Пусть $A(m,n)$ – произвол. прямоуг. м-ца. Будем тракт. её столбцы как сист. в-ов из C^m. Ранг этой сист. назовём рангом м-цы ($\operatorname{rank} A$).

$A(m,n)$ можно тракт. и как сист. строк из C^n. Для любой м-цы $A(m,n)$ ранг сист. строк равен рангу сист. столбцов.

Пусть $A: X_n \to Y_m$, A_{eq} – м-ца A относит. произвол. пр-ой пары базисов $\{e_k\}_{k=1}^{n} \subset X_n$, $\{q_k\}_{k=1}^{m} \subset Y_m$. Тогда $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_{eq})$.

Ранг м-цы оператора инвариантен по отнош. к выбору базисов, и можно было бы дать эквив. опр-е ранга оп-ра как ранга его м-цы.

rank(A)=3.
(по методу окаймляющих миноров)

Пусть $A: X \to Y$ — лин. оп-р. Мн-во всех в-ов $y \in Y$ таких, что $y = Ax$ при нек. $x \in X$, наз-ся <u>областью значений</u> или <u>образом</u> оп-ра. Обозн. $Im(A)$. $Im(A)$ — лин. подпр-во пр-ва Y. Размерность $Im(A)$ — <u>ранг</u> оп-ра A, обозн $rank(A)$.

Мн-во всех в-ов $x \in X$ таких, что $Ax = 0$ наз-ся <u>ядром</u> оп-ра и обозн. $Ker(A)$. $Ker(A)$ — лин подпр-во пр-ва X. Размерность ядра — <u>дефект</u> оп-ра A обозн. $def(A)$.

Для любого $A: X_n \to Y_m$

$$rank(A) + def(A) = n \quad (1)$$

Пусть в X дана некоторая сист. в-ов $\{a^i\}_{i=1}^n$ (все вект. ненулевые). Тогда сист. обладает содерж. лин. независ. подсист.

Подсис. $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r$ с $\{a^i\}_{i=1}^m$, сост. из лин. независ. в-ов, наз-ся <u>максимальной</u> если добавление к ней любого в-ра из $\{a^i\}_{i=1}^n$ приводит к лин. завис. сист.

Число в-ов макс. независ. подсист. содерж. данная система в-ов, называемое <u>рангом</u> системы в-ов.

Образ оп-ра. Ядро оп-ра. Ранг м-цы

1. $\ker(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$, $A: X \to Y$

Пусть $x, y \in \ker(A)$.
$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0 + 0 = 0$ т.е. лин. комб. $\alpha x + \beta y$ принадл. $\ker(A)$.

2. Пусть $C = AB$. Столбцы C выр-ся через столбцы A, кот-ые выр-ся через макс. подсист. лин. независ. столб. м-цы A, число кот. равно $\mathrm{rank}(A)$. Назовём столбцы подсистемы базисными.

Столбцы C принадл. подпр-ву, натянутому на базис столбцов A. $\Rightarrow$ число незав. столбцов C $\leq \operatorname{rank}(A)$. Также строки C лин. выр-ся через строки B. Аналог., $\operatorname{rank}(C) \leq \operatorname{rank}(B)$.

$$\operatorname{rank}(C) = \operatorname{rank}(AB) \leq \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$$

③ $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = \{a^1, a^2, a^3, a^4\}$, $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Любая пара в-ов из A обр-ет базис пр-ва сост. из 3 в-ов

④ $A: X_n \to Y_m$,

$e^1, \ldots, e^n$ — базис X_n. Д-в:

$$\operatorname{Im}(A) = L(Ae^1 \ldots Ae^n),$$ где $L(Ae^1, \ldots, Ae^n)$ — подпр-во Y_m, натянутое на в-ры $Ae^1, \ldots, Ae^n$.

Пусть $y \in \operatorname{Im}(A)$. Тогда $y = Ax$ для нек. $x \in X_n$, т.е.

$$y = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) \in L(Ae^1, \ldots, Ae^n)$$

С другой ст., если $y \in L(Ae^1, \ldots, Ae^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = Ax,$$ где

$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т.е. $y \in \operatorname{Im}(A) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(A) = L(Ae^1, \ldots, Ae^n).$$

(5) a) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2+x_3)$

$Ax^1 = x^1+x^2+x^3$
$Ax^2 = x^1+x^2+x^3$
$Ax^3 = x^1+x^2+x^3$

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

базис образа сост. из 1 в-ра: (1, 1, 1).

rank(A) = 1, def(A) = ~~2~~ 1 = 2

в) $Ax^1 = 2x^1 - x^2 - x^3$
$Ax^2 = x^1 - 2x^2 + x^3$
$Ax^3 = x^1 + x^2 - 2x^3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank(A) = 2, def(A) = 1.
базис Ax^1 и Ax^2

c) $Ax^1 = -x^1 + x^2 + x^3$
$Ax^2 = x^1 - x^2 + x^3$
$Ax^3 = x^1 + x^2 - x^3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$rank(A) = 3$ $det(A) \neq 0$,
базис A_1^1, A_1^2, A_1^3.

(6) Каждому м-ну P_n оп-р D ставит в соотв. многочлен из P_{n-1}, поэтому $Im(D) = P_{n-1}$, $D: P_n \to P_{n-1}$

Любой многочлен нул. ст. D отправ. в ноль $\Rightarrow Ker(D) = P_0$

(7) $P: X \to L_1$, $X = L_1 \dot{+} L_2$

P ст. в соотв. в-ру x в-р из L_1, т.е. $Im(P) = L_1$

пусть L_1 имеет размер. n_1, L_2 – размер. n_2
$x = x^1 + x^2$, где $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$
$Px = x^1$
$Px^2 = 0 \Rightarrow Ker(P) = L_2$

(8) $Rx = x^1 - x^2$, $x^1 \in L_1$, $x^2 \in L_2$, $X = L_1 \dot{+} L_2$
$x = x^1 + x^2$

$R: X \to X$, т.к. кажд. в-ру из X ?

(9) $Ax = [x, a]$, a — фикс. ненул. в-р.

Рез-том вект. пр-ия будут в-ры перпендик. к ним обоим.
при $x \in V_3$, $Ax \in V_2$, Im — множество вект., пер...
$A: V_3 \to V_2$, т.е. $\mathrm{Im}(A) = (x, a) = 0$

в 0 обр-ся вект. пр-ие будут коллинеар. в-ов, т.е. $\ker(A)$ = прямая $[x, a] = 0$.

(10) $\det(A) = n - 1$, $\Rightarrow$ $n-1$ послед. стол. (или строк) и что будут ненулевыми

(11)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

rank $A = 2$

(12)

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 36 & 72 & -38 \\ 0 & 0 & 73 & 147 & -80 \\ 0 & 0 & 98 & 219 & -118 \\ 0 & 0 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 36 & 0 & -58 \\ 0 & 0 & 73 & 1 & -80 \\ 0 & 0 & 98 & 23 & -118 \\ 0 & 0 & 71 & -1 & -72 \end{pmatrix}\sim$$

с двум задачи.

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 36 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 73 & -7 \\ 0 & 0 & 23 & 98 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 71 & -1 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 36 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 73 & -8 \\ 0 & 0 & 23 & 98 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 71 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 36 & -2 \\ 73 & -8 \end{vmatrix} = -142 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 36 & -2 \\ 1 & 73 & -8 \\ 23 & 98 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Минор 4-го п-ка равен нулю $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ rank$(A) = 3$

13 a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = +39 \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

rank$(A) = 2$

в)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 3 & -8 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -7 & 4 & 2 \\ -8 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -8 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$rank(A) = 2$

14.

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \lambda & 4 \end{vmatrix} = \lambda - 12 \quad = 0$ при $\lambda = 12$

$\begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 7\lambda - 4 \quad = 0$ при $\lambda = 4/7$

$rank(A)$ не м.б. $= 1$.

$12 \times 17 =$
$= 144 + 60$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ \lambda & 4 & 10 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 204 + 10 + 7\lambda - 4 - 210 - 17\lambda = -10\lambda$$

$-10\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

при $\lambda = 0$ $rank(A) = 2$

15.

при $\lambda \neq 0$ $rank(A) > 2$

a)

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}(A) = 3.$

b)

$$\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 17 & -28 & 11 & 39 \\ 0 & 24 & -37 & 13 & 50 \\ 0 & 25 & -7 & -18 & -11 \\ 0 & 31 & 12 & -43 & -55 \\ 0 & 42 & 13 & -55 & -68 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 17 & 11 & 39 \\ 0 & 0 & 24 & 13 & 50 \\ 0 & 0 & 25 & -18 & -11 \\ 0 & 0 & 31 & -43 & -55 \\ 0 & 0 & 42 & -55 & -68 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 17 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 31 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & -55 \end{pmatrix}$$

rank(A) = 2

(16) a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$

$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -16$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$

rank(A) = 3

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 15 + 6 = 21$

$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \overset{42}{21} - 3 \cdot \overset{42}{14} = 0.$ $-20?$

$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-28) + 4 \cdot 21 = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \overset{63+7-70}{3 \cdot 21 - 5 \cdot 14 + 7} = 0$

$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 22 - 7 + 7 \cdot 21 = 0.$

rank(A) = 2

(17) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ -1 & \lambda & 5 \\ 10 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 50 + 12 - 20\lambda + 30\lambda - 1 =$$
$$= \lambda^2 + 10\lambda - 39 = 0$$
$$\lambda_1 = -13, \quad \underline{\lambda_2 = 3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 6 + \lambda^2 - 20 - 1 - 10\lambda + 12\lambda =$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$$
$$\lambda_1 = -5, \quad \underline{\lambda_2 = 3}$$

при $\lambda = 3$ rank(A) = 2
при $\lambda \neq 3$ rank(A) = 3

(18) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 47 & -67 & 35 & 155 \\ 0 & 26 & 98 & 23 & 86 \\ 0 & 16 & -428 & 1 & 22 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 47 & -67 & 35 & 15 \\ 0 & 26 & 98 & 23 & -6 \\ 0 & 16 & -428 & 1 & 18 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 12 & 8 & 35 & 15 \\ 0 & 3 & 68 & 23 & -6 \\ 0 & 15 & -338 & 1 & 18 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 9 & 4 & 35 & 5 \\ 0 & 1 & 34 & 23 & -2 \\ 0 & 5 & -169 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}(A)=3$.
(по методу окаймляющих миноров)