Д. Х. Гиниятова, Обобщение теорем Саца и Рушевея о точных оценках производных аналитических функций, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, номер 12, 84–89

Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2009, № 12, с. 84–89 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

Краткое сообщение, представленное членом редколлегии Ф.Г. Авхадиевым

Д.Х. ГИНИЯТОВА

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ САЦА И РУШЕВЕЯ О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Пусть Ω и Π — две области в расширенной комплексной плоскости, снабженные метрикой Пуанкаре. В работе получены аналоги неравенств типа Шварца–Пика в классе $A(\Omega, \Pi) = \{f : \Omega \to \Pi\}$ функций, локально голоморфных в Ω, где в качестве области Ω рассмотрены внешность единичного круга и верхняя полуплоскость. Эти результаты обобщают известные теоремы Саца и Рушевея о точных оценках производных аналитических функций, заданных в круге $|z| < 1$.

Ключевые слова: неравенства типа Шварца–Пика, аналитические функции, метрика Пуанкаре.

УДК: 517.544

Abstract. Let Ω and Π be two domains in the extended complex plane equipped by the Poincaré metric. In this paper we obtain analogs of Schwarz–Pick type inequalities in the class $A(\Omega, \Pi) = \{f : \Omega \to \Pi\}$ of functions locally holomorphic in Ω; for the domain Ω we consider the exterior of the unit disk and the upper half-plane. The obtained results generalize the well-known theorems of Szasz and Ruscheweyh about the exact estimates of derivatives of analytic functions defined on the disk $|z| < 1$.

Keywords: Schwarz–Pick type inequalities, analytic functions, Poincaré metric.

Пусть Ω и Π — две области в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, снабженные метрикой Пуанкаре. Через $A(\Omega, \Pi)$ обозначим класс функций f, локально голоморфных в Ω, и $f(\Omega) \subset \Pi$. Пусть $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — круг единичного радиуса с центром в начале координат.

Важным следствием классической теоремы Пика является неравенство

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}, \quad f \in A(\Delta, \Delta), \quad z_0 \in \Delta.$$

Поступила 22.05.2009

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00381).

Отсюда $|f'(z_0)| \le \frac{1}{1-|z_0|^2}$, $z \in \Delta$, и равенство достигается для конформных автоморфизмов f круга таких, что $f(z_0) = 0$. В 1920 году Сац распространил последнее неравенство на производные высших порядков.

Теорема A (O. Szasz [1]). *Для функции $f \in A(\Delta, \Delta)$, $z \in \Delta$ и $m \in \mathbb{N}$ справедливо точное неравенство*

$$|f^{(2m+1)}(z)| \le \frac{(2m+1)!}{(1-|z|^2)^{2m+1}} \sum_{k=0}^{m} \tbinom{m}{k}^2 |z|^{2k}.$$

Равенство достигается только для функций вида

$$f(\zeta) = e^{i\gamma}\zeta^m \left(\frac{\zeta - z}{1-\zeta\overline{z}}\right)^{m+1}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Подобные оценки были получены и в ряде работ Рушевея для случаев, когда областью Π является круг или полуплоскость. Приведем формулировку одной из его теорем об оценках производных аналитических функций для случая полуплоскости.

Теорема B (St. Ruscheweyh [2]). *Пусть f голоморфна в Δ и $\rho(f(z))$ означает минимальное расстояние от $f(z)$ до границы выпуклой оболочки $f(\Delta)$. Тогда справедливо точное неравенство*

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \le \frac{2\rho(f(z))}{(1-|z|)^n(1+|z|)}.$$

Равенство достигается для конформных отображений единичного круга на полуплоскость.

Неравенства, приведенные выше, называются неравенствами типа Шварца–Пика. За последние десять лет по данной тематике появилось большое количество работ (например, [3]–[10]). Основными результатами настоящей работы являются новые неравенства типа Шварца–Пика, обобщающие теоремы A и B. Получены точные оценки для величины $|f^{(n)}(z)|$ в случаях, когда исходной областью Ω являются полуплоскость и внешность единичного круга. Обозначим эти области $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\Delta^- = \{z : |z| > 1\}$ соответственно.

Теорема 1. *Для всех $f \in A(H, \Delta)$ и $m \in \mathbb{N}$ справедливо точное неравенство*

$$\frac{|f^{(2m+1)}(z)|}{(2m+1)!} \le \frac{1}{2|y|^{2m+1}} \cdot \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, \quad z = x + iy \in H.$$

Равенство достигается только для функций вида

$$f(\zeta) = e^{i\gamma}\left(\frac{\zeta - z}{\zeta - \overline{z}}\right)^{m+1}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Схема доказательства теоремы 1. Зафиксируем некоторую точку $z_0 \in H$. Рассмотрим функцию $g \in A(\Delta, \Delta)$, определяемую формулой

$$g(\zeta) = f\left(\frac{\zeta\overline{z_0} - z_0}{\zeta - 1}\right), \quad \zeta \in \Delta. \tag{1}$$

Введем замену переменной

$$\xi = \frac{\zeta\overline{z_0} - z_0}{\zeta - 1} = S(\zeta) \tag{2}$$

и воспользуемся интегральной формулой Коши

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{S(\Gamma)} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \tag{3}$$

где Γ — окружность, охватывающая начало координат. Так как

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{z_0 - \overline{z_0}}{(1-\zeta)^2}, \quad \xi - z_0 = \frac{\zeta(z_0 - \overline{z_0})}{1-\zeta},$$

то согласно (1)–(3)

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)(1-\zeta)^{n-1}d\zeta}{\zeta^{n+1}(z_0 - \overline{z_0})^n}. \tag{4}$$

Поскольку $|g(\zeta)| \le 1$, для $n = 2m+1$ получаем

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)(1-\zeta)^{2m}}{\zeta^{2m+2}} d\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{(1-e^{i\theta})^{2m} i e^{i\theta}}{e^{i\theta(2m+2)}} d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |2\sin(\theta/2)|^{2m} d\theta. \tag{5}$$

Вычислим последний интеграл в (5)

$$\int_0^{2\pi} |2\sin(\theta/2)|^{2m} d\theta = 2^{m+1}\frac{\pi(2m-1)!!}{m!}.$$

Теперь требуемая оценка следует из (4) и (5). Из (5) также вытекает, что равенство достигается для функций вида

$$g(\zeta) = e^{i\gamma}\zeta^{m+1}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

В этом можно убедиться непосредственной подстановкой функции $g(\zeta)$ в первый интеграл в формуле (5). Так как функции f и g связаны соотношением (1), то функция $f(\zeta)$, для которой достигается равенство в полученной оценке, имеет вид

$$f(\zeta) = g\left(\frac{\zeta - z_0}{\zeta - \overline{z_0}}\right) = e^{i\gamma}\left(\frac{\zeta - z_0}{\zeta - \overline{z_0}}\right)^{m+1}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Оценка, полученная в теореме 1, точна для всех нечетных производных. Для производных четного порядка в [1] указана точная граница лишь для второй производной. Аналогичную оценку удалось найти и в нашем случае. Представим функцию $g(\zeta)$, определенную (1), степенным рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^k$, тогда из (3) получим

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{(z-\overline{z})^n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^k \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k\zeta^k\right)\Big/\zeta^{n+1}d\zeta.$$

Поскольку интеграл по любому замкнутому контуру, содержащему начало координат, от функции ζ^p равен нулю для всякого $p \ne -1$, то достаточно вычислить коэффициент при ζ^n в числителе подинтегральной функции,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^k \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k\zeta^k = A_0 + A_1\zeta + \cdots + A_n\zeta^n + \cdots$$

Согласно формуле для произведения рядов

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}a_{n-k},$$

откуда

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{|z-\overline{z}|^n} \cdot \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} a_{n-k} \right|. \tag{6}$$

Для дальнейших рассуждений понадобится

Теорема ([11])**.** *Пусть* $(\lambda_0+\lambda_1 z+\cdots+\lambda_n z^n)^2 = \mu_0+\mu_1 z+\cdots+\mu_n z^n+\cdots$ *и* $\lambda_0+\lambda_1 z+\cdots+\lambda_n z^n \neq 0$ *для* $|z|<1$*, тогда для каждого степенного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *такого, что* $\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k\right| = |g(z)| \leq 1$ *для* $|z|<1$*, справедливо неравенство*

$$|\mu_n c_0 + \mu_{n-1} c_1 + \cdots + \mu_0 c_n| \leq |\lambda_0|^2 + |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2,$$

равенство достигается для

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \equiv e^{i\gamma} \frac{\overline{\lambda}_n + \overline{\lambda}_{n-1} z + \cdots + \overline{\lambda}_0 z^n}{\lambda_0 + \lambda_1 z + \cdots + \lambda_n z^n}.$$

Применяя эту теорему к сумме в правой части (6), имеем

$$\left| a_n + (n-1)(-1) a_{n-1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} (-1)^{n-1} a_1 \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{k}^2. \tag{7}$$

Функция

$$g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k = e^{i\gamma} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{k} (-1)^k \zeta^{n-k}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{k} (-1)^k \zeta^k}$$

обращает (7) в равенство. Положим $n=2$. Тогда из (6) и (7)

$$\frac{|f''(z)|}{2} \leq \frac{1}{4|y|^2} \sum_{k=0}^{2} \binom{\frac{1}{2}}{k}^2 = \frac{81}{128|y|^2}, \quad y = \mathrm{Im}\,(z),$$

равенство достигается для

$$f(\zeta) = e^{i\gamma} \frac{(\frac{\zeta-z}{\zeta-\overline{z}})^2 - \frac{1}{2}(\frac{\zeta-z}{\zeta-\overline{z}}) - \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}(\frac{\zeta-z}{\zeta-\overline{z}}) - \frac{1}{8}(\frac{\zeta-z}{\zeta-\overline{z}})^2}.$$

Теорема 2. *Если* f *голоморфна в* Δ^- *и* $\mathrm{Re}\, f(z) > 0$*, то справедливо точное неравенство*

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leq \frac{2\mathrm{Re}\, f(z)}{(|z|-1)^n(|z|+1)}.$$

Равенство достигается для конформных отображений внешности единичного круга на полуплоскость.

Схема доказательства теоремы 2. Зафиксируем точку $z_0 \in \Delta^-$. Обозначим $f(z_0) = A+iB$. Построим конформное отображение $g : \Delta^- \to \Delta$, нормированное условием $g(z_0)=0$,

$$g(z) = \frac{\overline{z_0}(z_0 - z)}{z_0(z\overline{z_0} - 1)}.$$

Рассмотрим функцию $f(g^{-1}(\zeta))$, $\zeta \in \Delta$. Поскольку ее действительная часть больше нуля, по формуле Герглоца можем записать

$$f(g^{-1}(\zeta)) = A\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\zeta e^{-it}}{1-\zeta e^{-it}} d\mu(t) + iB,$$

откуда

$$f(z) = A\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+g(z)e^{-it}}{1-g(z)e^{-it}} d\mu(t) + iB,$$

где $\mu(t)$ — неубывающая функция и $\mu(\pi)-\mu(-\pi)=1$. Обозначим через $I(z,t)$ подынтегральную функцию в последнем равенстве и продифференцируем его n раз

$$f^{(n)}(z) = A\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^n I(z,t)}{dz^n} d\mu(t).$$

Непосредственные вычисления показывают

$$\frac{d^n I(z,t)}{dz^n} = \frac{(-1)^n n!\cdot 2e^{-it}|z|^2\cdot(|z|^2-1)\cdot(|z_0|^2+\overline{z_0}e^{-it})^{n-1}}{\Big(z_0(z\overline{z_0}-1)\big(1-\frac{\overline{z_0}(z_0-z)}{z_0(z\overline{z_0}-1)}\big)\Big)^{n+1}}.$$

Используя простую оценку, имеем

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \le 2A\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|e^{-it}|\cdot(|z_0|^2-1)\cdot(|z_0|^2+|\overline{z_0}e^{-it}|)^{n-1}\cdot|z_0|^2}{|z_0|^{n+1}\cdot(|z_0|^2-1)^{n+1}} d\mu(t) =$$
$$= \frac{2A}{(|z_0|-1)^n(|z_0|+1)}. \qquad (8)$$

Так как $|z_0| = \overline{z_0}e^{-it}$ только тогда, когда $e^{-it}=e^{-it_0}=z_0/|z_0|$, то равенство в (8) достигается лишь для кусочно-постоянной функции $\mu(t)$ такой, что $\mu([0,2\pi])=\{0,1\}$, и соответствующая функция имеет вид

$$f_0(z) = A\cdot\frac{1+g(z)e^{-it_0}}{1-g(z)e^{-it_0}} + B, \quad e^{-it_0}=z_0/|z_0|.$$

Литература

[1] Szász O. *Ungleichheitsbeziehungen für die Ableitungen einer Potenzreihe, die eine im Einheitskreise beschränkte Funktion darstellt* // Math. Z. – 1920. – №8. – S. 303–309.

[2] Ruscheweyh St. *Über einige Klassen in Einheitskreis holomorpher Funktionen* // Ber. Math.-Stat. Sektion Forschungszentrum Graz. – 1974. – № 7. – 12 S.

[3] Anderson J.M., Dritschel M.A., Rovnyak J. *Schwarz–Pick inequalities for the Schur–Agler class on the polydisk and unit ball* // Comp. methods and func. theory. – 2008. – V. 8. – №2. – P. 339–361.

[4] Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *Schwarz–Pick type inequalities.* – Boston–Berlin–Bern: Birkhäuser, 2009. – 156 p.

[5] Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *Schwarz–Pick inequalities for derivatives of arbitrary order* // Constr. Approx. – 2003. – V. 19. – P. 265–277.

[6] Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *The punishing factors for convex pairs are* 2^{n-1} // Revista Math. Iberoamericana. – 2007. – V. 23. – P. 847–860.

[7] Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *Estimates of the derivatives of meromorphic maps from convex domains into concave domains* // Comp. methods and func. theory. – 2008. – V. 8. – P. 107–119.

[8] Li J.-L. *Estimates for derivatives of holomorphic functions in a hyperbolic domain* // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – V. 329. – P. 581–591.

[9] MacCluer B., Stroethoff K., Zhao R. *Schwarz–Pick estimates* // Complex Variables. – 2003. – V. 48. – P. 711–730.

[10] Yamashita S. *Higher derivatives of holomorphic function with positive real part* // Hokkaido Math. J. – 2000. – V. 29. – P. 23–36.

[11] Szász O. *Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe* // Math. Z. – 1918. – № 1. – S. 163–183.

Д.Х. Гиниятова

аспирант, кафедра теории функций и приближений,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

e-mail: normaliti@gmail.com

D.Kh. Giniyatova

Postgraduate, Chair of Functions Theory and Approximations,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: normaliti@gmail.com