

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ**

ЧАСТЬ II

Учебно-методическое пособие

Казань – 2016

УДК 517.928

Печатается по решению Учебно-методической комиссии

Института физики КФУ

Протокол № 1 от 6 сентября 2016 г.

Рецензенты:

доцент кафедры общей математики КФУ, к.ф.-м.н. **В. А. Сочнева**;

доцент кафедры теории относительности

и гравитации КФУ, к.ф.-м.н. **Р.А. Даишев**.

Мухарлямов Р. К., Панкратьева Т. Н.

Асимптотические методы в теоретической физике. Часть II. Обыкновенные дифференциальные уравнения с параметром: учебно-методическое пособие / Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева – Казань: Казан. ун-т, 2016.– 49 с.

Пособие предназначено для студентов института физики Казанского федерального университета, обучающихся по направлению 03.03.02 – "Физика", и является методическим обеспечением курсов по выбору: Теория поля, Теория суперсимметрий, Калибровочные поля, Космология и др.

© Казанский университет, 2016

© Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева, 2016

Оглавление

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | Введение | 4 |
| 2 | Предварительные понятия | 6 |
| 2.1 | Равномерность и O – символика | 6 |
| 2.2 | Равномерное и неравномерное асимптотические разложения | 8 |
| 3 | Регулярные возмущения | 13 |
| 4 | Метод усреднения | 20 |
| 4.1 | Уравнение с медленно изменяющимися параметрами | 28 |
| 4.2 | Движение в быстро осциллирующем внешнем поле | 30 |
| 5 | Метод ВКБ | 36 |
| 6 | Задачи и упражнения для самостоятельного решения | 45 |
| 7 | Ответы | 47 |

1 Введение

В настоящем учебно-методическом пособии рассматриваются приближённые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящие от параметра. Оно является продолжением издания [1], дополнением к [2]-[5] и предназначено для студентов института физики, обучающихся по направлению 03.03.02 – "Физика". Стандартный курс "Дифференциальные уравнения" не включает в себя приближённые методы решения уравнений в достаточном объёме. Вместе с тем, в дальнейшем изучении физических дисциплин студентами требуется знание этих вопросов. Это пособие будет полезным при освоении дисциплин по выбору: Теория поля, Теория суперсимметрий, Калибровочные поля, Космология и др.

Многие асимптотические методы изначально возникли в физике и в последствии получили строгое математическое обоснование. В некоторых случаях они незаменимы в следствии, например, нелинейности уравнения движения и граничных условий или переменных коэффициентов.

Предлагаемое пособие посвящено методам возмущений, или асимптотическим методам малого параметра решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь мы рассмотрели алгоритм построения *регулярных возмущений*, а

так же некоторые методы для *сингулярных возмущений*: метод усреднения, метод ВКБ. Приведены примеры использования этих методов в физике и подобраны задачи для самостоятельного решения.

2 Предварительные понятия

Во втором разделе пособия [1] были сформулированы предварительные понятия асимптотических методов, связанных с функцией одной переменной. Присутствие параметров в физических моделях, помимо независимой переменной, приводит к функции многих переменных, что накладывает свои особенности и трудности использования асимптотических подходов. Одним из ключевых понятий является равномерность асимптотических оценок и равномерность асимптотического разложения функций многих переменных.

2.1 Равномерность и O – символика

Пусть функции $f(x, \mu)$ и $g(x, \mu)$ имеют предел при $\mu \rightarrow 0$. Обозначение

$$f(x, \mu) = o(g(x, \mu)) \text{ при } \mu \rightarrow 0 \quad (1)$$

означает, что *для любого* сколь угодно малого числа $\delta > 0$, не зависящего от μ , существует $\mu_0 > 0$, такое, что

$$|f(x, \mu)| \leq \delta \cdot |g(x, \mu)| \quad (2)$$

для всех $|\mu| \leq \mu_0$. Это условие равносильно

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{f(x, \mu)}{g(x, \mu)} = 0.$$

Если δ и μ_0 не зависят от x , то говорят, что условие (1) выполняется *равномерно*.

Выражение

$$f(x, \mu) = O(g(x, \mu)) \text{ при } \mu \rightarrow 0 \quad (3)$$

означает, что существует число $A > 0$, не зависящее от μ , и $\mu_0 > 0$, такое, что

$$|f(x, \mu)| \leq A |g(x, \mu)| \quad (4)$$

для всех $|\mu| \leq \mu_0$. Это условие равносильно

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left| \frac{f(x, \mu)}{g(x, \mu)} \right| < \infty.$$

Если A и μ_0 не зависят от x , то говорят, что условие (3) выполняется *равномерно*.

Примеры:

$$\sin(\mu + x) = o(\mu^{-1/3}) \text{ равномерно при } \mu \rightarrow 0;$$

$$\sin(\mu + x) = O(1) \text{ равномерно при } \mu \rightarrow 0;$$

$$\sin(\mu + x) = O(\sin x) \text{ равномерно при } \mu \rightarrow 0$$

для интервалов изменения x , в которых $\sin x \neq 0$;

$$e^{-\mu x} - 1 = o(\mu^{1/2}) \text{ неравномерно при } \mu \rightarrow 0;$$

$$e^{-\mu x} - 1 = O(\mu) \text{ неравномерно при } \mu \rightarrow 0;$$

$$\sqrt{x + \mu} - \sqrt{x} = o(\mu^{3/4}) \text{ неравномерно при } \mu \rightarrow 0;$$

$$\sqrt{x + \mu} - \sqrt{x} = O(\mu) \text{ неравномерно при } \mu \rightarrow 0.$$

2.2 Равномерное и неравномерное асимптотические разложения

Напомним основные определения для функции одной переменной.

Определение 1. Пусть функции $\varphi_n(\mu) \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a (окрестность не содержит саму точку a). Последовательность $\{\varphi_n(\mu)\}$ называется *асимптотической* при $\mu \rightarrow a$, если для любого n выполняется

$$\varphi_{n+1}(\mu) = o(\varphi_n(\mu)) \quad (\mu \rightarrow a).$$

Иногда такую последовательность называют *калибровочной*.

Определение 2. Пусть функция $f(\mu)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a и $\{\varphi_n(\mu)\}$ – калибровочная последовательность при $\mu \rightarrow a$. Функция $f(\mu)$ разлагается в асимптотический ряд

$$f(\mu) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(\mu) \quad (\mu \rightarrow a), \quad (5)$$

где a_n – постоянные, если при любом натуральном числе N выполняется

$$f(\mu) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(\mu) + o(\varphi_N(\mu)) \quad (\mu \rightarrow a). \quad (6)$$

или

$$f(\mu) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(\mu) + O(\varphi_{N+1}(\mu)) \quad (\mu \rightarrow a). \quad (7)$$

Ряд (5) называется *асимптотическим разложением (приближением)* функции $f(\mu)$ по калибровочной последовательности $\{\varphi_n(\mu)\}$ при $\mu \rightarrow a$. Равенство (6) называют *асимптотическим представлением порядка N функции $f(\mu)$ по калибровочной последовательности $\{\varphi_n(\mu)\}$ при $\mu \rightarrow a$* . Слагаемое $o(\varphi_N(\mu))$ определяет погрешность представления (6).

Рассмотрим асимптотическое разложение функции двух переменных $f(x, \mu)$ по калибровочной последовательности $\{\varphi_n(\mu)\}$ при $\mu \rightarrow a$. Естественно, что коэффициенты разложения уже не постоянные, а зависят от переменной x :

$$f(x, \mu) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \varphi_n(\mu), \quad \mu \rightarrow a. \quad (8)$$

Этот факт может привести к тому, что при некоторых значениях переменной x член $a_{n-1}(x) \varphi_{n-1}(\mu)$ асимптотического разложения (8) будет меньше, чем следующий член $a_n(x) \varphi_n(\mu)$, а значит ряд (8) перестанет быть асимптотическим при этих x .

Определение 3. Асимптотическое разложение (8) называется равномерным, если при $\mu \rightarrow a$

$$f(x, \mu) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n(x) \varphi_n(\mu) + R_N(x, \mu), \quad (9)$$

где оценка

$$R_N(x, \mu) = O(\varphi_N(\mu)) \quad (10)$$

равномерна для всех рассматриваемых x .

Для того чтобы условия равномерности (9), (10) выполнялись, необходимо чтобы для каждого n слагаемое $a_n(x)\varphi_n(\mu)$ было мало по сравнению с предыдущим $a_{n-1}(x)\varphi_{n-1}(\mu)$. Поскольку при $\mu \rightarrow a$ имеем $\varphi_n(\mu) = o[\varphi_{n-1}(\mu)]$, для равномерности разложения должно требоваться, чтобы для всех рассматриваемых x функция $a_n(x)$ была *не более сингулярной, чем $a_{n-1}(x)$* . Иначе говоря, каждый член должен быть малой поправкой к предыдущему члену независимо от значения x . Рассмотрим несколько примеров, чтобы понять, что это означает.

Используя ряд Тейлора для $\sin \mu$ и $\cos \mu$, получим асимптотическое разложение функции $\sin(x + \mu)$ при $\mu \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \sin(x + \mu) &= \sin x \cos \mu + \cos x \sin \mu = \sin x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu^{2n}}{(2n)!} + \\ &+ \cos x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\mu^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x + \mu \cos x - \frac{\mu^2}{2!} \sin x - \\ &\quad - \frac{\mu^3}{3!} \cos x + \frac{\mu^4}{4!} \sin x + \frac{\mu^5}{5!} \cos x + \dots \end{aligned}$$

Совокупность $\{\mu^n\}$ образует калибровочную последовательность при $\mu \rightarrow 0$. Коэффициенты при всех степенях μ ограничены при любых значениях x : $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$. Поэтому $a_n(x)$ не более сингулярно, чем $a_{n-1}(x)$ для всех x . Значит это разложение равномерно.

Разложим для малых μ функцию $\sqrt{x + \mu}$. Получим

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \mu} &= \sqrt{x} \left(1 + \frac{\mu}{x}\right)^{1/2} = \\ &= \sqrt{x} \left(1 + \frac{\mu}{2x} - \frac{\mu^2}{8x^2} + \frac{\mu^3}{16x^3} + \dots\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Все члены этого разложения, кроме первого, обладают особенностью в точке $x = 0$. Степень x в знаменателе члена разложения (11) больше степени предыдущего члена и значит $a_n(x) = 1/x^n$ будет расти быстрее, чем $a_{n-1}(x) = 1/x^{n-1}$, то есть функция $a_n(x)$ более сингулярна, чем $a_{n-1}(x)$ при $x \rightarrow 0$. Следовательно, разложение (11) не является равномерным. Справедливость его нарушается в окрестности $x = 0$.

Возникает необходимость определения *области неравномерности разложения*, то есть множества значений x , для которых нарушается справедливость асимптотического разложения. В некоторых случаях размеры области неравномерности можно оценить при предположении о том, что два последовательных члена имеют один и тот же порядок:

$$a_n(x)\varphi_n(\mu) = O(a_{n-1}(x)\varphi_{n-1}(\mu)).$$

Для представления (11) это даёт $x = O(\mu)$ или $\mu/x = O(1)$.

Не всегда разложение функции в сходящийся ряд даёт асимптотический ряд для этой функции. Равномерно сходящийся ряд функции необязательно даёт равномерное асимптотическое разложение. Рассмотрим равномерно сходящийся

ряд Тейлора для всех t :

$$e^{-\mu t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\mu t)^n}{n!}.$$

Обрезание этого ряда даст асимптотическое представление для $e^{-\mu t}$ при $\mu \rightarrow 0$, если $t = O(1)$. В случае $t = O(\mu^{-1})$, величина μt не мала, и усечённый ряд не будет обладать свойствами асимптотического представления.

3 Регулярные возмущения

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu), \quad y(0, \mu) = y_0, \quad (12)$$

где μ изменяется в некоторой окрестности значения $\mu = 0$. Если это не так, то всегда можно добиться этого заменой параметра.

Как известно, из теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра и начальных условий при наличии определённых ограничений на функцию $f(y, t, \mu)$, решение $y(t, \mu)$ задачи (12) существует и является непрерывной функцией t и μ на множестве $t \in [0, T]$, $|\mu| < \mu_0$. Из этой теоремы следует, что при $\mu \rightarrow 0$ выполняется

$$y(t, \mu) = y_0(t) + r(t, \mu), \quad (13)$$

где $y_0(t)$ является решением задачи

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, 0), \quad y(0) = y_0, \quad (14)$$

а $r(t, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$. Формулу (13) можно рассматривать как асимптотическое представление решения $y(t, \mu)$ по малому μ .

Уравнение (12) называют *возмущённым уравнением*, а уравнение (14) – *невозмущённым уравнением*. Теория, которая обосновывает асимптотическое представление по малому параметру μ , часто называется *теорией возмущения*.

Для получения детальной оценки функции $r(t, \mu)$ необходима дополнительная информация о функции $f(y, t, \mu)$.

Утверждение 1. Пусть в области D функция $f(y, t, \mu)$ обладает непрерывными частными производными по y и μ . Тогда $r(t, \mu) = O(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$.

Действительно, существование производной по μ даёт возможность написать

$$y(t, \mu) = y_0(t) + \frac{\partial y(t, \theta\mu)}{\partial \mu} \mu, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

и установить тем самым, что $r(t, \mu) = O(\mu)$. Следующая теорема утверждает, что для $y(t, \mu)$ можно получить асимптотическую формулу с остаточным членом более высокого порядка малости, чем $O(\mu)$.

Теорема 1. Пусть в некоторой области D переменных y, t, μ функция $f(y, t, \mu)$ обладает непрерывными и равномерно ограниченными частными производными по y и μ до порядка $n + 1$ включительно. Тогда существует сегмент $[0, T]$, на котором для решения $y(t, \mu)$ задачи (12) справедливо асимптотическое представление

$$y(t, \mu) = y_0(t) + \mu \frac{\partial y(t, 0)}{\partial \mu} + \dots + \frac{\mu^n}{n!} \frac{\partial y(t, 0)}{\partial \mu} + \varepsilon_{n+1}(t, \mu), \quad (15)$$

где $\varepsilon_{n+1}(t, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$, $0 \leq t \leq T$, причём $\varepsilon_{n+1}(t, \mu) = O(\mu^{n+1})$ (представление равномерно).

Коэффициенты при μ^m в разложении (15) можно найти следующим образом. Подставляем в уравнение и в начальное

условие (12) выражение для y в виде ряда

$$y = y_0(t) + \mu y_1(t) + \dots \quad (16)$$

Приравнивая после подстановки члены с одинаковыми степенями μ в левой и правой частях уравнения, а также в начальных условиях, получим:

$$\frac{dy_0}{dt} = f(y_0, t, 0), \quad y_0(0) = y_0, \quad (17)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial f(y_0, t, 0)}{\partial y} y_1 + \frac{\partial f(y_0, t, 0)}{\partial \mu}, \quad y_1(0) = 0, \quad (18)$$

.....

Уравнение для y_n имеет линейную структуру

$$\frac{dy_n}{dt} = \frac{\partial f(y_0, t, 0)}{\partial y} y_n + \Phi_n, \quad y_n(0) = 0, \quad (19)$$

где Φ_n зависит только t и предшествующих $y_i, i < n$.

В случаи, если начальное условие задачи Коши также зависит от параметра μ , представляем его в виде ряда по степеням μ :

$$y_0(\mu) = y_0^0 + y_0^1 \mu + \dots$$

Дифференциальные уравнения (17)-(19) при этом не меняются, начальные условия принимают вид:

$$y_0(0) = y_0, \quad y_1(0) = y_0^1, \quad \dots, \quad y_i(0) = y_0^i, \quad \dots$$

В теореме 1 рассматривается функция $f(y, t, \mu)$, которая непрерывна и обладает непрерывными производными до

определённого порядка, то есть достаточно гладкая или, как говорят, регулярная функция по y и μ . Возмущения, подчиняющиеся требованиям теоремы, называются *регулярными возмущениями*.

Метод, рассмотренный выше, верен и для случая, когда исследуется система дифференциальных уравнений или дифференциальное уравнение более высокого порядка.

Пример 1. Найти асимптотическое представление с точностью до $O(\mu^3)$ для решения $y(t, \mu)$ задачи Коши:

$$\frac{dy}{dt} = -4\mu t - y^2, \quad y(1) = 1. \quad (20)$$

Решение. Искомое решение ищем в виде

$$y = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \dots$$

Подставим его в уравнение (20) и в начальные условия:

$$\begin{aligned} & y_0'(t) + \mu y_1'(t) + \mu^2 y_2'(t) + \dots = \\ & = -4\mu t - (y_0^2(t) + 2\mu y_0(t)y_1(t) + 2\mu^2 y_0(t)y_2(t) + \mu^2 y_1^2(t) + \dots), \\ & y_0(1) + \mu y_1(1) + \mu^2 y_2(1) + \dots = 1. \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ , получаем систему

$$\begin{aligned} y_0' &= -y_0^2, \quad y_0(1) = 1, \\ y_1' &= -4t - 2y_0 y_1, \quad y_1(1) = 0, \\ y_2' &= -y_1^2 - 2y_0 y_2, \quad y_2(1) = 0, \end{aligned}$$

.....

Из первого уравнения и начального условия находим $y_0(x) = 1/t$. Подставляем его во второе уравнение, получаем

$$y_1' = -4t - \frac{2y_1}{t}, \quad y_1(1) = 0.$$

Отсюда

$$y_1(t) = \frac{1}{t^2} - t^2.$$

Подставляем найденные $y_0(t)$, $y_1(t)$ в третье уравнение, получаем

$$y_2' = -\left(\frac{1}{t^2} - t^2\right)^2 - \frac{2y_2}{t}, \quad y_2(1) = 0.$$

Решив это линейное уравнение, найдём

$$y_2(t) = -\frac{32}{21t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{7}t^5.$$

Следовательно, решение задачи имеет вид

$$y = \frac{1}{t} + \mu \left(\frac{1}{t^2} - t^2\right) + \mu^2 \left(-\frac{32}{21t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{7}t^5\right) + O(\mu^3).$$

□

Во многих практических задачах возникает вопрос нахождения периодических решений уравнения, имеющее в правой части нелинейное слагаемое:

$$y'' + a^2y = f(t, y, y', \mu). \quad (21)$$

Будем предполагать, что в некоторой области D функция $f(t, y, y', \mu)$ достаточно гладкая по всем аргументам. Уравнение имеет периодическое решение, если функция $f(t, y, y', \mu)$

периодическая по t . Решение так же ищут в виде ряда (16). Произвольные постоянные, возникающие при отыскании $y_0(t)$, $y_1(t)$, \dots , определяются уже не из начальных условий, а из условий периодичности.

Пример 2. Найти 2π -периодическое решение уравнения

$$y'' + 3y = 2 \sin t + \mu y'^2 \quad (22)$$

с точностью до $O(\mu^3)$.

Решение. Функцию ищем в виде $y = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \dots$. Нужно найти три члена $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, чтобы обеспечить точность $O(\mu^3)$. Используя такой же алгоритм, как в предыдущем примере, сначала находим

$$y_0'' + 3y_0 = 2 \sin t.$$

Общее решение имеет вид

$$y_0(t) = \sin t + C_1 \cos \sqrt{3} t + C_2 \sin \sqrt{3} t.$$

Из условия 2π -периодичности: $y_0(0) = y_0(2\pi)$, $y_0'(0) = y_0'(2\pi)$ находим $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ и, следовательно, $y_0(t) = \sin t$. Далее,

$$y_1'' + 3y_1 = y_0'^2 = \cos^2 t$$

Отсюда, условие периодичности даст решение

$$y_1(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Наконец,

$$y_2'' + 3y_2 = 2y_0' y_1' = 2 \sin t \cos 2t,$$

что даёт

$$y_2 = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{6} \sin 3t.$$

Итак,

$$y = \sin t + \mu \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) + \mu^2 \left(\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{6} \sin 3t \right) + O(\mu^3).$$

□

4 Метод усреднения

При нарушении условий теоремы 1 метод, используемый в предыдущем разделе, не применим. В зависимости от того какое условие нарушено, используют разные алгоритмы построения уже *нерегулярных*, или как говорят, *сингулярных возмущений*.

В теореме 1 говорится о гладкости правой части уравнения (12) на конечном сегменте $[0, T]$. Но часто физическая задача решается на произвольно большом промежутке времени, например, на сегменте $[0, L/\mu]$, где L – не зависящая постоянная от малого μ . Продолжение регулярного возмущения на сегмент $[0, L/\mu]$ больший, чем $[0, T]$, не всегда является правомочным, так как асимптотическое разложение функции многих переменных могут иметь области неравномерности. Продемонстрируем это на примере.

Колебание массы, соединённой с нелинейной пружиной, описываются уравнением Дюффинга

$$u'' + u + \mu u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad u'(0) = 0, \quad (23)$$

где μ – маленькое положительное число. Решая задачу на регулярные возмущения, найдём

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \mu u_1 + O(\mu^2) = \\ &= a \cos t + \mu a^3 \left[-\frac{3t}{8} \sin t + \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) \right] + O(\mu^2). \end{aligned} \quad (24)$$

На конечном сегменте $t \in [0, T]$ полученное представление справедливо. Рассмотрим бесконечный интервал $t \in [0, +\infty)$. Функция $t \sin t$ приводит к тому, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_1}{u_0} = \infty$, то есть u_1 более сингулярно, чем u_0 при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, разложение (24) не является приближением к решению при $t \rightarrow \infty$. Как говорят, бесконечная область является источником неравномерности. Слагаемое $t \sin t$ называется *вековым членом*, или *секулярным*.

Справедливость разложения (24) нарушается не только при бесконечном t ; при временах порядка $t = O(\mu)$ второй член сравнивается с первым, что противоречит понятию асимптотического представления.

Для описания нелинейных колебательных процессов на промежутках времени порядка $1/\mu$, больших по сравнению с периодом колебаний, используют так называемый *метод усреднения*, который был развит Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым. Основной приём метода усреднения заключается в том, что правые части сложных дифференциальных уравнений и быстро изменяющиеся параметры системы заменялись "сглаженными" усреднёнными функциями, не содержащими времени t . По сути, разделяют движения на медленные и быстрые. После этой процедуры уравнения становятся проще.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \mu Y(y, t), \quad y(0) = y^0. \quad (25)$$

Далее определим процедуру усреднение по формуле

$$\bar{Y}(\eta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(\eta, t) dt, \quad (26)$$

где η при интегрировании считается параметром. В случае ограниченных периодических по t функций (с периодом T') усреднение производится по формуле:

$$\bar{Y}(\eta) = \frac{1}{T'} \int_0^{T'} Y(\eta, t) dt. \quad (27)$$

Предполагается справедливым также соотношение

$$\frac{d\bar{Y}}{d\eta} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial Y}{\partial \eta}(\eta, t) dt. \quad (28)$$

Поставим в соответствие уравнению (25), так называемое усреднённое уравнение

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu \bar{Y}(\eta), \quad \eta(0) = y^0. \quad (29)$$

Справедлива следующая теорема.

Терема 2. *Пусть:*

1. *В некоторой области $|y| \leq b$, $0 \leq t < \infty$, функция $Y(y, t)$ непрерывна и равномерно ограничена вместе с производной первого порядка по y .*

2. При $|y| \leq b$ существует среднее значение (26), а также справедливо (28), причём предельный переход в (26) и (28) равномерен относительно $\eta \in [-b, b]$.

3. Решения y и η задач (25) и (29) существуют и принадлежат $(-b, b)$ при $0 \leq t \leq L/\mu$, где постоянная L не зависит от μ .

Тогда равномерен относительно $t \in [0, L/\mu]$ предельный переход

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} (y - \eta) = 0. \quad (30)$$

Теорема справедлива и в случае, когда y – есть вектор-функция.

Применим методику к слабо-нелинейному уравнению второго порядка

$$u'' + \omega_0^2 u = \mu f(u, u'). \quad (31)$$

При $\mu = 0$ уравнение имеет периодическое решение $u = a_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$, где a_0, θ_0 – постоянные и, значит $u' = -\omega_0 a_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)$.

При $\mu \neq 0$ сделаем замену

$$u = a(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)), \quad (32)$$

$$u' = -a(t)\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta(t)) \quad (33)$$

в (31), получим систему уравнений на $a(t)$ и $\theta(t)$:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{\omega_0} \sin \varphi f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi], \quad (34)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu}{a\omega_0} \cos \varphi f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi], \quad (35)$$

где $\varphi = \omega_0 t + \theta$. Правые части уравнений (34) и (35) периодичны по φ , ограничены, и, следовательно, $a' = O(\mu)$, $\theta' = O(\mu)$. В силу малости μ это означает, что функции $a(t)$, $\theta(t)$ слабо меняются со временем и их изменения за время $T = 2\pi/\omega_0$, равное периоду правых частей, очень мало. Указанное свойство следовало ожидать, потому что оно изначально было заложено, когда вместо производной

$$u' = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta) - a\theta' \sin(\omega_0 t + \theta) + a' \cos(\omega_0 t + \theta)$$

от функции (32) использовалось приближённое выражение для замены (33). Предполагалось, что $|a'| \ll |a\omega_0|$, $|\theta'| \ll |\theta\omega_0|$.

Усредняя по формуле (27) правые части уравнений (34), (35) на интервале $t \in [0, 2\pi/\omega_0]$, получим

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin \varphi f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi] d\varphi, \quad (36)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu}{2a\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos \varphi f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi] d\varphi, \quad (37)$$

где мы учли, что $d\varphi = \omega_0 dt$. Запишем (36) и (37) в компактной форме:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2\omega_0} f_1(a), \quad (38)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\mu}{2a\omega_0} g_1(a), \quad (39)$$

где $f_1(a)$, $g_1(a)$ – коэффициенты первой гармоники ряда Фурье функции $f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi]$.

Более подробно ознакомиться с методом усреднения можно по книгам [6]–[8].

Пример 1. Методом усреднения найти решение уравнения Дюффинга

$$u'' + \omega_0^2 u = -\mu u^3, \quad u(0) = a_0, \quad u'(0) = 0. \quad (40)$$

Решение. Для уравнения (40) находим $f(u, u') = -u^3$. Следовательно,

$$f[a \cos \varphi, -a\omega_0 \sin \varphi] = -a^3 \cos^3 \varphi.$$

Подставим в систему (36)–(37):

$$a' = 0, \quad \theta' = \frac{3}{8} \mu \frac{a^2}{\omega_0},$$

что даёт

$$a = \text{const}, \quad \theta = \frac{3}{8} \mu \frac{a^2}{\omega_0} t + \theta_0.$$

Таким образом, в первом приближении имеем

$$u = a_0 \cos \omega_0 \left[1 + \frac{3}{8} \mu \frac{a_0^2}{\omega_0^2} \right] t + O(\mu). \quad (41)$$

□

Пример 2. В общей теории относительности уравнение траектории планеты в метрике Шварцшильда определяется интегралом [9]

$$\varphi = \int_{r_{min}}^r \frac{dr}{r^2} M \left[\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{M^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \right]^{-1/2}, \quad (42)$$

где \mathcal{E}_0 – полная энергия, M – момент импульса, $r_g = 2m_0G/c^2$ – гравитационный радиус Солнца, m_0 – масса Солнца. Найти поправку к кеплеровой траектории.

Решение. Полагая $\mathcal{E}_0 = mc^2 + E$, представим (42) в виде

$$2m \left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2} \right) + \frac{E^2}{c^2} + \frac{2\alpha M^2}{mc^2 r^3} = \frac{M^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2,$$

где $\alpha = Gmm_0$. После замены переменных $u = p_0/r$, $p_0 = M^2/m\alpha$ получим уравнение

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{mc^2 p_0} u \right) - 2u = \frac{Ep_0}{\alpha} \left(2 + \frac{E}{mc^2} \right). \quad (43)$$

Продифференцировав это уравнение по φ , найдём

$$u'' + u = 1 + \frac{3\alpha}{mc^2 p_0} u^2. \quad (44)$$

Произведём подстановку $x = u - 1$, тогда (44) приобретает вид

$$x'' + x = \mu(x + 1)^2, \quad \mu = \frac{3\alpha}{mc^2 p_0}. \quad (45)$$

Для планет Солнечной системы величина $\mu \ll 1$. Используя метод усреднения, ищем x в виде $x = a \cos(\varphi + \theta(\varphi))$. Из формул (36), (37), следует

$$a' = 0, \theta' = -\frac{\mu}{2a\pi} \int_0^{2\pi} (a \cos \psi + 1)^2 \cos \psi d\psi = -\mu.$$

Полагая $\theta(0) = 0$, получим

$$x = a_0 \cos[(1 - \mu)\varphi].$$

Подставляя $u(\varphi)$ в (43), получим $a_0 = e$ с точностью до μ^2 , где

$$e^2 = 1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}$$

– эксцентриситет. В результате находим уравнение траектории

$$r = \frac{p_0}{1 + e \cos(1 - \mu)\varphi}. \quad (46)$$

Если в (46) положить $\mu = 0$, то радиальная координата r возвращается к своему начальному значению при изменении угла φ на величину периода $T_0 = 2\pi$. Траектория планеты является замкнутой (эллипс).

Когда $\mu \neq 0$, угловой период отличен от 2π и равен $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(1 - \mu) \approx 2\pi(1 + \mu)$. Траектория планеты является незамкнутой, происходит смещение эллипса. За время одного оборота оно равно

$$\Delta\varphi = T - T_0 = 2\pi\mu = 6\pi\alpha/(mc^2 p_0).$$

□

4.1 Уравнение с медленно изменяющимися параметрами

Дифференциальные уравнение в физике в качестве коэффициентов содержат различные параметры – масса, частоты и амплитуды внешних сил и т.п., которые могут изменяться со временем. Если параметры меняются медленно по сравнению с искомой физической величиной, то с успехом можно использовать метод усреднения.

Рассмотрим уравнение вида

$$u'' + \omega^2(t)u = \mu f(u, u'), \quad \mu \rightarrow 0. \quad (47)$$

Решение будем искать в виде

$$u = \omega^{-1/2} a(t) \cos(\varphi(t) + \alpha(t)), \quad (48)$$

где $\varphi = \int^t \omega dt$. Возьмём производную

$$\begin{aligned} u' = & -\omega^{1/2} a \sin(\varphi + \alpha) - \omega^{-1/2} a \alpha' \sin(\varphi + \alpha) + \\ & + \omega^{-1/2} a' \cos(\varphi + \alpha) - \frac{\omega' a}{2\omega^{3/2}} \cos(\varphi + \alpha). \end{aligned} \quad (49)$$

Предположим, что

$$|\alpha'| \ll |\alpha\omega|, \quad |a'| \ll |a\omega|, \quad |\omega'| \ll \omega^2,$$

то есть функции $a(t)$, $\alpha(t)$, $\omega(t)$ слабо меняются за время $T = 2\pi/\omega$. Тогда, в производной (49) первое слагаемое будет намного больше остальных.

В силу этих соображений сделаем замену переменных

$$u = \omega^{-1/2} a \cos(\varphi + \alpha), \quad u' = -\omega^{1/2} a \sin(\varphi + \alpha) \quad (50)$$

в уравнении (47). Получим систему уравнений:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{\omega^{1/2}} \sin(\varphi + \alpha) f(u, u') + a \frac{\omega'}{2\omega} \cos 2(\varphi + \alpha), \quad (51)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\mu}{a\omega^{1/2}} \cos(\varphi + \alpha) f(u, u') - \frac{\omega'}{2\omega} \sin 2(\varphi + \alpha). \quad (52)$$

Усредняем (51), (52):

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi\omega^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(\varphi + \alpha) f(u, u'), \quad (53)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi a\omega^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(\varphi + \alpha) f(u, u'). \quad (54)$$

Как видно из (53) и (54), в нулевом приближении получим $a' = 0$, $\alpha' = 0$ и, следовательно, величины a , α – постоянные.

Решение (48) в окрестности точек t_0 , удовлетворяющих условию $\omega(t_0) = 0$, становится неприменимым. Определим окрестность, в которой ещё можно использовать (48). Пусть $\omega^2(t)$ имеет в точке t_0 , например, простой нуль: $\omega^2(t) = b(t - t_0)$, тогда условие $|\omega'| \ll \omega^2$ даст окрестность $|t - t_0| \gg b^{-1/3}$, в которой применимо приближение.

Пример 3. Длина математического маятника изменяется по закону $l = l(t)$. Найти решение уравнения движения маятника в окрестности положения равновесия.

Решение. Лагранжиан маятника, описывающий линейные колебания,

$$L = \frac{1}{2}ml^2u'^2 - \frac{1}{2}mglu^2.$$

Представим уравнение движения

$$\frac{d}{dt}(l^2 u'^2) + gl u = 0$$

в стандартной форме

$$u'' + \omega^2 u = -2\frac{l'}{l}u', \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (55)$$

Условию $|\omega'| \ll \omega^2$ соответствует $|l'| \ll \omega l$ или $|l'| \ll \sqrt{gl}$, то есть длина маятника медленно меняется, отношение l'/l играет роль малого параметра.

Решение уравнения (55) ищем в виде

$$u = \frac{a(t)}{\sqrt{\omega}} \cos \left[\int^t \omega dt + \alpha(t) \right].$$

В нашем случае $f(u, u') = -2u' = 2\sqrt{\omega} a \left[\int^t \omega dt + \alpha(t) \right]$. Используя формулы (53), (54), находим $a' = -(l'/l)a$, $\alpha' = 0$, следовательно,

$$u = Cl^{-3/4} \cos \left[\int^t \sqrt{\frac{g}{l}} dt + \alpha_0 \right]. \quad (56)$$

□

4.2 Движение в быстро осциллирующем внешнем поле

Изучим противоположную ситуацию – будем полагать, что уравнение содержит быстро изменяющиеся параметры. Идею решения таких уравнений изложим в рамках физической задачи [10].

Рассмотрим уравнение вида

$$Mq'' = -\frac{\partial U}{\partial q} + Q(q, t), \quad (57)$$

которое описывает движение частицы в потенциальном поле $U(q)$ и на неё действует быстроосциллирующая сила $Q(q, t)$ с частотой $\omega \gg T_0^{-1}$, где T_0 – порядок величины периода движения в поле $U(q)$ при отсутствии других сил. Здесь не предполагается сила $Q(q, t)$ слабой по сравнению с силами, действующие в поле $U(q)$, однако, будем считать, что вызываемое этой силой колебательное смещение частицы малым. При таких допущениях частица будет двигаться по "сглаженной" траектории и осциллировать вокруг неё с частотой ω .

Решение уравнения (57) ищем в виде

$$q = \xi + u, \quad |\xi| \gg |u|, \quad (58)$$

где ξ – медленно изменяющейся функция (она описывает гладкую траекторию), u – быстроосциллирующая функция. Подставляя (58) в (57) и разлагая по степеням u с точностью до членов первого порядка, получим

$$\begin{aligned} M(\xi'' + u'') &= -\frac{\partial U}{\partial \xi} - u \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \dots \\ &+ Q(\xi, t) + u \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \dots \end{aligned} \quad (59)$$

Усредняя (59) по периоду $2\pi/\omega$, найдём

$$M\xi'' = -\frac{\partial U}{\partial \xi} + \left\langle u \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right\rangle + \dots \quad (60)$$

Выделим из (59) быстроосциллирующие слагаемые, получим уравнение

$$Mu'' = Q(\xi, t) + \dots, \quad (61)$$

из которого находим

$$u' = \frac{1}{M} \int^t Q(\xi, t) dt. \quad (62)$$

Остальные слагаемые не вошли в (61), так как малы по сравнению с u'' , которое пропорционально большой величине ω^2 .

Поскольку

$$u \frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{d}{dt} \left(u \int^t dt \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right) - u' \int^t dt \frac{\partial Q}{\partial \xi},$$

то среднее значение равно

$$\begin{aligned} \left\langle u \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right\rangle &= - \left\langle u' \int^t dt \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right\rangle = - \frac{1}{M} \left\langle \int^t Q dt \cdot \int^t dt \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right\rangle = \\ &= - \frac{1}{2M} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \left[\int^t dt Q \right]^2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (60) можно представить в виде

$$M\xi'' = - \frac{\partial U_{\text{эф}}}{\partial \xi}, \quad (63)$$

$$U_{\text{эф}} = U(\xi) + \frac{1}{2M} \left\langle \left[\int^t dt Q(\xi, t) \right]^2 \right\rangle. \quad (64)$$

Как видно из формулы (64), действие быстроосциллирующий силы проявляется в изменении потенциальной энергии. Дополнительное слагаемое квадратично зависит от амплитуды переменной силы.

Пример 4. Рассмотрим уравнение движения

$$ml^2\varphi'' = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} + Q(\varphi, t),$$

где $U = -mgl \cos \varphi$, $Q = mls_0 \omega^2 \cos \omega t \sin \varphi$, $\omega \gg \sqrt{g/l} = \omega_0$. Это уравнение описывает маятник, точка подвеса которого движется вертикально по закону $s = s_0 \cos \omega_0 t$. Функция $\varphi(t)$ – угол отклонение маятника от вертикали. Необходимо найти эффективную потенциальную энергию.

Решение.

$$\begin{aligned} \left[\int^t dt Q(\xi, t) \right]^2 &= m^2 l^2 s_0^2 \omega^4 \sin^2 \xi \left[\int^t dt \cos \omega t \right]^2 = \\ &= m^2 l^2 s_0^2 \omega^3 \sin^2 \xi \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Усредним:

$$\begin{aligned} \left\langle \left[\int^t dt Q(\xi, t) \right]^2 \right\rangle &= m^2 l^2 s_0^2 \omega^3 \sin^2 \xi \langle \sin^2 \omega t \rangle = \\ &= m^2 l^2 s_0^2 \omega^3 \sin^2 \xi \cdot \frac{1}{(2\pi/\omega)} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} m^2 l^2 s_0^2 \omega^2 \sin^2 \xi. \end{aligned}$$

Получим

$$U_{\text{эф}} = -mgl \cos \xi + \frac{1}{4} m s_0^2 \omega^2 \sin^2 \xi =$$

$$= -mgl \left[\cos \xi - \left(\frac{s_0 \omega}{2l\omega_0} \right)^2 \sin^2 \xi \right].$$

□

Пример 5. Частица движется в электромагнитном поле, которое является суперпозицией статических полей $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ и переменного быстроосциллирующего поля $\mathbf{E}_\sim(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}_\sim(\mathbf{r}, t)$. Найдём уравнение движения частицы по сглаженной траектории [11].

Решение. Ищем решение уравнения

$$m\mathbf{r}'' = \mathbf{F}^{(0)} + e\mathbf{E}_\sim + \frac{e}{c}[\mathbf{r}' \mathbf{B}_\sim], \quad (65)$$

$$\mathbf{F}^{(0)} = e\mathbf{E}_0 + \frac{e}{c}[\mathbf{r}' \mathbf{B}_0].$$

в виде $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$, где $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{u}|$. Тогда (65) примет вид

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x}'' + \mathbf{u}'') &= \mathbf{F}^{(0)}(x) + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{F}^{(0)} + \left(\mathbf{u}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \right) \mathbf{F}^{(0)} + e\mathbf{E}_\sim(\mathbf{x}) + \\ &+ e(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{E}_\sim + \frac{e}{c}[\mathbf{x}' \mathbf{B}_\sim] + \frac{e}{c}[\mathbf{x}'(\mathbf{u}\nabla) \mathbf{B}_\sim] + \frac{e}{c}[\mathbf{u}' \mathbf{B}_\sim]. \end{aligned} \quad (66)$$

Усредняя (66) получим

$$\begin{aligned} m\mathbf{x}'' &= \mathbf{F}^{(0)}(x) + \\ &+ \left\langle e(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{E}_\sim + \frac{e}{c}[\mathbf{x}'(\mathbf{u}\nabla) \mathbf{B}_\sim] + \frac{e}{c}[\mathbf{u}' \mathbf{B}_\sim] \right\rangle, \end{aligned} \quad (67)$$

$$m\mathbf{u}'' = (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{F}^{(0)} + \left(\mathbf{u}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \right) \mathbf{F}^{(0)} + e\mathbf{E}_\sim(\mathbf{x}) + \frac{e}{c}[\mathbf{x}' \mathbf{B}_\sim]. \quad (68)$$

Далее предположим, что

$$\mathbf{E}_\sim(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos \omega t, \quad \mathbf{B}_\sim(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cos \omega t, \quad (69)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{c}{\omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

В силу малости двух первых членов в правой части (69), получим

$$\mathbf{u} = -\frac{e}{m\omega^2} \left(\mathbf{E} \cos \omega t + \frac{1}{c} [\mathbf{x}' \mathbf{B}] \sin \omega t \right). \quad (70)$$

Подставим (70) в (67), учтём (69) и опустим члены $\sim x'^2/c^2$ (нерелятивистский предел), в результате найдём

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{F}^{(0)}(x) - \frac{e^2}{2m\omega^2} ((\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E} + [\mathbf{E} \operatorname{rot}\mathbf{E}]). \quad (71)$$

Поскольку $\nabla E^2/2 = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E} + [\mathbf{E} \operatorname{rot}\mathbf{E}]$, то получим уравнение

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{F}^{(0)} - \nabla U(\mathbf{x}),$$

$$U(\mathbf{x}) = \frac{e^2}{2m} \left\langle \left(\int^t dt \mathbf{E}_{\sim}(\mathbf{r}, t) \right)^2 \right\rangle = \frac{e^2}{4m\omega^2} E^2(\mathbf{r}).$$

□

5 Метод ВКБ

Если в уравнении (12) функция $f(y, t, \mu)$ терпит разрыв при $\mu = 0$, то выше описанные методы не применимы. Рассмотрим пример

$$\mu y' = ay + b, y(0, \mu) = y^0, a = \text{const}, b = \text{const}. \quad (72)$$

Если разделить это уравнение на μ , то сингулярность правой части уравнения при $\mu = 0$ будет очевидной: $y' = (ay + b)/\mu$.

Его точное решение имеет вид

$$y(t, \mu) = \left(y^0 + \frac{b}{a} \right) e^{at/\mu} - \frac{b}{a}. \quad (73)$$

Полагая $\mu = 0$ в уравнении (72), получим $\bar{y} = -\frac{b}{a}$. Анализируя (73), можно видеть, что близость y к \bar{y} имеет место лишь при выполнении некоторых *специальных* условий, которых не было в теореме 1 о регулярных возмущениях. А именно, если рассматривать решение начальной задачи при $t \geq 0$, то $y \rightarrow \bar{y}$, если $a < 0$, а $\mu \rightarrow 0+$ (или $a > 0$, а $\mu \rightarrow 0-$). Если же $\mu \rightarrow 0$ произвольным образом, то решение y предела не имеет и является неограниченным. Кроме того, стоит вопрос об удовлетворении начального условия $y(0, \mu) = y^0$, которое, вообще говоря, не равно $-b/a$.

Таким образом, в сингулярно возмущённых уравнениях пренебрегать малыми членами можно лишь при выполнении особых условий и для выяснения этих условий требуется стро-

ить другую теорию.

В этом разделе мы будем рассматривать дифференциальное уравнения второго порядка

$$\mu^2 y'' \pm q(x)y = 0$$

при $\mu \rightarrow 0$. Оно относится к типу дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Перепишем его как

$$y'' \pm k^2 q(x)y = 0, \quad (74)$$

где $k = 1/\mu$ – большой параметр при $\mu \rightarrow 0$. Построим асимптотическое приближение *методом ВКБ* (WKBJ - Вентцель, Крамер, Бриллюэн, Джефрис), который имеет много названий в физике – квазиклассическое приближение, коротковолновое приближение, высокочастотное приближение и т.д.

Рассмотрим уравнение

$$y'' + k^2 q(x)y = 0 \quad (75)$$

на конечном отрезке $I = [a, b]$. Будем предполагать, что $k \rightarrow +\infty$ и функция $q(x) > 0$, бесконечно дифференцируема на I . Асимптотическое представление будем искать в виде

$$y = \exp \left[\int_a^x \left(ik\alpha_{-1}(t) + \alpha_0(t) + \frac{\alpha_1(t)}{ik} + \dots + \frac{\alpha_n(t)}{(ik)^n} + \dots \right) dt \right]. \quad (76)$$

Сделаем подстановку

$$\frac{y'}{y} = \omega, \quad (77)$$

тогда для ω получим уравнение Риккати:

$$\omega' + \omega^2 = -k^2\omega. \quad (78)$$

Из (76) и (77) имеем

$$\omega = ik\alpha_{-1}(x) + \alpha_0(x) + \frac{\alpha_1(x)}{ik} + \dots + \frac{\alpha_n(x)}{(ik)^n} + \dots \quad (79)$$

Подставляем это выражение в (78)

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (ik)^{-n} \alpha'_n(x) + \left(\sum_{n=-1}^{\infty} (ik)^{-n} \alpha_n(x) \right)^2 = -k^2 q(x). \quad (80)$$

Приравнявая коэффициенты при k^2 , а затем при k , найдем

$$\alpha_{-1} = \pm \sqrt{q(x)}, \quad \alpha_0 = -\frac{q'(x)}{4q(x)}. \quad (81)$$

Функция α_1 для знака "+" равна

$$\alpha_1 = \frac{q''}{8q^{3/2}} - \frac{5(q')^2}{32q^{5/2}}. \quad (82)$$

Продолжая процесс, можно вывести рекуррентную систему уравнений для функций α_n :

$$\alpha_{n+1} = -\frac{1}{2\sqrt{q(x)}} \left[\sum_{j=0}^n \alpha_j(x) \alpha_{n-j}(x) + \alpha'_n(x) \right]. \quad (83)$$

Уравнение (75) имеет два формальных асимптотических решения:

$$y_{1,2}(x, k) = q^{-1/4}(x) \exp \left(\pm ik \int_a^x \sqrt{q(t)} dt \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\pm ik)^{-n} \int_a^x \alpha_n(t) dt + \dots \right\}. \quad (84)$$

Можно утверждать, что существуют решения уравнения (75), которые разлагаются в асимптотические ряды (84).

Теорема 2. *Для любого целого $N \geq 1$ уравнение (75) имеет решения вида*

$$y_{1,2}(x, k) = q^{-1/4}(x) \exp \left(\pm ik \int_a^x \sqrt{q(t)} dt \right) \times \\ \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} (\pm ik)^{-n} \int_a^x \alpha_n(t) dt \right\} [1 + O(k^{-N})], \quad (85)$$

Асимптотику решений $y_{1,2}(x, k)$ можно дифференцировать по x и по k любое число раз.

Подобная теорема справедлива для уравнения

$$y'' - k^2 q(x) y = 0. \quad (86)$$

Теорема 3. *Для любого целого $N \geq 1$ уравнение (86) имеет решения вида*

$$y_{3,4}(x, k) = q^{-1/4}(x) \exp \left(\pm k \int_a^x \sqrt{q(t)} dt \right) \times \\ \times \exp \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} (\pm k)^{-n} \int_a^x \alpha_n(t) dt \right\} [1 + O(k^{-N})], \quad (87)$$

Асимптотику решений $y_{3,4}(x, k)$ можно дифференцировать по x и по k любое число раз.

Для функций $\alpha_n(t)$ имеются подобные рекуррентные соотношения (83).

Асимптотические представления (85), (87) непригодны в точках, где функция $q(x)$ обращается в нуль. Такие точки называются *точками поворота*. Термин происходит из квантовой механики, где некоторые задачи для уравнения Шрёдингера приводятся к уравнению типа (75). При наличии точек поворота используется другой алгоритм построения асимптотики [12].

Первые члены рядов (85), (87), или *главные асимптотики* имеют вид

$$y_{1,2} = q^{-1/4}(x) \exp \left(\pm ik \int_a^x \sqrt{q(t)} dt \right) (1 + O(k^{-1})), \quad (88)$$

$$y_{3,4} = q^{-1/4}(x) \exp \left(\pm k \int_a^x \sqrt{q(t)} dt \right) (1 + O(k^{-1})). \quad (89)$$

Вместо (88) можно взять пару вещественных функций:

$$\bar{y}_1(x, k) = q^{-1/4}(x) \left[\cos \left(k \int_a^x \sqrt{q(t)} dt \right) + O(k^{-1}) \right], \quad (90)$$

$$\bar{y}_2(x, k) = q^{-1/4}(x) \left[\sin \left(k \int_a^x \sqrt{q(t)} dt \right) + O(k^{-1}) \right]. \quad (91)$$

Если для справедливости асимптотик (85), (87) требуется $q(x) \in C^\infty[a, b]$, то для главных асимптотик (88)-(91) достаточно $q(x) \in C^2[a, b]$. Асимптотические формулы (88)-(91)

можно дифференцировать два раза:

$$y_{1,2}^{(j)} = \frac{(\pm ik\sqrt{q})^j}{q^{1/4}} \exp\left(\pm ik \int_a^x \sqrt{q(t)} dt\right) (1 + O(k^{-1})), \quad (92)$$

$$y_{3,4}^{(j)} = \frac{(\pm k\sqrt{q})^j}{q^{1/4}} \exp\left(\pm k \int_a^x \sqrt{q(t)} dt\right) (1 + O(k^{-1})), \quad (93)$$

где $j = 1, 2$ – порядок дифференцирования. Оценка остаточного члена остаётся равномерной для $x \in I$. Слагаемые, появляющиеся при дифференцировании множителя $q^{-1/4}$ малы по сравнению со слагаемыми, которые возникают при дифференцировании экспоненты.

Именно формулы (88)-(91) называют *ВКБ-приближением*. Для глубоко изучения метода можно воспользоваться, например, книгой [12].

Пример 1. Рассмотрим одномерное уравнение Шрёдингера

$$\hbar^2 \psi''_{rr} + 2m(\mathcal{E} - U)\psi(r) = 0.$$

Здесь, \hbar – постоянная Планка, m – масса, \mathcal{E} – энергия частицы, потенциальная энергия имеет вид $U(r) = V_0 V(r/L)$, где V_0, L – характерные параметры задачи.

Введём новую переменную $x = r/L$, величину $E = \mathcal{E}/V_0$ и малый безразмерный параметр

$$h = \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0}L} = \frac{\lambda}{L} \rightarrow 0,$$

где λ – длина волны де Бройля. Уравнение приводится к виду

$$\psi''_{xx} + \frac{(E - V)}{h^2} \psi(x) = 0,$$

которое относится к типу уравнения (74). Здесь, большой параметр равен $k = 1/h$.

Следуя алгоритму раздела, для случая $E > V$ получим

$$\begin{aligned} \psi = \frac{1}{(E - V)^{1/4}} & \left[C_+ \exp \left(\frac{i}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{E - V(t)} dt \right) + \right. \\ & \left. + C_- \exp \left(-\frac{i}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{E - V(t)} dt \right) + O(h) \right]. \end{aligned}$$

Данное асимптотическое разложение нужно уточнять вблизи точек поворота, когда $V = E$.

Также предполагается, что функция $U(r)$ будет меняться медленно на расстоянии характерного изменения решения ψ :

$$\left| \frac{\psi'_r}{\psi} \right| \gg \left| \frac{(\mathcal{E} - U)'_r}{\mathcal{E} - U} \right| \sim \frac{1}{L}.$$

Это и позволяет ввести малый параметр h .

Различные физические тонкости метода ВКБ в квантовой механике можно изучить, например, в [13].

□

Пример 2. Используя ВКБ-приближение, найти собственные значения и собственные функции для уравнения

$$y'' + k^2 q(x)y = 0$$

с краевыми условиями $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ при больших значениях параметра k . Здесь $q(x) > 0$ на отрезке $x \in [0, 1]$.

Решение. ВКБ-приближение даёт общее решение уравнения

$$y \approx \frac{c_1 \cos \left(k \int_0^x \sqrt{q(t)} dt \right) + c_2 \sin \left(k \int_0^x \sqrt{q(t)} dt \right)}{\sqrt[4]{q(x)}}. \quad (94)$$

Подставляем (94) в граничное условие $y(0) = 0$, имеем

$$\frac{c_1}{\sqrt[4]{q(0)}} \approx 0, \text{ или } c_1 = 0,$$

откуда

$$y \approx c_2 q^{-1/4}(x) \sin \left(k \int_0^x \sqrt{q(t)} dt \right).$$

Подстановка этого выражения в граничное условие $y(1) = 0$ даст

$$c_2 q^{-1/4}(x) \sin \left(k \int_0^1 \sqrt{q(t)} dt \right) = 0.$$

Для существования ненулевого решения необходимо, чтобы постоянная c_2 была отлична от нуля. Поэтому $\sin \left(k \int_0^1 \sqrt{q(t)} dt \right) = 0$ или

$$k \int_0^1 \sqrt{q(t)} dt = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (95)$$

Значение $n = 0$ даёт тривиальное решение, поэтому его исключают. Таким образом, в первом приближении собствен-

ные числа определяются формулой

$$k_n = n\pi \left[\int_0^1 \sqrt{q(t)} dt \right]^{-1}, \quad (96)$$

а соответствующие им собственные функции – формулой

$$y_n = q^{-1/4}(x) \sin \left[k_n \int_0^x \sqrt{q(t)} dt \right]. \quad (97)$$

□

6 Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Найти 2-3 члена асимптотического представления по степеням малого параметра μ :

1. $y' = y^2 + 2\mu x^{-1}$, $y(1) = -1$.

2. $xy' = \ln y + \mu x^2$, $y(1) = 1$.

3. $y' = 6\mu x^{-1} - y^2$, $y(1) = 1 + 3\mu$.

Найти приближённо периодические решения с периодом, равный периоду правой части уравнения; μ – малый параметр:

4. $y'' + 5y = \cos 2t + \mu y^2$.

5. $y'' + 3y + y^3 = 2\mu \cos t$.

6. $y'' + y^2 = 1 + \mu \sin t$.

Методом усреднения решить приближённо уравнения:

7. $u'' + \omega_0^2 u = -\mu(1 - u^2)u'$, $u(0) = a_0$, $u'(0) = 0$.

8. $u'' + u = -\mu u'|u'|$.

9. $u'' + u - \mu(u' - u^3) = 0$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = 0$.

10. Доказать, что при $q(x) = (ax + b)^{-4}$ формула (84)

даёт точное решение

$$y_{1,2}(x, k) = q^{-1/4}(x) \exp \left(\pm ik \int_a^x \sqrt{q(t)} dt \right)$$

для уравнений (75).

11. Используя ВКБ-приближение, найти собственные значения и собственные функции для уравнения

$$y'' + k^2 q(x)y = 0$$

с краевыми условиями $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$ при больших значениях параметра k . Здесь $q(x) > 0$ на отрезке $x \in [0, 1]$.

7 ОТВЕТЫ

$$1. y = -\frac{1}{x} + \mu \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \mu^2 \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{x} + \frac{8}{3x^2} - \frac{1}{x^3}\right) + O(\mu^3).$$

$$2. y = 1 + \mu (x^2 - x) + \frac{\mu^2 x(1-x)^3}{6} + O(\mu^3).$$

$$3. y = \frac{1}{x} + 3\mu + \mu^2 \left(\frac{3}{x^2} - 3x\right) + O(\mu^3).$$

$$4. y = \cos 2t + \mu \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{22} \cos 4t\right) + \mu^2 \left(\frac{17}{110} \cos 2t + \frac{1}{682} \cos 6t\right) + O(\mu^3).$$

$$5. y = \mu \cos t + \mu^3 \left(-\frac{3}{8} \cos t + \frac{1}{24} \cos 3t\right) + O(\mu^5).$$

$$6. y_1 = 1 + \mu \sin t - \frac{\mu^2}{4} (1 + \cos 2t) + O(\mu^3),$$

$$y_2 = -1 - \frac{\mu}{3} \sin t + \frac{\mu^2}{36} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 2t\right) + O(\mu^3).$$

$$7. u = a \cos(\omega_0 t + \theta_0), \quad a^2 = 4 \left(1 + (4/a_0^2 - 1)e^{-\mu t}\right)^{-1}.$$

$$8. u = \frac{a_0}{1 + \frac{4}{3\pi} \mu a_0 t} \cos(t + \theta_0).$$

$$9. u = \left(\frac{2u_0 e^{\mu t/2}}{\sqrt{4 - 3u_0^2(1 - e^{-\mu t})}} + O(\mu) \right) \cos(t + O(\mu)).$$

$$11. k_n = (n + 1/2)\pi \left[\int_0^1 \sqrt{q(t)} dt \right]^{-1},$$

$$y_n = q^{-1/4} \cos \left[k_n \int_0^x \sqrt{q(t)} dt \right].$$

Указание: при дифференцировании общего решения использовать формулу (92).

Литература

- [1] Мухарлямов Р.К. Асимптотические методы в теоретической физике. Часть I / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КФУ, 2016. – 47 с.
- [2] Даишев Р.А. Дифференциальные уравнения / Р.А. Даишев, А.Ю. Даньшин – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 150 с.
- [3] Мухарлямов Р.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 54 с.
- [4] Мухарлямов Р.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 58 с.
- [5] Мухарлямов Р.К. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КФУ, 2013. – 30 с.
- [6] Найфе А. Методы возмущений / А. Найфе – М.: Мир, 1976. – 454 с.

- [7] Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов , Ю.А. Митропольский – М.: Наука, 1974. – 408 с.
- [8] Митропольский Ю.А. Методы усреднения в нелинейной механике / Ю.А. Митропольский - Киев.: Наукова думка, 1971. – 440 с.
- [9] Ландау Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 536 с.
- [10] Ландау Л.Д. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 224 с.
- [11] Гапонов А.В., Миллер М.А., ЖЭТФ, 1958, Т.34, С.242
- [12] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М.В. Федорюк – М.: Либроком, 2009. – 352 с.
- [13] Ландау Л.Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 808 с.

Мухарлямов Руслан Камилевич
Панкратьева Татьяна Николаевна

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ**

Часть II

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 15.09.2016.

Бумага офсетная. Печать цифровая.

Форм. 60×84 1/16. Гарнитура "Times New Roman". Усл. печ. л. 2,79.

Уч.-изд. л. 2.62. Тираж 30. Заказ 214/9.

Отпечатано с готового оригинала макета
в типографии Издательства Казанского университета.

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37

тел. (843) 233-73-59, 233-73-28.