{q}_1\cdot\overline{q}_2=0 \Rightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

Координаты точки пересечения прямой L, заданной параметрическим уравнением ***и плоскости*** P, заданной общим уравнением, находятся как решение системы линейных уравнений: $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ x=x_0+l\cdot t \\ y=y_0+m\cdot t \\ z=z_0+n\cdot t \end{cases}$.

Угол $\varphi=(L \hat{,} P)$***,*** $(0\le\varphi\le\pi/2)$ ***между прямой*** L, заданной каноническим уравнением ***и плоскостью*** P, заданной общим уравнением находится по формуле: $\sin\varphi=|\cos(\overline{q},\overline{N})|=\dfrac{|\overline{q}\cdot\overline{N}|}{|\overline{q}|\cdot|\overline{N}|}$.

$L \parallel P$, если $\overline{q}\perp\overline{N} \quad \Rightarrow \quad \overline{N}\cdot\overline{q}=0 \quad \Rightarrow \quad A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n=0$.

$L \perp P$, если $\overline{q}\parallel\overline{N} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$.

Тема. Кривые второго порядка.

Алгебраической кривой второго порядка в системе координат Oxy называется кривая Γ, ***общее уравнение*** которой имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где числа A, B, C - не равны нулю одновременно. Существует следующая классификация кривых второго порядка: **1)** если $AC - B^2 > 0$, то общее уравнение определяет кривую ***эллиптического типа*** (окружность (при $A = C$, если $B = 0$), эллипс (при $A \neq C$, если $B = 0$), пустое множество, точку); **2)** если $AC - B^2 < 0$, то - кривую ***гиперболического типа*** (гиперболу, пару пересекающихся прямых); **3)** если $AC - B^2 = 0$, то - кривую **параболического типа** (параболу, пустое множество, прямую, пару параллельных прямых) . Окружность, эллипс, гипербола и парабола называются ***невырожденными действительными кривыми второго порядка.***

Общее уравнение $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, где $B = 0$, определяющее невырожденную кривую (окружность, эллипс, гиперболу, параболу), всегда (методом выделения полных квадратов) можно привести к уравнению одного из следующих видов:

1а) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ **-** уравнение окружности с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом r (рис. 7).

1б) $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса с центром в точке (x_0, y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям. Числа $a > 0$ и $b > 0$ - называются ***полуосями эллипса***; прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$ параллельными осям симметрии и центром в точке (x_0, y_0) - ***основным прямоугольником эллипса;*** точки пересечения основного прямоугольника с осями симметрии - ***вершинами эллипса***.

Для построения эллипса в системе координат Oxy :**1)** отмечаем центр (x_0, y_0) эллипса; **2)** проводим через центр пунктирной линией оси симметрии эллипса; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник эллипса с центром (x_0, y_0) и сторонами $2a$, $2b$ параллельными осям симметрии; **4)** изображаем сплошной линией эллипс, вписывая его в основной прямоугольник так, чтобы эллипс касался его сторон только в вершинах эллипса (рис 5) .

Аналогично строится и окружность, основной прямоугольник которой имеет стороны $2a = 2b = 2r$ (рис. 4).

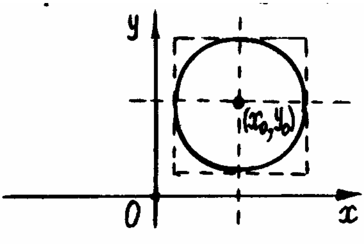


Рис.4

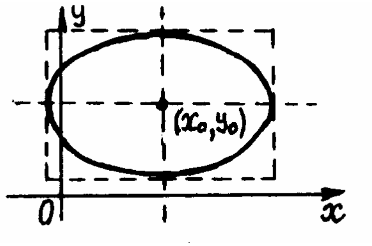


Рис. 5

2) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$ - уравнения гипербол (называемых *сопряжёнными*) с центром в точке (x_0, y_0) и осями симметрии, параллельными координатным осям. Числа $a>0$ и $b>0$ - называются ***полуосями гипербол***; прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$ параллельными осям симметрии и центром в точке (x_0, y_0) - ***основным прямоугольником гипербол;*** точки пересечения основного прямоугольника с осями симметрии - ***вершинами гипербол;*** прямые $a(y-y_0)=\pm b(x-x_0)$, проходящие через противоположные вершины основного прямоугольника – ***асимптотами гипербол***.

Для построения гиперболы в системе координат Oxy: **1)** отмечаем центр гиперболы (x_0, y_0); **2)** проводим через центр (x_0, y_0) пунктирной линией оси симметрии гиперболы; **3)** строим пунктиром основной прямоугольник гиперболы с центром (x_0, y_0) и сторонами $2a$ и $2b$ параллельными осям симметрии; **4)** проводим через противоположные вершины основного прямоугольника пунктирной линией прямые, являющиеся асимптотами гиперболы, к которым неограниченно близко, при бесконечном удалении от начала координат, приближаются ветви гиперболы, не пересекая их; **5)** изображаем сплошной линией ветви гиперболы $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ (рис. 6) или гиперболы $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$ (рис. 7).

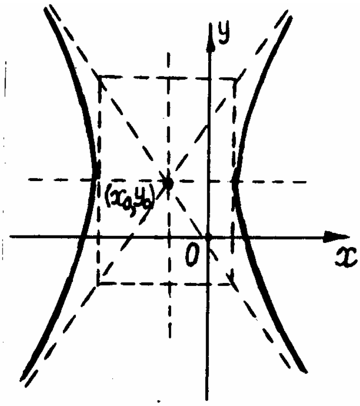


Рис.6

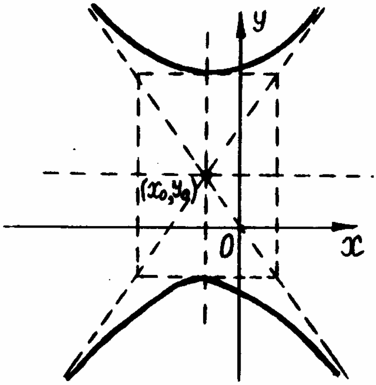


Рис. 7

3а) $(x-x_0)^2 = 2p\cdot(y-y_0)$ - уравнение параболы с вершиной в точке (x_0, y_0) и осью симметрии, параллельной координатной оси Oy (рис. 8).

3б) $(y-y_0)^2 = 2p\cdot(x-x_0)$ - уравнение параболы с вершиной в точке (x_0, y_0) и осью симметрии, параллельной координатной оси Ox (рис. 9).

Для построения параболы в системе координат Oxy: **1)** отмечаем вершину параболы (x_0, y_0); **2)** проводим через вершину (x_0, y_0) пунктирной линией ось симметрии параболы; **3)** изображаем сплошной линией параболу, направляя её ветвь, с учётом знака параметра параболы p: при $p > 0$ - в положительную сторону координатной оси, параллельной оси симметрии параболы (рис. 8а и 9а); при $p < 0$ - в отрицательную сторону координатной оси (рис.8б и 9б) .

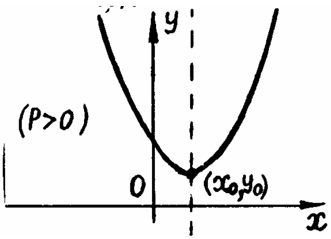


Рис. 8а

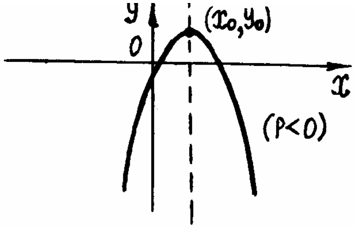


Рис. 8б

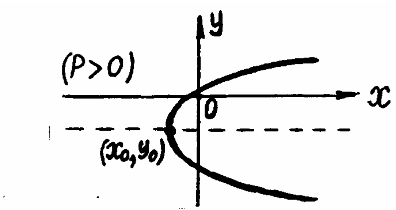


Рис. 9а

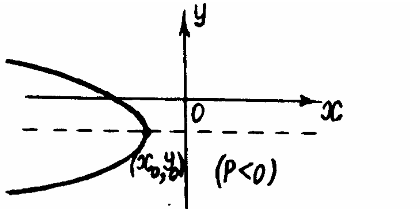


Рис. 9б

Тема. <u>Комплексные числа и многочлены.</u>

Комплексным числом называется число вида $z = x + iy$, где x, y - действительные числа, символ i - мнимая единица, для которой $i^2 = -1$. Число $x = \operatorname{Re} z$ - называется действительной частью комплексного числа z, число $y = \operatorname{Im} z$ - мнимой частью. Комплексное число $x + i0$ совпадает с действительным, а число iy называется чисто мнимым. Множество всех комплексных чисел обозначается C .

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости с системой координат Oxy (называемой комплексной плоскостью) точкой, обозначаемой той же буквой z и имеющей координаты (x, y) . Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые – оси ординат (поэтому ось Ox называется действительной осью, а ось Oy - мнимой осью). Комплексное число на комплексной плоскости изображается также радиус-вектором точки (x, y). Длина радиус-вектора называется ***модулем комплексного числа:*** $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а угол его φ с осью Ox называется ***аргументом комплексного числа***: $\begin{cases} \cos\varphi = x/r \\ \sin\varphi = y/r \end{cases}$, $0 \le \varphi < 2\pi$ **.** Аргумент φ комплексного числа вычисляют, как правило, по формуле:

$$\varphi = \begin{cases} arctg(y/x) & \text{если } z \in \{I \text{ квадранту}\} \\ \pi + arctg(y/x) & \text{если } z \in \{II \text{ или } III \text{ квадранту}\} \\ 2\pi + arctg(y/x) & \text{если } z \in \{IV \text{ квадранту}\} \end{cases}.$$

Комплексно-сопряжённым числу $z = x + iy$ называется число $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

Представление комплексного числа выражением $z = x + iy$ называется ***алгебраической формой*** комплексного числа, а выражением $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - ***тригонометрической формой*** комплексного числа.

Арифметические действия (сложение, вычитание, умножение) над комплексными числами в алгебраической форме выполняют по правилам действий над многочленами, с учётом того, что $i^2 = -1$:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Деление комплексных чисел выполняют следующим образом: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$.

Возведение комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в натуральную степень n выполняют, используя ***формулу Муавра:*** $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$**.** Полученный результат представляют затем в алгебраической форме.

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (не равного нулю) выполняют по формуле:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

(здесь $\sqrt[n]{r}$ - действительное положительное число). Таким образом, корень степени n из комплексного числа имеет n различных значений, расположенных на комплексной плоскости на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Алгебраическим многочленом степени n называется выражение вида:

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

где $z \in C$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - некоторые числа (вообще говоря, комплексные), называемые коэффициентами многочлена, причём $a_0 \neq 0$.

Алгебраическим уравнением степени n называется уравнение вида $P_n(z) = 0$. Число z_0, для которого $P_n(z_0) = 0$ называется ***корнем*** многочлена или уравнения.

Теорема Безу. Число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда $P_n(z)$ делится на $(z - z_0)$, т.е. когда $P_n(z)$ представляется в виде: $P_n(z) = (z - z_0) \cdot Q_{n-1}(z)$, где $Q_{n-1}(z)$ - многочлен степени $(n-1)$.

Число z_0 называется ***корнем кратности*** k многочлена $P_n(z)$, если $P_n(z) = (z - z_0)^k \cdot Q_{n-k}(z)$, где $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Для многочленов имеет место следующая теорема:

Теорема Гаусса (*основная теорема алгебры*). Всякий многочлен ненулевой степени n имеет ровно n корней, если каждый корень считать ровно столько раз, какова его кратность .

Всякий многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами всегда можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

Всякий квадратный многочлен az^2+bz+c с действительными коэффициентами на множестве комплексных чисел всегда можно разложить в произведение линейных множителей: $a\,z^2+bz+c=a\,(z-z_1)\,(z-z_2)$, где корни многочлена z_1 и z_2 находятся по формулам:

1) если $D=b^2-4ac\geq 0$, то $\quad z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ - действительные;

2) если $D=b^2-4ac<0$, то $z_{1,2}=\dfrac{-b}{2a}\pm i\cdot\dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$ - комплексно-сопряжённые.

Для нахождения корней алгебраического уравнения $P_n(z)=0 \quad (n\geq 3)$ с действительными коэффициентами поступают, как правило, следующим образом: находят один из корней подбором (например, корнем может быть целый делитель свободного слагаемого a_n), а затем, последовательно применяя теорему Безу, сводят нахождение корней уравнения $P_n(z)=0$ к нахождению корней линейных и квадратных уравнений.

6.3 Основные математические формулы.

Формулы сокращённого умножения:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **2.** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

3. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ **5.** $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

6. $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$**,** где $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$**.**

Действия с натуральными логарифмами.

1. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$**.** **2.** $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$**.** **3.** $-\ln a = \ln(1/a)$**.**

4. $b \ln a = \ln(a^b)$**.** **5.** $\ln e^a = a$

Формулы тригонометрии:

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$ **2.** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$

3. $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2 \alpha$, **4.** $1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2 \alpha$**.**

5. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

6. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

7. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **8.** $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

9. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

10. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \sin[(\alpha-\beta)/2]$

11. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

12. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha-\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha+\beta)/2]$

13. $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

14. $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

15. $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

16. $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ **17.** $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

<u>Формулы приведения.</u>

Функция	$\beta = \dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$		$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$-tg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	∞	0	∞

6.4 Образец оформления обложки с контрольной работой.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

кафедра математики

Контрольная работа
по дисциплине «Математика (часть 1)»

Вариант № ____
(номера выполняемых заданий: ____________________________)

Выполнил: студент группы №________
*Ф.И.О. студента*_________
зач. книжка - №__________
Проверил: преподаватель кафедры математики
*Ф.И.О. преподавателя*_____

Набережные Челны
201…

6.5. Таблица номеров выполняемых заданий.

Номер варианта	*Номера выполняемых заданий*											
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
1	**1**	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**	**101**	**111**
2	**2**	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**	**102**	**112**
3	**3**	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**	**103**	**113**
4	**4**	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**	**104**	**114**
5	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**	**105**	**115**
6	**6**	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**	**106**	**116**
7	**7**	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**	**107**	**117**
8	**8**	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**	**108**	**118**
9	**9**	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**	**109**	**119**
10	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**	**110**	**120**
11	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**54**	**65**	**76**	**87**	**98**	**109**	**120**
12	**4**	**13**	**22**	**31**	**42**	**53**	**64**	**75**	**86**	**97**	**108**	**119**
13	**5**	**14**	**23**	**32**	**41**	**52**	**63**	**74**	**85**	**96**	**107**	**118**
14	**6**	**15**	**24**	**33**	**42**	**51**	**62**	**73**	**84**	**95**	**106**	**117**
15	**7**	**16**	**25**	**34**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**94**	**105**	**116**
16	**8**	**17**	**26**	**35**	**44**	**53**	**62**	**71**	**82**	**93**	**104**	**115**
17	**9**	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**92**	**103**	**114**
18	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**82**	**91**	**102**	**113**
19	**1**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**	**109**	**118**
20	**2**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**	**108**	**117**
21	**3**	**14**	**25**	**36**	**47**	**58**	**69**	**80**	**89**	**98**	**107**	**116**
22	**4**	**15**	**26**	**37**	**48**	**59**	**70**	**79**	**88**	**97**	**106**	**115**
23	**5**	**16**	**27**	**38**	**49**	**60**	**69**	**78**	**87**	**96**	**105**	**114**
24	**6**	**17**	**28**	**39**	**50**	**59**	**68**	**77**	**86**	**95**	**104**	**113**
25	**7**	**18**	**29**	**40**	**49**	**58**	**67**	**76**	**85**	**94**	**103**	**112**
26	**8**	**19**	**30**	**39**	**48**	**57**	**66**	**75**	**84**	**93**	**102**	**111**
27	**1**	**11**	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**	**110**	**120**
28	**2**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**	**109**	**119**
29	**3**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**	**108**	**118**
30	**10**	**20**	**29**	**38**	**47**	**56**	**65**	**74**	**83**	**92**	**101**	**111**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

С О Д Е Р Ж А Н И Е