

УДК 517.54

**ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ
РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ НА ПОЛИГОНАЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ
ПОВЕРХНОСТЯХ С ПРОСТЫМИ ТОЧКАМИ
ВЕТВЛЕНИЯ**

С.Р. Насыров, И.З. Фаизов

Аннотация

В статье исследуется смешанная обратная краевая задача по параметру x на римановой поверхности с точками ветвления в случае, когда известная часть границы полигональна. Получено интегральное представление решения, в которое входят акцессорные параметры. Доказана локальная единственность решения.

Введение

Смешанные обратные краевые задачи являются важным классом краевых задач с неизвестной (свободной) границей. В этих задачах ищутся область с частично неизвестной границей и аналитическая в этой области функция по заданным краевым условиям. Как правило, на известной части границы задается одно условие, на неизвестной – два. Смешанные обратные краевые задачи находят важные применения во многих областях механики сплошных сред, в частности, в задачах аэрогидромеханики, кавитационном обтекании профилей, теории фильтрации, задачах взрыва на выброс, при изучении движения плазмы и др. Многие математические постановки смешанных обратных краевых задач возникли при изучении конкретных задач механики. По поводу различных постановок таких задач и библиографии мы отсылаем к обзорным статьям и книгам [1–4].

В настоящей работе изучается смешанная обратная краевая задача по параметру x на римановой поверхности с точками ветвления в случае, когда известная часть границы полигональна.

Впервые постановку смешанной обратной краевой задачи по параметру x дал В.Н. Монахов [3]. Им исследовалась разрешимость задачи для областей с полигональной известной границей, а затем аппроксимацией – и для произвольных спрямляемых границ. В работах [5, 6] было замечено, что с использованием результатов [3] можно доказать разрешимость задачи на римановых поверхностях без точек ветвления с достаточно произвольной границей. В [7] был предложен приближенный метод решения для случая, когда известная часть границы полигональна. Отметим также работы С.Р. Тлюстен [8–11], в которых также исследовалась разрешимость задачи на римановых поверхностях.

Упомянем еще несколько работ, близких к данной тематике. В работе [12] исследовалась разрешимость задачи по параметру x в случае, когда длины звеньев известной части границы не фиксируются, в [13, 14] получены некоторые достаточные условия однолиственности решения. В [15] была рассмотрена аналогичная задача для двусвязной области, в [4] исследована задача для однорядной решетки. В [16]

рассмотрена внешняя смешанная обратная краевая задача по параметру x , доказана разрешимость аналога уравнения Ф.Д. Гахова, служащего для определения точки – образа бесконечно удаленной точки искомой области.

В данной статье дается постановка смешанной обратной краевой задачи по параметру x на римановых поверхностях с простыми точками ветвления в случае полигональной известной части границы. Получено интегральное представление решения, которое зависит от нескольких аксессуарных параметров. При фиксированных аксессуарных параметрах это представление дает решение задачи, но не для данной, а для другой полигональной римановой поверхности, которая имеет те же величины углов, но отличается длинами сторон и положением точек ветвления.

Изучается зависимость решения от этих параметров. Основным результатом является доказательство теоремы о локальной единственности решения: при малом изменении аксессуарных параметров соответствующая полигональная риманова поверхность не может оставаться неизменной.

1. Постановка задачи

Под *римановой поверхностью* σ над $\overline{\mathbb{C}}$ будем понимать пару $\sigma = (R, \pi)$, где R – абстрактная риманова поверхность, $\pi : R \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ – голоморфное отображение, называемое *проекцией*.

Риманова поверхность с краем над $\overline{\mathbb{C}}$ – это пара $\overline{\sigma} = (\overline{R}, \overline{\pi})$, где $\overline{R} = R \cup \partial R$ – риманова поверхность с краем ∂R , $\overline{\pi} : \overline{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ – отображение, голоморфное на R и непрерывное на \overline{R} (*проекция*).

Римановы поверхности (с краем) называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм между ними, сохраняющий проекции. Эквивалентные поверхности, как правило, отождествляются.

Пусть $\overline{\sigma} = (\overline{R}, \overline{\pi})$ – компактная риманова поверхность с краем ∂R , состоящим из одной компоненты, и кривая Γ обходит ∂R в положительном направлении. Будем говорить, что $\overline{\sigma}$ ограничена кривой γ , если $\overline{\pi}(\Gamma) = \gamma$. В дальнейшем не будем делать различия между дугами кривой Γ и их проекциями на \mathbb{C} . Пусть $R = \overline{R} \setminus \partial R$, $\pi = \pi_R$. Если $\overline{\sigma} = (\overline{R}, \overline{\pi})$ ограничена кривой γ , то будем говорить, что риманова поверхность $\sigma = (R, \pi)$ также ограничена кривой γ . Ясно, что в этом случае $\overline{\sigma}$ однозначно определяет σ , и наоборот, если задана σ , то $\overline{\sigma}$ восстанавливается по ней однозначно.

Зафиксируем числа $r \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{C}$ и $l > 0$. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – некоторые числа, $\alpha_k \in (0, 2)$, $\beta_k = \alpha_k - 1$, $k = 1, \dots, n$,

$$\sum_{k=1}^n \beta_k = -(2r + 1). \quad (1)$$

Пусть D_ζ – верхняя полуплоскость ζ -плоскости,

$$\Delta = \{ \vec{s} = (s_2, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2} \mid -1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < 1 \},$$

$$\tilde{D}_\zeta^r = \{ (w_0^1, \dots, w_0^r) \in D_\zeta^r \mid w_0^j \neq w_0^i, j \neq i, j, i = 1, \dots, r \}.$$

Введем пространство $\Lambda = \Lambda_r(\alpha_1, \dots, \alpha_n, l, C)$ римановых поверхностей (R_0, π_0) , для которых существует конформный гомеоморфизм $G : D_\zeta \rightarrow R_0$ такой, что $\pi_0 \circ G = \tilde{z}$, где

$$\tilde{z}(\zeta, \vec{s}, \vec{w}_0) = C + \frac{l}{\pi i} \int_{-1}^{\zeta} \Pi(\zeta, \vec{s}) P(\zeta, \vec{w}_0) d\zeta \quad (2)$$

есть обобщенный интеграл Кристоффеля – Шварца,

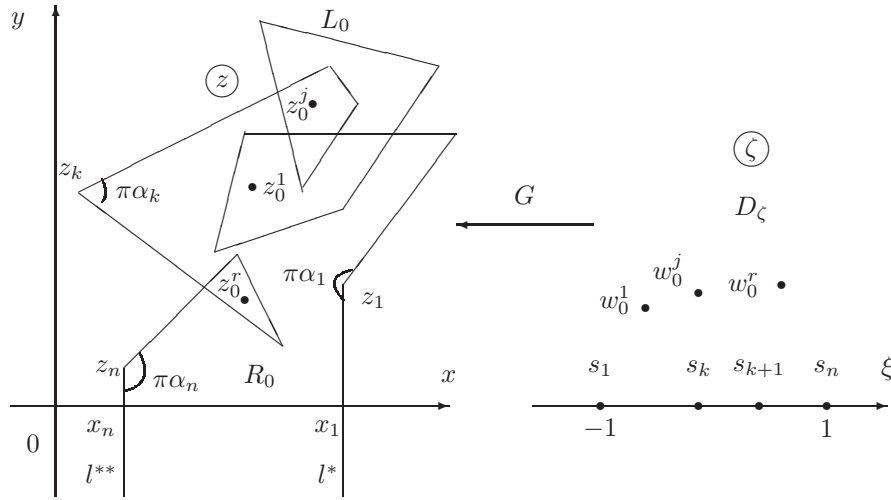


Рис. 1

$$\Pi(\zeta, \vec{s}) = \prod_{j=1}^n (\zeta - s_j)^{\beta_j}, \quad s_1 = -1, \quad s_n = 1, \quad \vec{s} = (s_2, \dots, s_{n-1}) \in \Delta, \quad (3)$$

$$P(\zeta, \vec{w}_0) = \prod_{k=1}^r (\zeta - w_0^k)(\zeta - \bar{w}_0^k), \quad \vec{w}_0 = (w_0^1, \dots, w_0^r) \in D_\zeta^r. \quad (4)$$

Рассмотрим поверхность (R_0, π_0) из пространства $\Lambda = \Lambda_r(\alpha_1, \dots, \alpha_n, z_1, l)$ (рис. 1). Она имеет r простых точек ветвления $z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^r$ и ограничена некоторой ломаной L_0 с вершинами в точках $z_j = \tilde{z}(s_j, \vec{s}, \vec{w}_0)$, $j = 1, \dots, n$, и в бесконечно удаленной точке. Точки s_j , $j = 1, \dots, n$, являются прообразами конечных вершин ломаной, точки w_0^k , $k = 1, \dots, r$, — прообразами точек ветвления. Угол поверхности (R_0, π_0) в вершине z_j равен $\pi\alpha_j$. Обозначим через L_1 часть ломаной L_0 , получающуюся из нее отбрасыванием двух лучей l^* и l^{**} , идущих из точек z_1 и z_n вниз.

Ясно, что если (R_0, π_0) определяется отображением (2), то $C = z_1$, $l = x_1 - x_n$, где $x_k = \operatorname{Re} z_k$, и, таким образом,

$$\tilde{z}(\zeta, \vec{s}, \vec{w}_0) = z_1 + \frac{x_1 - x_n}{\pi i} \int_{-1}^{\zeta} \Pi(\zeta, \vec{s}) P(\zeta, \vec{w}_0) d\zeta.$$

Задача. Требуется разбить (R_0, π_0) на две части (R_1, π_1) и (R_2, π_2) кривой L_2 , которая принадлежит множеству $GR(x_n, x_1)$ графиков Γ_f непрерывных функций f на $[x_n, x_1]$, так, чтобы граница (R_1, π_1) состояла из ломаной L_1 и кривой L_2 , и существовал гомеоморфизм $Z: \overline{D_\zeta} \rightarrow \overline{R_1}$, конформный в D_ζ и такой, что $\operatorname{Re} z(\xi) = H(\xi)$, $|\xi| \geq 1$, где $z = \pi_1 \circ Z$.

При этом предполагается, что $\tilde{H}(\xi) = H(-1/\xi)$ на $(-1, 1)$ является дифференцируемой функцией с гельдеровой производной $\tilde{H}'(\xi) = 1/\xi^2 h(-1/\xi) > 0$, где $h(\xi) = H'(\xi)$, причем на концах отрезка h имеет степенные особенности:

$$h(\xi) = |\xi - 1|^{\gamma^* - 1} |\xi + 1|^{\gamma^{**} - 1} h^*(\xi),$$

где $h^*(\xi) > 0$ и ограничена при $1 < |\xi| < \infty$, $\gamma^* > 0$, $\gamma^{**} > 0$.

Из условий, наложенных на $H(\xi)$, следует, что $|h(\xi)| \leq C|\xi|^{-2}$ в окрестности бесконечности.

Будем называть функцию $z(\zeta)$ решением задачи, поскольку по ней сразу однозначно определяются L_2 , (R_1, π_1) и (R_2, π_2) .

2. Построение интегрального представления решения

Ограничимся рассмотрением случая, когда $\alpha_1 \leq 1$, $\alpha_n \leq 1$. Пусть $z(\zeta)$ – решение задачи. Запишем уравнения прямых, на которых лежат стороны полигона L_1 :

$$a_k x - b_k y = c_k, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Пусть $-1 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ – прообразы вершин ломаной L_1 при отображении z , $\zeta_0^1, \dots, \zeta_0^r$ – прообразы точек ветвления. Обозначим $\vec{t} = (t_2, t_3, \dots, t_{n-1})$, $\vec{\zeta}_0 = (\zeta_0^1, \dots, \zeta_0^r)$.

Для нахождения производной функции $z(\zeta)$ имеем следующую краевую задачу в верхней полуплоскости D_ζ :

$$a_k dx(t)/dt - b_k dy(t)/dt = 0, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (5)$$

$$dx(t)/dt = h(t), \quad t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \quad (6)$$

Данная задача является краевой задачей Гильберта с разрывными коэффициентами в D_ζ :

$$\operatorname{Re}[(a(t) + ib(t))dz(t)/dt] = c(t), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

где

$$a(t) = \begin{cases} a_k, & t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, \dots, n-1, \\ 1, & t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} b_k, & t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, \dots, n-1, \\ 0, & t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \end{cases}$$

$$c(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 1], \\ h(t), & t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Напомним, как ведет себя производная конформного отображения в окрестности точки, соответствующей угловой.

Справедлива (см., например, [17])

Лемма 1. Пусть $z = F(\zeta)$ – конформное отображение круга $|\zeta| < 1$ на область D , при котором точка $\zeta_0 = e^{i\gamma_0}$ переходит в угловую точку $z_0 = F(e^{i\gamma_0})$, образованную дугами $\Gamma^1, \Gamma^2 \in C^{1+\beta}$, $\beta > 0$, лежащими на границе Γ области D . Тогда для производной $dF/d\zeta$ в этой точке имеет место представление

$$dF(\zeta)/d\zeta = (\zeta - \zeta_0)^{\alpha-1} f(\zeta),$$

где $f(\zeta)$ – непрерывная в окрестности $\zeta = \zeta_0$ функция, причем $f(\zeta_0) \neq 0$.

Разумеется, аналогичный результат справедлив для конформных отображений полуплоскости.

Из леммы 1 следует, что решение задачи (5), (6) следует искать в классе функций $dz(\zeta)/d\zeta$, ограниченных в точках, соответствующих вершинам полигона с углами, большими π , имеющих интегрируемые особенности в остальных и простые нули в точках ζ_0^j , $j = 1, \dots, r$, порядка 1.

Построим каноническую функцию однородной задачи Гильберта, соответствующую задаче (5), (6).

Запишем краевые условия задачи Гильберта в виде

$$\operatorname{Re}[(a(t) + ib(t))\Phi(t)] = \frac{h(t)}{\prod_{j=1}^r |t - \zeta_0^j|^2},$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{dz(\zeta)/d\zeta}{P(\zeta, \vec{\zeta}_0)}.$$

Пусть ветвь функции $\Pi(\zeta, \vec{t})$ зафиксирована так, что $\operatorname{Re} \Pi(\zeta, \vec{t}) = 0$ вдоль вещественной оси. Вещественная и мнимая части функции $\Pi(\zeta, \vec{t})$ удовлетворяют условию (3). Функция $\Pi(\zeta, \vec{t})$ дает решение однородной задачи Гильберта. Поэтому можем взять функцию $\Pi(\zeta, \vec{t})$ за каноническую функцию однородной задачи. Запишем теперь решение краевой задачи Гильберта (см., например, [18]):

$$\Phi(\zeta) = \frac{\Pi(\zeta, \vec{t})}{\pi i} \int_{|\xi|>1} \frac{h(\xi)d\xi}{\Pi(\xi, \vec{t}) \prod_{j=1}^r |\xi - \zeta_0^j|^2 (\xi - \zeta)} + B(\zeta)\Pi(\zeta, \vec{t}), \quad (7)$$

где $B(\zeta)$ – некоторый многочлен.

Из (3) и (1) следует, что на бесконечности

$$|\Pi(\zeta, \vec{t})| \sim \frac{k}{|\zeta|^{2r+1}}.$$

Для того чтобы искомый контур был конечен, следует положить $B(\zeta) \equiv 0$, так как

$$\Pi(\zeta, \vec{t})P(\zeta, \vec{\zeta}_0) \sim \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

Итак, доказана

Теорема 1. Пусть $\alpha_1 \leq 1$ и $\alpha_n \leq 1$. Если существует решение задачи, то оно имеет вид

$$z(\zeta) = z(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0) = z_1 + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{\zeta} \Pi(\zeta, \vec{t})P(\zeta, \vec{\zeta}_0) d\zeta \times \int_{|\xi|>1} \frac{h(\xi)}{\Pi(\xi, \vec{t})P(\xi, \vec{\zeta}_0)(\xi - \zeta)} dt, \quad (8)$$

где $-1 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ – прообразы вершин ломаной и $\zeta_0^1, \dots, \zeta_0^r$ – прообразы точек ветвления.

Таким образом, для всех $(R, \pi) \in \Lambda$ решение задачи (если оно существует) имеет вид (8). Докажем, в некотором смысле, обратное утверждение.

Теорема 2. Для любых $\vec{t} \in \Delta$ и $\vec{\zeta}_0 \in \tilde{D}_\zeta^r$ формула (8) дает решение задачи для некоторого $(R, \pi) \in \Lambda$.

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{|\xi|>1} \frac{h(\xi) d\xi}{\prod(\xi, \vec{s}) P(\zeta, \vec{\zeta}_0)(\xi - \zeta)} &= \operatorname{Im} \int_{|\xi|>1} \frac{h(\xi)(\xi - \bar{\zeta}) d\xi}{\prod(\xi, \vec{s}) P(\zeta, \vec{\zeta}_0) |\xi - \zeta|^2} = \\ &= \operatorname{Im} \zeta \int_{|\xi|>1} \frac{h(\xi) d\xi}{\prod(\xi, \vec{s}) \prod_{j=1}^r |\xi - \bar{\zeta}_0^j|^2 |\xi - \zeta|^2} > 0 \end{aligned}$$

при $\zeta \in D_\zeta$, то в силу (8)

$$\frac{dz(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0)}{d\zeta} \neq 0,$$

$\zeta \in D_\zeta$, $\zeta \neq \zeta_0^j$, $j = 1, \dots, r$.

Следовательно, $z(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0)$ локально однолистка, за исключением точек $\zeta = \zeta_0^j$, $j = 1, \dots, r$. Рассмотрим пару (R_1, π_1) , где $R_1 = D_\zeta$, $\pi_1(\zeta) = z(\zeta)$.

Из формулы (8) с помощью формул Сохоцкого получим, что на участке $\{|\xi| \geq 1\}$ имеет место равенство $\operatorname{Re} z(\xi) = H(\xi)$. Так как $\tilde{H}'(t) > 0$, $t \in (-1, 1)$, где $\tilde{H}(t) = H(-1/t)$, то $z(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0)$ локально однолистка на участке $\{|\xi| > 1\}$, включая бесконечно удаленную точку, и соответствующая часть границы (R_1, π_1) является кривой L_2 из $GR(x_n, x_1)$. Приклеивая к (R_1, π_1) вдоль L_2 вертикальную однолистную полуполосу (R_2, π_2) с границей L_2 и лучами, идущими из концов L_2 вниз, получим полигональную риманову поверхность (R_0, π_0) .

Из анализа (8) на участке $\{|\xi| \leq 1\}$ получим, что границей (R_0, π_0) является $(n+1)$ -звенная ломаная, а угловые точки (R_0, π_0) имеют растворы $\pi\alpha_k$, $k = 1, \dots, n$. Таким образом, $(R_0, \pi_0) \in \Lambda$, и теорема 2 доказана. \square

3. Локальная единственность решения

Зафиксируем набор параметров $(\vec{t}, \vec{\zeta}_0) \in \Delta \times \tilde{D}_\zeta^r$. С помощью функции $z(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0)$, определенной по формуле (8), сопоставим данному набору параметров риманову поверхность $\sigma_1 = (R_1, \pi_1)$ с границей, состоящей из ломаной L_1 с вершинами z_1, \dots, z_n и некоторой кривой L_2 .

Достроим риманову поверхность $\sigma_1 = (R_1, \pi_1)$ до полигональной римановой поверхности $\sigma_0 = (R_0, \pi_0)$ путем приклеивания к ней однолистной вертикальной криволинейной полуполосы (R_2, π_2) с границей, состоящей из кривой L_2 и двух лучей, исходящих вниз из концов кривой L_2 . С помощью функции $\tilde{z}(\zeta, \vec{s}, \vec{w}_0)$, определенной по формуле (2), сопоставим полученной многоугольной римановой поверхности $\sigma_0 = (R_0, \pi_0) \in \Lambda$ набор параметров $(\vec{s}, \vec{w}_0) \in \Delta \times \tilde{D}_\zeta^r$. Этот набор определяется единственным образом.

Обозначим $(\vec{s}, \vec{w}_0) = q(\sigma_0)$. Тогда определена суперпозиция $(\vec{s}, \vec{w}_0) = p(\vec{t}, \vec{\zeta}_0) = q(\sigma_0(\vec{t}, \vec{\zeta}_0))$, действующая из $\Delta \times \tilde{D}_\zeta^r$ в $\Delta \times \tilde{D}_\zeta^r$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 3. *Отображение $p : \Delta \times \tilde{D}_\zeta^r \mapsto \Delta \times \tilde{D}_\zeta^r$ является локально однолистным, непрерывно дифференцируемым, и его якобиан отличен от нуля в $\Delta \times \tilde{D}_\zeta^r$.*

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$f : (\vec{t}, \vec{\zeta}_0) \mapsto (\vec{l}, \vec{z}_0), \quad g : (\vec{s}, \vec{w}_0) \mapsto (\vec{l}, \vec{z}_0),$$

где наборы параметров

$$(\vec{l}, \vec{z}_0) = (l_1, \dots, l_{n-2}, z_0^1, \dots, z_0^r),$$

$$(\vec{l}, \vec{z}_0) = (\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_{n-2}, \tilde{z}_0^1, \dots, \tilde{z}_0^r),$$

а l_k и \tilde{l}_k – длины сторон граничных ломаных, z_0^j , $j = 1, \dots, r$, и \tilde{z}_0^i , $i = 1, \dots, r$, – проекции точек ветвления римановых поверхностей, которые определяются отображениями (8) и (2) соответственно. Имеем

$$l_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| dz(\xi, \vec{t}, \vec{\zeta}_0) / d\xi \right| d\xi, \quad z_0^j = z(\zeta_0^j, \vec{t}, \vec{\zeta}_0), \quad (9)$$

$$\tilde{l}_k = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \left| d\tilde{z}(\xi, \vec{s}, \vec{w}_0) / d\xi \right| d\xi, \quad \tilde{z}_0^j = \tilde{z}(w_0^j, \vec{s}, \vec{w}_0), \quad (10)$$

где $k = 1, \dots, n-2$, $j = 1, \dots, r$.

Если покажем, что якобианы отображений f и g отличны от нуля, то отображение p будет локально представимо в виде суперпозиции $g^{-1} \circ f$, где g^{-1} – «ветвь» обратной к g функции, определенная в окрестности соответствующей точки. Значит, по теореме об обратной функции отображение p будет локально однолиственным, и его якобиан не равен нулю. Итак, докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Якобианы отображений f и g отличны от нуля в $\Delta \times \tilde{D}_\zeta^r$.*

Доказательство. Рассуждая как и в [3], покажем, что отображения f и g непрерывно дифференцируемы.

Придадим параметрам t_ν , $\nu = 2, \dots, n-1$, и ζ_0^j , $j = 1, \dots, r$, малые приращения (вариации).

Запишем вариации длин ломаной L_1 : δl_k , $k = 1, \dots, n-2$, и вариации проекций точек ветвлений римановой поверхности R_1 : δz_0^j , $j = 1, \dots, r$:

$$\delta l_k = \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{\partial l_k}{\partial t_\nu} \delta t_\nu + \sum_{j=1}^r \frac{\partial l_k}{\partial \zeta_0^j} \delta \zeta_0^j + \sum_{j=1}^r \frac{\partial l_k}{\partial \bar{\zeta}_0^j} \delta \bar{\zeta}_0^j, \quad k = 1, \dots, n-2,$$

$$\delta z_0^j = \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{\partial z_0^j}{\partial t_\nu} \delta t_\nu + \sum_{j=1}^r \frac{\partial z_0^j}{\partial \zeta_0^j} \delta \zeta_0^j + \sum_{j=1}^r \frac{\partial z_0^j}{\partial \bar{\zeta}_0^j} \delta \bar{\zeta}_0^j, \quad j = 1, \dots, r.$$

Для доказательства того, что якобиан отображения f не равен нулю, достаточно показать, что однородная система

$$\delta l_k = 0, \quad k = 1, \dots, n-2, \quad \delta z_0^j = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (11)$$

имеет только нулевое решение $\delta t_\nu = 0$, $\nu = 2, \dots, n-1$, и $\delta \zeta_0^j = 0$, $j = 1, \dots, r$, то есть при равенстве нулю вариаций геометрических величин δl_k , $k = 1, \dots, n-2$, и δz_0^j , $j = 1, \dots, r$, определяющих полигональную риманову поверхность, обращаются в нуль вариации постоянных δt_k и $\delta \zeta_0^j$.

Предположим противное. Тогда система (11) имеет ненулевое решение δt_ν , $\nu = 2, \dots, n-1$, $\delta \zeta_0^j$, $j = 1, \dots, r$. Рассмотрим вариацию $\delta z(\zeta) = \delta x(\zeta) + i\delta y(\zeta)$ функции $z(\zeta)$. Эта функция является решением следующей краевой задачи

$$a_\nu \delta x(t) - b_\nu \delta y(t) = \delta c_\nu, \quad t \in [t_\nu, t_{\nu+1}], \quad \nu = 1, \dots, n-1, \quad \delta x(t) = 0, \quad |t| > 1.$$

Докажем, что $\delta c_\nu = 0$, $\nu = 1, \dots, n-1$. Для этого запишем уравнения сторон ломаной в виде $(x - x_\nu) \cos \gamma_\nu \pi + (y - y_\nu) \sin \gamma_\nu \pi = 0$, или

$$x \cos \gamma_\nu \pi + y \sin \gamma_\nu \pi = x_\nu \cos \gamma_\nu \pi + y_\nu \sin \gamma_\nu \pi.$$

Здесь $\gamma_\nu \pi = -\sum_{j=1}^{\nu} (\alpha_j - 1)\pi$ – угол наклона нормали к ν -й стороне ломаной. Без ограничения общности можно считать, что $a_\nu = \cos \gamma_\nu \pi$, $b_\nu = \sin \gamma_\nu \pi$, $c_\nu = x_\nu \cos \gamma_\nu \pi + y_\nu \sin \gamma_\nu \pi$.

Имеем $x_{\nu+1} - x_\nu = -l_\nu \sin \gamma_\nu \pi$, $y_{\nu+1} - y_\nu = -l_\nu \cos \gamma_\nu \pi$. Если $\delta l_\nu = 0$, то учитывая, что γ_ν – константа, получаем, что $\delta x_{\nu+1} = \delta x_\nu$, $\delta y_{\nu+1} = \delta y_\nu$, $\nu = 1, \dots, n-1$. Так как $\delta x_1 = \delta y_1 = 0$, то $\delta x_\nu = \delta y_\nu = 0$, $\nu = 1, \dots, n$, откуда

$$\delta c_\nu = \delta x_\nu \cos \gamma_\nu \pi + \delta y_\nu \sin \gamma_\nu \pi = 0.$$

Итак, δz является решением однородной краевой задачи Гильберта

$$a_\nu \delta x(t) + b_\nu \delta y(t) = 0, \quad t \in [t_\nu, t_{\nu+1}], \quad \nu = 1, \dots, n-1, \\ \delta x(t) = 0, \quad |t| > 1.$$

Исследуем асимптотическое поведение функции $\delta(dz/d\zeta)$ в точках t_ν и на бесконечности. Найдем производную функции $z(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0)$ по ζ , а затем – ее вариацию по переменным t_ν , $\nu = 2, \dots, n-1$, ζ_0^j , $j = 1, \dots, r$.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dz(\zeta)}{d\zeta} &= \frac{1}{\pi i} \prod_{\nu=1}^n (\zeta - t_\nu)^{\alpha_\nu - 1} \prod_{j=1}^r (\zeta - \zeta_0^j)(\zeta - \bar{\zeta}_0^j) \times \\ &\quad \times \int_{|t|>1} \frac{h(t)dt}{\prod_{\nu=1}^n (t - t_\nu)^{\alpha_\nu - 1} \prod_{j=1}^r (t - \zeta_0^j)(t - \bar{\zeta}_0^j)(t - \zeta)}, \\ \delta \frac{dz(\zeta)}{d\zeta} &= \frac{1}{\pi i} \left[-\sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{\delta t_\nu (\alpha_\nu - 1)}{\zeta - t_\nu} - \sum_{j=1}^r \frac{\delta \zeta_0^j}{\zeta - \zeta_0^j} - \sum_{j=1}^r \frac{\delta \bar{\zeta}_0^j}{\zeta - \bar{\zeta}_0^j} \right] \times \\ &\quad \times \prod_{j=1}^r (\zeta - \zeta_0^j)(\zeta - \bar{\zeta}_0^j) \cdot \prod_{\nu=1}^n (\zeta - t_\nu)^{\alpha_\nu - 1} \times \\ &\quad \times \int_{|t|>1} \frac{h(t)}{t - \zeta} \cdot \frac{1}{\prod_{j=1}^r (t - \zeta_0^j)(t - \bar{\zeta}_0^j) \times \prod_{\nu=1}^n (t - t_\nu)^{\alpha_\nu - 1}} + \\ &\quad + \frac{1}{\pi i} \prod_{j=1}^r (\zeta - \zeta_0^j)(\zeta - \bar{\zeta}_0^j) \times \prod_{\nu=1}^n (\zeta - t_\nu)^{\alpha_\nu - 1} \times \\ &\quad \times \int_{|t|>1} \frac{h(t)}{t - \zeta} \cdot \frac{1}{\prod_{j=1}^r (t - \zeta_0^j)(t - \bar{\zeta}_0^j) \cdot \prod_{\nu=1}^n (t - t_\nu)^{\alpha_\nu - 1}} \times \\ &\quad \times \left[-\sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{\delta t_\nu (\alpha_\nu - 1)}{t - t_\nu} - \sum_{j=1}^r \frac{\delta \zeta_0^j}{t - \zeta_0^j} - \sum_{j=1}^r \frac{\delta \bar{\zeta}_0^j}{t - \bar{\zeta}_0^j} \right] dt. \quad (12) \end{aligned}$$

Пусть $\zeta \rightarrow -1$ (случай, когда $\zeta \rightarrow 1$, рассматривается аналогично). Тогда

$$\frac{d}{d\zeta}\delta z(\zeta) = (\zeta + 1)^{\alpha_1 - 1} \psi(\zeta) \int_{|t| > 1} \frac{(t + 1)^{\gamma_1 - \alpha_1}}{t - \zeta} \psi_1(t) dt, \quad (13)$$

где функция $\psi(\zeta)$ аналитична и не равна нулю в некоторой окрестности точки $\zeta = -1$, а $\psi_1(t)$ гельдерова и не обращается в нуль в окрестности точки $t = -1$ на прямой.

Из свойств интеграла типа Коши (см., например, [18, гл. 1, § 8]) получим, что

$$\delta z(\zeta) = O(1), \quad \zeta \rightarrow -1. \quad (14)$$

Аналогично покажем, что

$$\delta z(\zeta) = O(1), \quad \zeta \rightarrow 1. \quad (15)$$

Пусть $\zeta \rightarrow t_\nu$, $\nu = 2, \dots, n - 1$. Из (12) следует, что

$$\frac{d}{d\zeta}\delta z(\zeta) = (\zeta - t_\nu)^{\alpha_\nu - 2} \psi(\zeta),$$

где функция $\psi(t)$ аналитична в некоторой окрестности точки t_ν . Тогда

$$\delta z(\zeta) = \begin{cases} O((\zeta - t_\nu)^{\alpha_\nu - 1}), & \alpha_\nu < 1, \\ O(1), & \alpha_\nu > 1, \end{cases} \quad \zeta \rightarrow t_\nu. \quad (16)$$

Осталось рассмотреть случай, когда $\zeta \rightarrow \infty$. Тогда в силу (8) и с учетом (1) получим

$$\frac{d}{d\zeta}(\delta z(\zeta)) = I_1(\zeta) + I_2(\zeta),$$

где

$$I_1(\zeta) \sim \zeta^{-2} \Omega_1(\zeta) \Phi_1(\zeta), \quad I_2(\zeta) \sim \zeta^{-1} \Omega_2(\zeta), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Здесь

$$\Omega_1(\zeta) = \int_{|t| > 1} \frac{\phi(t)}{t - \zeta} dt, \quad \Omega_2(\zeta) = \int_{|t| > 1} \frac{\phi(t)}{t - \zeta} \Phi_2(t) dt,$$

где

$$\phi(t) = \frac{h(t)}{\Pi(t, \vec{t}) P(t, \vec{\zeta}_0)},$$

$\Phi_1(\zeta) = O(1)$, $\zeta \rightarrow \infty$, $\Phi_2(t) = O(t^{-1})$, $t \rightarrow \infty$. Поскольку функция $t^{-2}h(1/t)$ гельдерова, то после замены переменных получим

$$\Omega_1 = -w \int_{-1}^1 \frac{\phi(1/t)}{t(t-w)} dt,$$

где $w = 1/\zeta$. Поскольку функция $\phi(1/t)$ гельдерова, то из формул Сохоцкого следует, что $\Omega_1 \sim w = 1/\zeta$, $\zeta \rightarrow \infty$. Для Ω_2 аналогично получим, что $\Omega_2 \sim 1/\zeta$, $\zeta \rightarrow \infty$.

Следовательно, с учетом (17) получим $d(\delta z(\zeta))/d\zeta \sim C_1 \zeta^{-2}$, $\zeta(\zeta) \rightarrow \infty$, где C_1 — некоторая постоянная, а значит,

$$\delta z = O(1), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Теперь докажем, что

$$\delta z(\zeta_0^j) = 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (19)$$

Рассмотрим представление $z(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0)$ в окрестности точки ζ_0^j . С учетом того, что $z(\zeta_0^j, \vec{t}, \vec{\zeta}_0) = z_0^j$, получим

$$z(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0) = z_0^j + a_2(\zeta - \zeta_0^j)^2 + \dots = z_0^j + (\zeta - \zeta_0^j)^2 \Phi(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0),$$

где $\Phi(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0)$ – непрерывно дифференцируемая по всем параметрам и аналитическая в окрестности точки ζ_0^j функция. Тогда, в силу условия $\delta z_0^j = 0$ имеем

$$\delta z(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0) = -2(\zeta - \zeta_0^j) \delta \zeta_0^j \Phi(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0) + (\zeta - \zeta_0^j)^2 \delta \Phi(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0).$$

Следовательно, справедливо (19).

Рассмотрим функцию

$$w(\zeta) = \frac{\delta z}{(\zeta - t_1)(\zeta - t_n)\Pi(\zeta, \vec{t})P(\zeta, \vec{\zeta}_0)}. \quad (20)$$

Она аналитична в верхней полуплоскости, за исключением точек ζ_0^j , $j = 1, \dots, r$, в которых имеет в силу (19) устранимые особенности, непрерывна на вещественной оси, за исключением точек t_j , $j = 1, \dots, n$.

Докажем, что на вещественной оси, за исключением точек t_j , $j = 1, \dots, n$, выполняется соотношение $\text{Im } w(t) = 0$. Действительно, поскольку при пробегании переменной t по участку $[t_\nu, t_{\nu+1}]$ образ $z(t)$ будет пробегать по участку $[z_k, z_{k+1}]$, то аргументы функции δz и произведения совпадают либо отличаются на π , следовательно, их отношение есть вещественная величина.

По принципу симметрии продолжим функцию w в нижнюю полуплоскость плоскости ζ . Симметрия совершается относительно вещественной оси, за исключением, может быть, точек t_ν , $\nu = 1, \dots, n$. Поскольку в точках t_ν , $\nu = 1, \dots, n$, и ζ_0^j , $j = 1, \dots, r$, в силу (14)–(16) функция (20) имеет самое большее интегрируемые особенности, то получим, что в данных точках функция w имеет устранимые особенности. Поэтому функция w является голоморфной во всей плоскости ζ .

В силу (1) и (18) по теореме Лиувилля получим, что $w(\zeta) \equiv 0$. Следовательно, $\delta z(\zeta) = \delta z(\zeta, \vec{t}, \vec{\zeta}_0) \equiv 0$.

Воспользуемся формулой (12), чтобы доказать равенства $\delta t_\nu = 0$ и $\delta \zeta_0^j = 0$ для любых $\nu = 2, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, r$. Разделив равенство (12) на $(\zeta - t_\nu)^{\alpha_\nu - 1}$, получим

$$\frac{\delta t_\nu(\alpha_\nu - 1)}{\zeta - t_\nu} + O(1) = 0, \quad \zeta \rightarrow t_\nu.$$

Следовательно, $\delta t_\nu = 0$. Аналогично, разделив (12) на $(\zeta - \zeta_0^j)$, получим

$$\frac{\delta \zeta_0^j}{(\zeta - \zeta_0^j)^2} + O(1) \equiv 0, \quad \zeta \rightarrow \zeta_0^j.$$

Следовательно, $\delta \zeta_0^j = 0$.

Итак, доказано, что якобиан отображения f не равен нулю. Для функции g проводятся аналогичные рассуждения, которые местами упрощаются. Таким образом, лемма 2 доказана. \square

Из леммы 2, как отмечалось выше, следует утверждение теоремы 3. \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 05-01-00523 и № 06-01-81019-Бел).

Summary

S.R. Nasyrov, I.Z. Faizov. Local uniqueness of solution of a mixed boundary value problem for Riemann surfaces with branch-points.

A mixed boundary value problem for Riemann surfaces with branch-points, with boundary conditions depending on the parameter x is investigated. It is supposed that the known part of the boundary of the required surface is a polygon. We obtain an integral representation of solution to the problem; it depends on accessory parameters. Local uniqueness of the solution is proved.

Литература

1. *Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Елизаров А.М.* Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения // Итоги науки и техники. Сер. «Матем. анализ». – М.: ВИНТИ, 1987. – Т. 25. – С. 3–121.
2. *Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Елизаров А.М., Насыров С.Р.* Научный семинар по геометрической теории функций: основные результаты двух последних десятилетий // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2002. – Т. 14. – С. 7–38.
3. *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптической систем уравнений. – Новосибирск: Наука, 1977. – 424 с.
4. *Салимов Р.Б., Шабалин П.Л.* Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. – Казань: Казан. матем. о-во, 2005. – 297 с.
5. *Насыров С.Р.* О методе полигональной аппроксимацией в смешанных обратных краевых задачах по параметру x . – Казань: Казан. гос. ун-т, 1982. – 48 с. – Деп. в ВИНТИ 17.05.82, № 2459-82.
6. *Насыров С.Р.* Смешанная обратная краевая задача на римановых поверхностях // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 25–36.
7. *Насыров С.Р.* Метод движущегося разреза в смешанных обратных краевых задачах // Констр. теория функций и ее приложения. – Махачкала, 1994. – С. 71–73.
8. *Тлюстен С.Р.* Смешанная краевая задача со свободной границей в однолистных областях // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1986. – № 76. – С. 148–156.
9. *Тлюстен С.Р.* Однолистные отображения со свободной границей. // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1988. – № 86. – С. 141–148.
10. *Тлюстен С.Р.* Априорные оценки решений смешанной краевой задачи со свободной границей для аналитических функций // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1989. – № 92. – С. 108–121.
11. *Тлюстен С.Р.* Геометрические свойства решений смешанной краевой задачи со свободной границей // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1990. – № 97. – С. 114–123.
12. *Салимов Р.Б., Стрежнева Е.В.* К решению обратной смешанной краевой задачи // Тр. семинара по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1992. – Вып. 27. – С. 95–117.
13. *Салимов Р.Б., Насырова Е.В., Шабалин П.Л.* Однолистная разрешимость одной обратной смешанной краевой задачи // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 4. – С. 78–82.

14. *Стрежнева Е.В.* Достаточные условия однолиственности одной смешанной обратной краевой задачи по параметру x для односвязной области в случае полигона // Теория функций и приближений. Межвуз. сб. научн. тр. Ч. 3. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1995. – С. 109–115.
15. *Салимов Р.Б., Стрежнева Е.В.* Решение обратной краевой задачи для двусвязной области в видоизмененной постановке. – Казань, 1990. – 26 с. – Деп. в ВИНТИ 29.12.90, № 6487-В90.
16. *Галиуллина Г.Р., Насыров С.Р.* Уравнение Гахова для внешней смешанной обратной краевой задачи по параметру x // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 10. – С. 48–55.
17. *Лаверентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
18. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Поступила в редакцию
12.06.06

Насыров Семен Рафаилович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Казанского государственного университета.

E-mail: snasyrov@ksu.ru

Фаизов Искандер Загретдинович – студент механико-математического факультета Казанского государственного университета.

E-mail: fiz@hitv.ru