

С.Н.Трoнин

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ

Семестр 2

Выпуск III

Евклидовы и унитарные пространства

Линейные операторы

в евклидовых и унитарных пространствах

Казань — 2012

УДК 512.64

*Представляется на сайте университета
по решению Редакционно-издательского совета
ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
методической комиссии Института математики и механики
им. Н.И.Лобачевского
Протокол №7 от 19 апреля 2012 г.
заседания кафедры алгебры и математической логики
Протокол №10 от 3 апреля 2012 г.*

Автор-составитель

доктор физ.-мат. наук, доц. С.Н. Тронин

Научный редактор

доктор физ.-мат. наук, профессор С.М. Скрыбин

Рецензент

кандидат физ.-мат. наук, доц. А.Н. Абызов

Лекции по алгебре. Семестр 2. Выпуск III. Евклидовы и унитарные пространства. Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах: Учебно-методическое пособие / С.Н. Тронин. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012. — 69 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов-математиков первого курса университета, изучающих алгебру. Оно представляет собой обработанные записи лекций, неоднократно читавшихся автором во втором семестре, и издается в виде нескольких выпусков. В третьем выпуске излагается теория евклидовых и унитарных векторных пространств, и теория линейных операторов, действующих на таких пространствах. Содержание данного пособия полностью соответствует программе курса “Алгебра” для студентов-математиков, действующей в Казанском (Приволжском) федеральном университете.

©Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава IV. Евклидовы и унитарные пространства	6
4.1. Определения и простейшие свойства	6
4.2. Ортогонализация	19
4.3. Ортогональное дополнение подпространства	29
4.4. Расстояние от точки до подпространства	33
4.5. Изоморфизмы евклидовых и унитарных пространств	36
Глава V. Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах	39
5.1. Ортогональные и унитарные операторы	39
5.2. Сопряженные операторы	47
5.3. Самосопряженные операторы	49
5.4. Нормальные операторы	54
5.5. Приведение квадратичных форм к главным осям	59
5.6. Каноническая форма матрицы ортогонального оператора	61
ЛИТЕРАТУРА	68

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов-математиков первого курса университета, изучающих алгебру. Оно представляет собой обработанные записи лекций, неоднократно читавшихся автором во втором семестре, и издается в виде нескольких выпусков.

В первом выпуске излагаются основы теории линейных отображений и линейных операторов. Второй выпуск посвящен жордановой нормальной форме линейного оператора, и, кроме того, содержит справочную информацию по материалу первого семестра.

В третьем выпуске излагается теория евклидовых и унитарных пространств, а также теория линейных операторов, действующих на таких пространствах. Этот материал очень важен для многих приложений алгебры. Он пригодится, например, при изучении функционального анализа и современной вычислительной математики. Бесконечномерные аналоги многих теорем, доказываемых в данном выпуске, широко применяются в квантовой физике.

Содержание данного учебного пособия — записи лекционного курса. Это значит, что излагается минимум того, что известно, только самые основные понятия, примеры и теоремы, без которых совершенно невозможно обойтись. Студент, желающий узнать больше, должен обратиться к книгам более солидного объема. Прежде всего это учебник А.И.Кострикина [10], [11], [12]. Второй том этого учебника [11] — это та книга, которую можно рекомендовать в первую очередь для основательного изучения материала, относящегося ко всем выпускам нашего пособия. Необходимо также отметить предшествовавшую [11] книгу высокого уровня [9], из которой можно узнать, например, много интересного о приложениях линейной алгебры в геометрии и физике. В списке

литературы мы приводим также несколько других учебников (далеко не все, имеющиеся в наличии). Нельзя не упомянуть классические книги И.М. Гельфанда [3], В.А.Ильина и Э.Г.Позняка [6], А.Г. Куроша [14], и А.И. Мальцева [15]. Из более современных учебников отметим книги Э.Б. Винберга [2], В.А. Артамонова [1] и Г.С. Шевцова [16]. Наконец, в список литературы включено несколько учебных пособий сотрудников кафедры алгебры и математической логики Казанского федерального университета [4], [5], [7], [8].

Материал первого и второго выпусков данного учебного пособия [17], [18] предполагается известным, и используется, как правило, без особых оговорок.

Определения, примеры, теоремы, леммы, следствия и формулы в данном учебном пособии нумеруются с помощью трех цифр (чисел), из которых первое означает номер главы, второе — номер параграфа, и третье — номер определения, теоремы и т.п. внутри данного параграфа. При этом каждый из перечисленных видов нумеруемых объектов автоматически нумеруется отдельно и независимо от остальных (особенность издательской системы \LaTeX). Например, в одном и том же параграфе 5.6 пятой главы может присутствовать определение 5.6.2, теорема 5.6.2 и формула (5.6.2). Опыт показывает, что к этому можно легко привыкнуть. Доказательства заканчиваются символом \square .

Содержание данного пособия полностью соответствует программе курса “Алгебра” для студентов-математиков, действующей в Казанском (Приволжском) федеральном университете.

ГЛАВА IV. ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

4.1. Определения и простейшие свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.1. Пусть дано векторное пространство V над полем действительных чисел \mathbb{R} , и задано отображение

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

значение которого на векторах $v, u \in V$ обозначается через (v, u) . Это отображение называется *скалярным произведением*, если выполняются следующие свойства:

1. $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, u) = \lambda_1 (v_1, u) + \lambda_2 (v_2, u)$ для любых $v_1, v_2, u \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
2. $(v, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 (v, u_1) + \lambda_2 (v, u_2)$ для любых $v, u_1, u_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
3. $(v, u) = (u, v)$ для каждой пары векторов $v, u \in V$;
4. $(v, v) > 0$ для любого $v \neq 0$. Из первых двух свойств следует, что $(0, v) = (v, 0) = 0$ для каждого вектора $v \in V$.

Векторное пространство V вместе с заданным на нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством*. Как правило, когда говорят об евклидовом пространстве, имеют в виду конечномерное пространство.

Пример 4.1.1. Пусть $V = \mathbb{R}^n$. Для любых двух векторов $v = (a_1, \dots, a_n)^T, u = (b_1, \dots, b_n)^T$ из V положим

$$(v, u) = \sum_{j=1}^n a_j b_j$$

Легко проверяется, что все свойства скалярного произведения выполнены. Иногда бывает удобно выражать только что определенное скалярное произведение через матричное умножение:

$$(v, u) = v^T u = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.2. Пусть теперь дано векторное пространство V над полем комплексных чисел \mathbb{C} , и задано отображение

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

значение которого на векторах $v, u \in V$ также обозначается через (v, u) . Это отображение снова называется *скалярным произведением*, если выполняются следующие свойства:

1. $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, u) = \lambda_1 (v_1, u) + \lambda_2 (v_2, u)$ для любых $v_1, v_2, u \in V$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
2. $(v, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \bar{\lambda}_1 (v, u_1) + \bar{\lambda}_2 (v, u_2)$ для любых v, u_1, u_2 , $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$;
3. $(v, u) = \overline{(u, v)}$ для каждой пары векторов $v, u \in V$;
4. $(v, v) > 0$ для любого $v \neq 0$. Из первых двух свойств следует, что $(0, v) = (v, 0) = 0$ для каждого вектора $v \in V$.

Здесь черта наверху означает взятие сопряженного к комплексному числу ($\overline{a + ib} = a - ib$).

Векторное пространство V вместе с заданным на нем скалярным произведением с описанными выше свойствами называется *унитарным пространством* (или *эрмитовым пространством*). Мы будем предполагать, что все встречающиеся в дальнейшем такие пространства конечномерны.

Пример 4.1.2. Пусть $V = \mathbb{C}^n$. Для любых двух векторов $v = (a_1, \dots, a_n)^T$, $u = (b_1, \dots, b_n)^T$ из V положим

$$(v, u) = \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j$$

Выражение через матричное умножение таково:

$$(v, u) = v^T \bar{u} = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{pmatrix}$$

Если формально определить сопряжение для действительных чисел, полагая $\bar{a} = a$ для всех $a \in \mathbb{R}$, то определение 4.1.1 становится полностью аналогичным определению 4.1.2 (однако надо помнить, что речь идет о разных векторных пространствах, определенных над разными полями). Вследствие этого свойства евклидовых и унитарных пространств оказываются во многом похожими. Поэтому мы будем излагать их одновременно, внося в случае необходимости соответствующие поправки в формулировки и доказательства.

Заметим, что в некоторых книгах (например, в учебнике [11]) вместо обозначения (v, u) используется обозначение $(v|u)$.

И в случае евклидовых пространств, и случае унитарных пространств определено понятие *нормы* вектора $v \in V$:

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}.$$

Подразумевается, что берется неотрицательное значение корня. В случае примеров 4.1.1 и 4.1.2, если $v = (a_1, \dots, a_n)^T$,

$$\|v\| = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}.$$

Таким образом, геометрический смысл нормы — длина вектора. Установим основные свойства нормы. Важную роль играет следующее неравенство (неравенство Коши-Буняковского, оно же неравенство Шварца).

ТЕОРЕМА 4.1.1. Для любых двух векторов евклидова или унитарного пространства выполняется неравенство

$$|(v, u)| \leq \|v\| \cdot \|u\| \quad (4.1.1)$$

Часто его записывают еще в виде

$$|(v, u)|^2 \leq (v, v)(u, u) \quad (4.1.2)$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы v и u пропорциональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним известный из школьной математики факт. Пусть дан многочлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с действительными коэффициентами, где переменная x также принимает только действительные значения. Тогда необходимым и достаточным условием того, что $f(x) \geq 0$ для любого x , является соотношение $b^2 - 4ac \leq 0$.

Чтобы применить это утверждение в случае евклидова пространства, рассмотрим выражение

$$(xv - u, xv - u) = x^2(v, v) - 2x(v, u) + (u, u).$$

По определению евклидова пространства, для любого действительного числа x будем иметь $(xv - u, xv - u) \geq 0$. Но правая часть полученного выше равенства есть многочлен от x вида $ax^2 + bx + c$, где $a = (v, v)$, $b = -2(v, u)$, а $c = (u, u)$. Следовательно, условие $(xv - u, xv - u) \geq 0$ равносильно тому, что $b^2 - 4ac \leq 0$. В явном виде это выглядит так:

$$4(v, u)^2 - 4(v, v)(u, u) \leq 0,$$

что равносильно доказываемому неравенству

$$(v, u)^2 \leq (v, v)(u, u).$$

Если это неравенство оказывается равенством, то, прослеживая, откуда оно получилось, легко обнаруживаем, что многочлен $(xv - u, xv - u) = x^2(v, v) - 2x(v, u) + (u, u)$ в этом случае должен быть полным квадратом. Но тогда у него есть действительный корень, то есть такой $\lambda \in \mathbb{R}$, что $(\lambda v - u, \lambda v - u) = 0$. Однако, по определению скалярного произведения, это возможно только в том случае, когда $\lambda v - u = 0$, то есть $u = \lambda v$. Обратно, если $u = \lambda v$ для некоторого скаляра λ , то прямая подстановка в левую и правую части неравенства (4.1.2) показывает, что эти части равны.

В случае унитарного пространства рассуждения несколько усложняются. Будем исходить из того, что, по определению скалярного произведения, в этом случае $(xv - u, xv - u) \geq 0$ для любого *комплексного* x . Прделаем преобразования:

$$\begin{aligned} (xv - u, xv - u) &= (xv, xv) - (xv, u) - (u, xv) + (u, u) = \\ &= x\bar{x}(v, v) - x(v, u) - \bar{x}(u, v) + (u, u) = \\ &= |x|^2(v, v) - x(v, u) - \bar{x}\overline{(v, u)} + (u, u). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$|x|^2(v, v) - x(v, u) - \bar{x}\overline{(v, u)} + (u, u) \geq 0, \quad (4.1.3)$$

справедливое для любого комплексного x . Представим теперь комплексное число (v, u) в тригонометрической форме:

$$(v, u) = |(v, u)|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

и выберем x таким, что

$$x = t(\cos \varphi - i \sin \varphi),$$

где t — произвольное действительное число. Заметим, что это не тригонометрическая форма x , но легко проверить, что $|x| = |t|$, а значит,

$|x|^2 = t^2$. Кроме того,

$$\begin{aligned}x(v, u) &= t(\cos \varphi - i \sin \varphi)|(v, u)|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = t|(v, u)|, \\ \overline{x(v, u)} &= t(\cos \varphi + i \sin \varphi)|(v, u)|(\cos \varphi - i \sin \varphi) = t|(v, u)|.\end{aligned}$$

Подставим теперь в (4.1.3) вместо $x(v, u)$ и $\overline{x(v, u)}$ выражение $t|(v, u)|$. Получится неравенство:

$$t^2(v, v) - 2t|(v, u)| + (u, u) \geq 0.$$

Теперь мы имеем дело с многочленом $at^2 + bt + c$, где $a = (v, v)$, $b = -2|(v, u)|$, $c = (u, u)$ — действительные числа, и этот многочлен неотрицателен для всех действительных t . Теперь, как и в случае евклидова пространства, делаем вывод, что

$$b^2 - 4ac = 4|(v, u)|^2 - 4(v, v)(u, u) \leq 0,$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Случай, когда неравенство является равенством, разбирается почти так же, как и выше для евклидовых пространств. \square

Теперь можно доказать свойства нормы, которые показывают, что пространства со скалярным (или эрмитовым) произведением являются метрическими пространствами.

ТЕОРЕМА 4.1.2. *Норма вектора в евклидовом (или унитарном) пространстве обладает следующими свойствами. Во-первых, $\|v\| \geq 0$; $\|v\| = 0$ тогда и только тогда, если $v = 0$. Во-вторых, $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$. В частности, $\|v\| = \|-v\|$. И, наконец, для любых векторов v и u выполняется неравенство:*

$$\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\| \tag{4.1.4}$$

Справедливо также следующее неравенство:

$$\|v - u\| \leq \|v\| + \|u\| \tag{4.1.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду отмеченного выше формального сходства между определениями евклидова и унитарного пространства достаточно провести рассуждения для унитарного случая, имея в виду то, что в евклидовом случае $\bar{a} = a$ для любого действительного a .

Свойство $\|v\| = \sqrt{(v, v)} \geq 0$ следует из $(v, v) \geq 0$ (определение скалярного произведения), и из соглашения о том, что берется неотрицательное значение корня. Из другой части определения скалярного произведения ($(v, v) = 0$ тогда и только тогда, если $v = 0$) следует, что $\|v\| = 0$ тогда и только тогда, если $v = 0$. Далее,

$$\begin{aligned}\|\lambda v\| &= \sqrt{(\lambda v, \lambda v)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} (v, v)} = \\ &= \sqrt{|\lambda|^2 (v, v)} = |\lambda| \sqrt{(v, v)} = |\lambda| \|v\|.\end{aligned}$$

Очевидно, что отсюда следует $\|v\| = \|-v\|$.

Докажем неравенство (4.1.4). Так как и в левой, и в правой его части стоят неотрицательные величины, то достаточно доказать, что выполняется следующее неравенство:

$$\|v + u\|^2 \leq (\|v\| + \|u\|)^2$$

Распишем подробно левую и правую части этого предполагаемого неравенства (напомним, что рассматривается унитарный случай). Левая часть:

$$\begin{aligned}\|v + u\|^2 &= |(v + u, v + u)| = |(v, v) + (v, u) + (u, v) + (u, u)| \leq \\ &\leq |(v, v)| + |(v, u)| + |\overline{(v, u)}| + |(u, u)| = (v, v) + 2|(v, u)| + (u, u).\end{aligned}$$

Тут использовано неравенство для модулей комплексных чисел: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, и тот факт, что $|z| = |\bar{z}|$. Правая часть:

$$(\|v\| + \|u\|)^2 = \|v\|^2 + 2\|v\|\|u\| + \|u\|^2 = (v, v) + 2\|v\|\|u\| + (u, u).$$

Сравнивая, легко заметить, что доказываемое неравенство будет установлено, если будет показано, что

$$|(v, u)| \leq \|v\|\|u\|.$$

Но это и есть доказанное в предыдущей теореме неравенство Коши-Буняковского.

Неравенство (4.1.5) теперь получается так:

$$\|v - u\| = \|v + (-u)\| \leq \|v\| + \|-u\| = \|v\| + \|u\|,$$

так как $\|u\| = \|-u\|$ по уже доказанному выше. \square

СЛЕДСТВИЕ 4.1.1. *Функция $d(v, u) = \|v - u\|$ есть расстояние (метрика) на V , превращающая V в метрическое пространство (или нормированное пространство).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим свойства метрики (расстояния в метрическом пространстве).

Первое свойство: $d(v, v) = 0$ и из $d(v, u) = 0$ следует, что $v = u$. При $d(v, u) = \|v - u\|$ все очевидно.

Второе свойство метрики, $d(v, u) = d(u, v)$ следует из того, что

$$\|v - u\| = \|- (v - u)\| = \|u - v\|.$$

Наконец, третье свойство (неравенство треугольника):

$$d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u),$$

в нашем случае превращается в неравенство:

$$\|v - u\| \leq \|v - w\| + \|w - u\|.$$

Положим $x = v - w$, $y = w - u$, тогда $x + y = v - u$, и требуемое неравенство переписывается в виде:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Но это — доказанное выше неравенство (4.1.4). \square

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что для любых двух ненулевых векторов v и u евклидова пространства выполняется следующее неравенство:

$$-1 \leq \frac{(v, u)}{\|v\| \cdot \|u\|} = \frac{(v, u)}{\sqrt{(v, v)}\sqrt{(u, u)}} \leq 1. \quad (4.1.6))$$

Отсюда следует, что существует угол φ , изменяющийся в пределах от 0 до π , такой, что

$$\cos \varphi = \frac{(v, u)}{\|v\| \cdot \|u\|} = \frac{(v, u)}{\sqrt{(v, v)}\sqrt{(u, u)}} \quad (4.1.7))$$

Естественно назвать этот угол *углом между векторами v и u* . Таким образом, как и в случае векторов на плоскости,

$$(v, u) = \|v\| \|u\| \cos \varphi \quad (4.1.8))$$

В унитарном пространстве ситуация несколько меняется. Так как скалярное произведение в этом случае является, вообще говоря, комплексным числом, то неравенство (4.1.6) теряет смысл, и можно утверждать лишь, что

$$0 \leq \frac{|(v, u)|}{\|v\| \cdot \|u\|} \leq 1. \quad (4.1.9))$$

Это значит, что существует однозначно определенный угол φ , $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, такой, что

$$\cos \varphi = \frac{|(v, u)|}{\|v\| \cdot \|u\|} \quad (4.1.10))$$

Теперь можно определить, какие векторы можно считать перпендикулярными (или ортогональными): это те векторы, косинус угла между которыми равен нулю (то есть угол равен $\frac{\pi}{2}$). Это определение годится как для евклидовых, так и для унитарных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.3. Два ненулевых вектора v и u в евклидовом (или унитарном) пространстве называются *ортогональными*, если их скалярное произведение (v, u) равно нулю.

Отметим, что если $(v, u) = 0$, то и $(u, v) = 0$. В евклидовом случае это так, поскольку $(v, u) = (u, v)$, а в унитарном $(u, v) = \overline{(v, u)}$, и сопряженное к нулю число есть нуль.

ТЕОРЕМА 4.1.3. («Теорема Пифагора») *Пусть ненулевые векторы v и w ортогональны. Тогда*

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \quad (4.1.11)$$

Это равенство также (тривиальным образом) выполняется, если хотя бы один вектор равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО одинаково и для евклидовых, и для унитарных пространств. Вычислим левую часть (4.1.11):

$$\|v + u\|^2 = (v + u, v + u) = (v, v) + (v, u) + (u, v) + (u, u).$$

Но по условию $(v, u) = 0 = (u, v)$, а $(v, v) = \|v\|^2$, $(u, u) = \|u\|^2$. Теорема доказана. \square

Теперь выберем в пространстве V некоторый базис e_1, \dots, e_n , и пусть даны векторы $v = \sum_{j=1}^n a_j e_j$, $u = \sum_{j=1}^n b_j e_j$. Вычислим скалярное произведение (v, u) . В случае евклидовых пространств

$$(v, u) = \left(\sum_{j=1}^n a_j e_j, \sum_{k=1}^n b_k e_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_k (e_j, e_k).$$

Пусть $g_{j,k} = (e_j, e_k)$. Тогда полученное равенство переписется в виде:

$$(v, u) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{j,k} a_j b_k. \quad (4.1.12)$$

Если обозначить через G матрицу размером $n \times n$, j, k -й элемент которой есть $g_{j,k}$, через x — столбец координат вектора v , т.е. $x = (a_1, \dots, a_n)^T$, и, соответственно, через y — столбец координат u в выбранном базисе,

$y = (b_1, \dots, b_n)^T$, то (4.1.12) можно записать в следующем матричном виде:

$$(v, u) = x^T G y \quad (4.1.13)$$

Матрица G называется *матрицей Грама* данного базиса e_1, \dots, e_n , и обладает рядом интересных свойств. Отметим одно из них: матрица G является симметрической, $G = G^T$. Это следует из того, что $g_{j,k} = (e_j, e_k) = (e_k, e_j) = g_{k,j}$ по определению скалярного произведения.

Аналогичным образом для скалярного произведения в унитарном пространстве получаем следующие равенства:

$$(v, u) = \left(\sum_{j=1}^n a_j e_j, \sum_{k=1}^n b_k e_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j \bar{b}_k (e_j, e_k).$$

Полагая $g_{j,k} = (e_j, e_k)$, получаем

$$(v, u) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{j,k} a_j \bar{b}_k. \quad (4.1.14)$$

или

$$(v, u) = x^T G \bar{y} \quad (4.1.15)$$

Здесь G есть матрица размером $n \times n$, j, k -й элемент которой есть $g_{j,k}$ (*матрица Грама*), x — столбец координат вектора v , $x = (a_1, \dots, a_n)^T$, y — столбец координат u , $y = (b_1, \dots, b_n)^T$, а через \bar{y} обозначается столбец $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)^T$. Матрица Грама G обладает свойством $G^T = \bar{G}$, где черта сверху означает, что все элементы G заменены на комплексно сопряженные к ним числа. Это следует из того, что $g_{j,k} = (e_j, e_k) = \overline{(e_k, e_j)} = \bar{g}_{k,j}$ для любых индексов j, k .

ТЕОРЕМА 4.1.4. Пусть e'_1, \dots, e'_n — другой базис евклидова или унитарного пространства V . Рассмотрим матрицу Грама G' , соответствующую этому базису, $G' = (g'_{j,k})$, $g'_{j,k} = (e'_j, e'_k)$, и пусть задана матрица перехода от базиса e_1, \dots, e_n к базису e'_1, \dots, e'_n : $e'_k =$

$\sum_{j=1}^n a_{j,k} e_j$, $A = (a_{j,k})$. Тогда

$$G' = A^T G A$$

в случае евклидовых пространств, и

$$G' = A^T G \bar{A}$$

в случае унитарных пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое вычисление:

$$\begin{aligned} (e'_j, e'_k) &= \left(\sum_{s=1}^n a_{s,j} e_s, \sum_{t=1}^n a_{t,k} e_t \right) = \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,j} a_{t,k} (e_s, e_t) = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,j} (e_s, e_t) a_{t,k}. \end{aligned}$$

Правая часть полученного равенства есть j, k -й элемент матрицы $A^T G A$. Аналогично проводятся вычисления в унитарном случае. \square

Понятие матрицы Грама можно обобщить на случай произвольного множества векторов. Для краткости рассмотрим только случай евклидова пространства. Пусть v_1, \dots, v_m — произвольный набор векторов евклидова пространства V определим *матрицу Грама* этих векторов $G(v_1, \dots, v_m)$ как матрицу размером $m \times m$, j, k -й элемент которой есть $g_{j,k} = (v_j, v_k)$. Так как в евклидовом пространстве $(v_j, v_k) = (v_k, v_j)$, то матрица Грама в этом случае является симметрической: $G(v_1, \dots, v_m) = G(v_1, \dots, v_m)^T$.

ТЕОРЕМА 4.1.5. *Векторы v_1, \dots, v_m линейно независимы тогда и только тогда, если определитель матрицы Грама этих векторов не равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем логически эквивалентное утверждение: векторы v_1, \dots, v_m линейно зависимы тогда и только тогда, если определитель матрицы Грама этих векторов равен нулю.

Пусть векторы линейно зависимы. Тогда один из них, например, v_m , можно линейно выразить через остальные: $v_m = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j v_j$. Тогда $(v_m, v_k) = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j (v_j, v_k)$ для всех $k = 1, \dots, m$. Положим $r_j = ((v_j, v_1), (v_j, v_2), \dots, (v_j, v_m))$. Это j -я строка матрицы $G(v_1, \dots, v_m)$. Приведенное выше равенство $(v_m, v_k) = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j (v_j, v_k)$ можно теперь интерпретировать как $r_m = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j r_j$. Таким образом, m -я строка матрицы Грама оказывается линейной комбинацией остальных $m - 1$ строк. Но тогда, по известному свойству определителей, определитель такой матрицы должен быть равным нулю.

Обратно, пусть определитель матрицы Грама равен нулю. Известно, что из этого следует линейная зависимость строк матрицы, что, в свою очередь, означает, что одна из строк является линейной комбинацией остальных строк. Допустим, например, что это m -я строка. Таким образом, $r_m = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j r_j$. Отсюда следует, что и для каждого k -го элемента этой строки выполнено равенство:

$$(v_m, v_k) = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j (v_j, v_k) = \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j v_j, v_k \right),$$

что можно переписать в виде

$$\left(v_m - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j v_j, v_k \right) = 0.$$

Это равенство справедливо для всех k , $k = 1, 2, \dots, m$. Положим $v = v_m - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j v_j$. Если $(v, v_k) = 0$ для всех k , то

$$\left(v, v_m - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j v_j \right) = (v, v_m) - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j (v, v_j) = 0.$$

Но это означает, что $(v, v) = 0$. Отсюда следует $v = 0$, а это означает, что $v_m = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j v_j$, то есть векторы v_1, \dots, v_{m-1}, v_m линейно зависимы. □

Из этой теоремы следует, что матрица Грама для базиса является невырожденной.

Аналогичную теорему можно доказать для векторов из унитарного пространства.

Отметим, наконец, что скалярные произведения в евклидовых пространствах являются билинейными симметрическими отображениями (формами). Общая теория таких отображений, а также связанных с ними квадратичных форм, излагается в других разделах курса алгебры. Скалярные произведения на унитарных пространствах являются частным случаем отображений более сложного вида (так называемых “полуторалинейных” форм). Общая теория таких отображений в начальном курсе алгебры не изучается.

4.2. Ортогонализация

В этом параграфе мы более подробно изучим множества векторов, каждые два из которых ортогональны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.1. Множество различных ненулевых векторов $\{v_1, \dots, v_m\}$ евклидова или унитарного пространства называется *ортогональным*, если $(v_i, v_j) = 0$ для любых v_i и v_j при $i \neq j$.

Геометрический смысл этого понятия — система взаимно перпендикулярных векторов. Оказывается, что это автоматически влечет их линейную независимость.

ТЕОРЕМА 4.2.1. Пусть v_1, \dots, v_m — семейство различных ненулевых векторов евклидова или унитарного пространства V . Если для каждой пары индексов $j \neq k$ векторы v_j и v_k ортогональны, то множество v_1, \dots, v_m линейно независимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию данных векторов, равную нулю:

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j v_j = 0.$$

Выберем любой вектор v_k , $1 \leq k \leq m$, и умножим его скалярно справа на обе части предыдущего равенства, Получим следующее:

$$\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j v_j, v_k \right) = \sum_{j=1}^m (\alpha_j v_j, v_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j (v_j, v_k) = (0, v_k) = 0.$$

Но по условию $(v_j, v_k) = 0$ при $j \neq k$. Таким образом, от предыдущего равенства остается только равенство $\alpha_k (v_k, v_k) = 0$. Но $(v_k, v_k) > 0$ по определению скалярного произведения. Поэтому $\alpha_k = 0$. Так как это верно для всех k , то тем самым выполнено условие (определение) линейной независимости для векторов v_1, \dots, v_m . \square

В теории евклидовых и унитарных пространств особое значение имеют базисы, являющиеся ортогональными множествами векторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.2. Пусть V — евклидово или унитарное векторное пространство, и v_1, \dots, v_n — некоторый базис этого пространства. Этот базис называется *ортогональным*, если он является ортогональным множеством векторов, то есть любые два различных вектора v_j и v_k из этого базиса ортогональны, $(v_j, v_k) = 0$.

Часто одной ортогональности бывает недостаточно, и ее надо дополнить условием нормированности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.3. Пусть V снова евклидово или унитарное пространство. Вектор $v \in V$ называется *нормированным*, если $\|v\| = 1$. Из определения нормы вектора легко следует, что условие нормированности вектора v равносильно условию $(v, v) = 1$.

Если $v \neq 0$ — произвольный вектор, то вектор $\frac{v}{\|v\|}$ будет нормированным. В самом деле,

$$\left(\frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right) = \frac{1}{\|v\|} \left(v, \frac{v}{\|v\|} \right) = \frac{1}{\|v\|^2} (v, v) = \frac{1}{(v, v)} (v, v) = 1.$$

Переход от v к $\frac{v}{\|v\|}$ называется *нормированием* вектора v .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.4. Множество векторов евклидова или унитарного пространства называется *ортонормированным*, если оно ортогонально и, кроме того, каждый его вектор нормирован. Если множество v_1, \dots, v_n ортогонально, состоит из нормированных векторов, и является базисом V , то оно называется *ортонормированным базисом* пространства V .

Поскольку равенство $\|v_j\| = 1$ эквивалентно тому, что $(v_j, v_j) = 1$, то условие ортонормированности записывается в виде:

$$(v_j, v_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k; \\ 0 & \text{при } j \neq k. \end{cases}$$

То же самое можно записать короче, с использованием символа Кронекера:

$$(v_j, v_k) = \delta_{j,k}.$$

Очевидно, что если векторы v и w ортогональны, то для любых ненулевых элементов поля α и β ортогональными будут также векторы αv и βw . Отсюда следует, что если применить процедуру нормирования к каждому вектору какого-либо ортогонального множества векторов, то получится ортонормированное множество. В частности, после

нормирования каждого вектора ортогонального базиса получится ортонормированный базис (это снова будет ортогональная, а значит — линейно независимая система векторов, и количество элементов в ней будет совпадать с размерностью пространства; но гораздо проще непосредственно показать, что получается снова базис!).

Теперь возникает вопрос, а существуют ли ортогональные (а значит, и ортонормированные) базисы. Ответ дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2.2. 1) *В каждом евклидовом или унитарном пространстве существует ортогональный (а значит, и ортонормированный) базис.*

2) *Каждое ортогональное (ортонормированное) множество векторов V можно дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем алгоритм нахождения ортогонального базиса в произвольном подпространстве вида $W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Покажем, что существуют векторы u_1, \dots, u_k такие, что, во-первых, $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, а во-вторых, эти векторы попарно ортогональны. В частности, по теореме 4.2.1 они линейно независимы, и поэтому образуют базис подпространства W . Если векторы v_1, \dots, v_m линейно независимы, то это влечет равенство $k = m$. Если же линейной независимости нет, то базис все равно получится, но уже при $k < m$, и несколько последних шагов алгоритма дадут нулевые векторы, которые надо будет отбросить.

Построим векторы u_1, \dots, u_k индуктивно, шаг за шагом. Полагаем $u_1 = v_1$. Условие ортогональности в этом случае тривиально (проверить нечего), и $\langle v_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$.

Следующий вектор u_2 будем искать в виде

$$u_2 = v_2 + \alpha_{2,1}u_1.$$

Будем исходить из того, что должно выполняться соотношение $(u_2, u_1) = 0$, то есть u_1 и строящийся вектор u_2 должны оказаться ортогональными. Скаляр $\alpha_{2,1}$ неизвестен, но из $(u_2, u_1) = 0$ следует, что $(v_2, u_1) + \alpha_{2,1}(u_1, u_1) = 0$, или $(v_2, v_1) + \alpha_{2,1}(v_1, v_1) = 0$. Так как $(v_1, v_1) > 0$, то отсюда находим

$$\alpha_{2,1} = -\frac{(v_2, u_1)}{(u_1, u_1)} = -\frac{(v_2, v_1)}{(v_1, v_1)}.$$

Обратно, если $\alpha_{2,1}$ определяется по этой формуле, то $(v_2, u_1) + \alpha_{2,1}(u_1, u_1) = 0$, а значит, если $u_2 = v_2 + \alpha_{2,1}u_1$, то $(u_2, u_1) = 0$. Отметим еще следующий важный факт: векторы u_1 и u_2 по построению линейно выражаются через v_1 и v_2 , а векторы v_1 и v_2 также линейно выражаются через u_1 и u_2 :

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2 - \alpha_{2,1}u_1.$$

Это означает, что $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$: любую линейную комбинацию v_1 и v_2 можно представить как линейную комбинацию u_1 и u_2 , и наоборот.

Теперь предположим, что уже найдены попарно ортогональные ненулевые векторы u_1, \dots, u_j , обладающие тем свойством, что $\langle u_1, \dots, u_j \rangle = \langle v_1, \dots, v_j \rangle$. Если при этом $\langle v_1, \dots, v_j \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, то процесс закончен, и линейно независимые векторы u_1, \dots, u_j образуют базис W . В противном случае (т.е. когда $v_{j+1} \notin \langle v_1, \dots, v_j \rangle$) будем искать следующий вектор u_{j+1} в виде:

$$u_{j+1} = v_{j+1} + \alpha_{j+1,1}u_1 + \dots + \alpha_{j+1,j}u_j \quad (4.2.1)$$

Этот вектор u_{j+1} должен быть таким, что

$$(u_{j+1}, u_1) = (u_{j+1}, u_2) = \dots = (u_{j+1}, u_j) = 0 \quad (4.2.2)$$

Из этих равенств получаем явный вид коэффициентов $\alpha_{j+1,s}$. Например, из $(u_{j+1}, u_s) = 0$, подставляя вместо u_{j+1} выражение (2.4.1), получим:

$$\left(v_{j+1} + \sum_{t=1}^j \alpha_{j+1,t} u_t, u_s \right) = (v_{j+1}, v_s) + \sum_{t=1}^j \alpha_{j+1,t} (u_t, u_s) = 0.$$

Но по предположению индукции (согласно уже построенному) должны выполняться равенства $(u_t, u_s) = 0$ при $t \neq s$, $1 \leq t, s \leq j$. Поэтому предыдущее равенство переписывается в виде:

$$(v_{j+1}, v_s) + \alpha_{j+1,s} (u_s, u_s) = 0.$$

Так как $(u_s, u_s) > 0$, то

$$\alpha_{j+1,s} = -\frac{(v_{j+1}, u_s)}{(u_s, u_s)} \quad (4.2.3)$$

Таким образом, однозначно определяется u_{j+1} . Обратно, определяя u_{j+1} по формуле (4.2.1), где $\alpha_{j+1,s}$ задаются формулами (4.2.3) ($1 \leq s \leq j$), можно легко убедиться, что будут выполнены равенства (4.2.2). Кроме того, из (4.2.1) следует, что u_{j+1} линейно выражается через v_{j+1} и через u_1, \dots, u_j . Однако каждое u_s , по предположению индукции, линейно выражается через v_1, \dots, v_j . Таким образом, u_{j+1} линейно выражается через v_1, \dots, v_j, v_{j+1} . Это означает, что

$$\langle u_1, \dots, u_j, u_{j+1} \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_j, v_{j+1} \rangle.$$

С другой стороны, из (4.2.1) следует, что

$$v_{j+1} = u_{j+1} - \alpha_{j+1,1} u_1 - \dots - \alpha_{j+1,j} u_j.$$

Так как по предположению индукции (по построению) каждый вектор v_s при $1 \leq s \leq j$ есть линейная комбинация векторов u_1, \dots, u_j , то отсюда следует, что

$$\langle v_1, \dots, v_j, v_{j+1} \rangle \subseteq \langle u_1, \dots, u_j, u_{j+1} \rangle.$$

Этим индуктивное построение заканчивается.

Еще раз напомним, что условием окончания построения является равенство

$$\langle u_1, \dots, u_j \rangle = \langle v_1, \dots, v_j \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle = W.$$

В частности, при $j < m$ это означает, что $v_{j+1} \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$. Если условие выполнено, а мы, тем не менее, захотим все же построить вектор u_{j+1} , то получится вот что. Все предыдущие построения и рассуждения сохраняются, но оказывается, что вектор u_{j+1} , выражающийся в виде линейной комбинации v_1, \dots, v_j, v_{j+1} , фактически выражается только через v_1, \dots, v_j (так как v_{j+1} есть линейная комбинация v_1, \dots, v_j). Но каждый из векторов v_s , $1 \leq s \leq j$, по предположению индукции (по построению) есть линейная комбинация векторов u_1, \dots, u_j . Таким образом, и вектор u_{j+1} будет линейно комбинацией векторов u_1, \dots, u_j . Это означает, что множество векторов u_1, \dots, u_j, u_{j+1} линейно зависимо. Вместе с тем, по построению все эти векторы попарно ортогональны. Если допустить, что $u_{j+1} \neq 0$, то мы получим противоречие с теоремой 2.4.1. Следовательно, $u_{j+1} = 0$, и легко убедиться, что и последующие векторы u_{j+2}, \dots, u_m также окажутся нулевыми.

Однако, если векторы v_1, \dots, v_m линейно независимы, то процесс завершается на m -м шаге построением m ненулевых попарно ортогональных векторов, образующих базис подпространства W .

Теперь пункт 1) теоремы получается следующим образом. Пусть W — рассматриваемое евклидово (или унитарное) пространство, и пусть v_1, \dots, v_m — некоторый базис этого пространства. Тогда применение описанного только что алгоритма позволяет построить новый базис u_1, \dots, u_m пространства W , состоящий из попарно ортогональных векторов. Нормируя векторы этого базиса, получаем ортонормированный базис.

Докажем пункт 2). Пусть дано пространство W (евклидово или унитарное), и пусть v_1, \dots, v_r — некоторое ортогональное множество ненулевых векторов этого пространства. Дополним его до базиса пространства W векторами v_{r+1}, \dots, v_m . Эти векторы уже не предполагаются ни ортогональными друг к другу, ни ортогональными к векторам v_1, \dots, v_r . Проведем процесс построения ортогонального базиса, описанный выше, и получим базис $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m$. Покажем, что построение осуществится так, что будет $u_1 = v_1, \dots, u_r = v_r$. В самом деле, $u_1 = v_1$ согласно описанию алгоритма. Далее, $u_2 = v_2 + \alpha_{2,1}u_1$, но

$$\alpha_{2,1} = -\frac{(v_2, v_1)}{(v_1, v_1)} = 0,$$

так как по условию $(v_2, v_1) = 0$. Поэтому $u_2 = v_2$. Если уже показано, что $u_1 = v_1, \dots, u_j = v_j$, то u_{j+1} находится по формуле (4.2.1), где $\alpha_{j+1,s}$ находятся по формуле (4.2.3):

$$\alpha_{j+1,s} = -\frac{(v_{j+1}, u_s)}{(u_s, u_s)} = -\frac{(v_{j+1}, v_s)}{(v_s, v_s)} = 0.$$

Равенство нулю следует из того, что $(v_{j+1}, v_s) = 0$ согласно условиям пункта 2) (при $1 \leq s < j + 1 \leq r$). Таким образом, из (4.2.1) теперь следует, что $u_{j+1} = v_{j+1}$, и это означает, что мы доказали следующий факт: первые r векторов построенного нами ортогонального базиса u_1, \dots, u_m совпадают с заданными в условии векторами v_1, \dots, v_r . Но тогда остальные векторы u_{r+1}, \dots, u_m можно рассматривать как векторы, дополняющие данное ортогональное множество векторов до ортогонального базиса.

После нормирования построенных таким образом векторов получим соответствующее утверждение для ортонормированных базисов. \square

Алгоритм построения ортогонального (ортонормированного) базиса подпространства, описанный в доказательстве теоремы 4.2.2, часто на-

зывают алгоритмом ортогонализации (или алгоритмом ортогонализации Грама-Шмидта).

Отметим, что в доказательстве теоремы 2.4.2 не используется свойство $(v, v) > 0$ для $v \neq 0$. Кроме того, можно показать, что на каждом этапе алгоритма ортогонализации имеет место равенство определителей матриц Грама:

$$|G(v_1, \dots, v_j)| = |G(u_1, \dots, u_j)|$$

для всех $j = 1, \dots, m$. Читатель может доказать это самостоятельно.

ТЕОРЕМА 4.2.3. Пусть в евклидовом или унитарном пространстве V выбран ортонормированный базис e_1, \dots, e_n , и пусть даны векторы $v = \sum_{j=1}^n a_j e_j$, $u = \sum_{j=1}^n b_j e_j$. Тогда

$$(v, u) = \sum_{j=1}^n a_j b_j \quad (4.2.4)$$

в случае евклидова пространства, и

$$(v, u) = \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j \quad (4.2.5)$$

в случае унитарного пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем вычисления. Пусть пространство евклидово. Тогда

$$(v, u) = \left(\sum_{j=1}^n a_j e_j, \sum_{k=1}^n b_k e_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_k (e_j, e_k).$$

Но для ортонормированного базиса $(e_j, e_k) = 0$ при $j \neq k$, и $(e_j, e_j) = 1$. Ввиду этого предыдущая сумма преобразуется к виду правой части равенства (4.2.4). Аналогично для унитарных пространств:

$$(v, u) = \left(\sum_{j=1}^n a_j e_j, \sum_{k=1}^n b_k e_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j \bar{b}_k (e_j, e_k) = \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j.$$

Теорема доказана. \square

Полезно сопоставить равенства (4.2.4) и (4.2.5) с примерами 4.1.1 и 4.1.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.2.1. *В условиях предыдущей теоремы*

$$\|v\| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из определения нормы и из формул (4.2.4) и (4.2.5). \square

ТЕОРЕМА 4.2.4. *Пусть e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис евклидова или унитарного пространства V , $v \in V$, и $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$. Таким образом, для каждого вектора v справедливо равенство:*

$$v = \sum_{j=1}^n (v, e_j) e_j \quad (4.2.5)$$

Тогда $\alpha_j = (v, e_j)$ для всех j , $1 \leq j \leq n$. Заметим, что в случае унитарных пространств порядок “множителей” в скалярном произведении (v, e_j) поменять нельзя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство очень простое. Берем $v = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, и умножаем скалярно справа на e_j :

$$(v, e_j) = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, v_j \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (e_k, e_j).$$

Теперь, так как $(e_k, e_j) = 0$ при $k \neq j$, а $(v_j, v_j) = 1$, то от правой части предыдущего равенства остается $\alpha_j (e_j, e_j) = \alpha_j$. Поэтому

$$\alpha_j = (v, e_j),$$

откуда следует равенство (4.2.5). \square

Отметим, что равенство (4.2.5) называется *равенством Парсеваля*.

СЛЕДСТВИЕ 4.2.2. Если

$$u = \sum_{j=1}^n (u, e_j) e_j,$$

то в случае евклидовых пространств

$$(v, u) = \sum_{j=1}^n (v, e_j)(u, e_j),$$

а в случае унитарных пространств

$$(v, u) = \sum_{j=1}^n (v, e_j) \overline{(u, e_j)} = \sum_{j=1}^n (v, e_j)(e_j, u).$$

Отсюда, и в том, и другом случае

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^n |(e_j, v)|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко следует из равенства Парсеваля (2.4.5).

□

4.3. Ортогональное дополнение подпространства

Пусть V — евклидово или унитарное векторное пространство, и пусть $U \subseteq V$ — подпространство этого пространства. Рассматривая скалярные произведения векторов из U , нетрудно понять, что и подпространство U также является евклидовым или унитарным.

Пусть V_1 и V_2 — подпространства V . Будем говорить, что эти подпространства *ортогональны*, если $(v_1, v_2) = 0$ для любой пары $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

ЛЕММА 4.3.1. Пусть V_1, \dots, V_m — различные подпространства евклидова или унитарного векторного пространства V . Допустим, что

каждые два подпространства V_j и V_k при $j \neq k$ являются ортогональными. Тогда сумма подпространств $V_1 + \dots + V_m$ является прямой суммой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что сумма векторных подпространств

$$V_1 + \dots + V_m = \{v_1 + \dots + v_m \mid v_1 \in V_1, \dots, v_m \in V_m\}$$

называется прямой суммой, если из того, что $v_1 + \dots + v_m = v'_1 + \dots + v'_m$ следует $v_1 = v'_1, \dots, v_m = v'_m$. Это еще равносильно тому, что из $v_1 + \dots + v_m = 0$ следует, что $v_1 = \dots = v_m = 0$. Именно эту форму определения удобно проверить в данном случае.

Итак, пусть $v_1 + \dots + v_m = 0$. Для каждого j , $1 \leq j \leq m$, будем умножить скалярно левую и правую части этого равенства на v_j . Получится следующее:

$$(v_1 + \dots + v_m, v_j) = (v_1, v_j) + \dots + (v_j, v_j) + \dots + (v_m, v_j) = (0, v_j) = 0.$$

Но $(v_k, v_j) = 0$ для всех $k \neq j$, согласно условию ортогональности подпространств. Таким образом, остается равенство $(v_j, v_j) = 0$. Однако при $v_j \neq 0$ должно быть $(v_j, v_j) > 0$. Таким образом, $v_j = 0$, что и требовалось доказать. \square

Отметим, что если V_1 и V_2 — два ортогональных подпространства, то $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Это следует из леммы 4.3.1 и из известного свойства прямой суммы, но можно дать короткое прямое доказательство. А именно, если $v \in V_1 \cap V_2$, то из ортогональности V_1 и V_2 следует, что вектор v должен быть ортогональным к самому себе, то есть $(v, v) = 0$. Но по свойству скалярного произведения отсюда следует, что $v = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.1. Пусть U есть подпространство евклидова или унитарного векторного пространства V . Рассмотрим множество:

$$U^\perp = \{w \in V \mid (u, w) = 0 \text{ для каждого } u \in U\}.$$

Это множество называется *ортогональным дополнением* к подпространству U .

Еще раз напомним, что из $(u, w) = 0$ следует и $(w, u) = 0$. В унитарном случае $(w, u) = \overline{(u, w)} = \overline{0} = 0$. Таким образом, условия $(u, w) = 0$ и $(w, u) = 0$ эквивалентны.

ТЕОРЕМА 4.3.1. *Пусть V — евклидово или унитарное векторное пространство, U — его подпространство. Тогда ортогональное дополнение U^\perp также является векторным подпространством, и при этом*

$$V = U \oplus U^\perp.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим для U^\perp свойство, определяющее векторное подпространство. Пусть $w_1, w_2 \in U^\perp$, α_1, α_2 — элементы поля. Покажем, что $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in U^\perp$. Для этого возьмем произвольный вектор $u \in U$, и покажем, что $(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2, u) = 0$. В самом деле,

$$(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2, u) = \alpha_1 (w_1, u) + \alpha_2 (w_2, u) = 0,$$

так как по условию (и по определению U^\perp) $(w_1, u) = 0$ и $(w_2, u) = 0$. Таким образом, для вектора $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ выполнено условие, сформулированное в определении 4.3.1. Следовательно, U^\perp есть векторное подпространство.

Чтобы установить равенство $V = U \oplus U^\perp$, воспользуемся теоремой 4.2.2 из предыдущего параграфа. Выберем в U (а это конечномерное пространство) какой-либо ортогональный базис u_1, \dots, u_m , и дополним его до ортогонального базиса всего пространства V векторами u_{m+1}, \dots, u_n . Положим $U' = \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle$. Тогда по известному свойству прямых сумм (теорема 3.1.5 из выпуска II) будем иметь $V = U \oplus U'$. Остается показать, что $U^\perp = U'$.

Заметим прежде всего, что $U' \subseteq U^\perp$. В самом деле, любой элемент $u \in U$ записывается в виде $u = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j$, а любой $u' \in U'$ — в виде

$u' = \sum_{k=m+1}^n \beta_k u_k$. Вычисляя (u, u') , получим:

$$\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j, \sum_{k=m+1}^n \beta_k u_k \right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=m+1}^n \alpha_j \bar{\beta}_k (u_j, u_k).$$

В евклидовом случае, разумеется, $\bar{\beta}_k = \beta_k$. Но так как базисные векторы ортогональны, то при $1 \leq j \leq m$ и $m+1 \leq k \leq n$ всегда будет $(u_j, u_k) = 0$. Это означает, что $(u, u') = 0$ для каждого $u \in U$, и по определению 4.3.1 получаем $u' \in U^\perp$. Теперь мы находимся в следующей ситуации: $V = U \oplus U'$ и $U' \subset U^\perp$. Каждый вектор $v \in V$ представляется в виде $v = u + u'$, где $u \in U$, $u' \in U'$. Но вектор u' принадлежит также подпространству U^\perp . Таким образом, $v = u + u'$, где $u \in U$, $u' \in U^\perp$. Это означает, что $V = U + U^\perp$. Но по самому определению U^\perp , подпространства U и U^\perp ортогональны. Теперь из леммы 4.3.1 следует, что сумма $U + U^\perp$ является прямой суммой. Фактически это уже доказывает теорему, так как только что было показано, что $V = U + U^\perp$. Тем не менее, докажем и равенство $U' = U^\perp$. Из прямой суммы $V = U \oplus U'$, вычисляя размерности левой и правой частей, получаем $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U')$. А из прямой суммы $V = U \oplus U^\perp$, вычисляя размерности левой и правой частей, получаем $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$. Сравнивая, видим, что $\dim(U') = \dim(U^\perp)$. Но так как $U' \subseteq U^\perp$, то отсюда следует $U' = U^\perp$. \square

СЛЕДСТВИЕ 4.3.1. $(U^\perp)^\perp = U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это можно установить примерно тем же способом, которым была доказана предыдущая теорема. Во-первых, из определения 4.3.1 следует, что $U \subseteq (U^\perp)^\perp$. Далее, по теореме 4.3.1

$V = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp$ и $V = U \oplus U^\perp$. Порядок слагаемых в прямых суммах не играет никакой роли. Сравнивая размерности, получаем $\dim(U) = \dim((U^\perp)^\perp)$. Теперь из $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ следует, что $U = (U^\perp)^\perp$. \square

4.4. Расстояние от точки до подпространства

В евклидовых и унитарных пространствах, где определены расстояния между векторами, можно придать смысл понятию расстояния от вектора до векторного подпространства.

Сначала разберемся в одной общей ситуации. Пусть векторное пространство V над произвольным полем представлено в виде прямой суммы подпространств: $V = V_1 \oplus V_2$. Тогда по определению прямой суммы каждый вектор $v \in V$ можно *единственным* способом записать в виде $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Таким образом, можно сопоставить вектору v однозначно определяемые по v векторы $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$. Это означает, что определены два отображения,

$$\begin{aligned} \pi_1 : V &\longrightarrow V_1, & \pi_1(v) &= v_1, \\ \pi_2 : V &\longrightarrow V_2, & \pi_2(v) &= v_2. \end{aligned}$$

Эти отображения называются *проекциями* векторного пространства V на прямые слагаемые V_1 и V_2 .

ЛЕММА 4.4.1. *Проекции на прямые слагаемые являются линейными отображениями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Главную роль играет свойство однозначности слагаемых в записи $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Если $v = \alpha'v' + \alpha''v''$, где α', α'' — элементы поля, а v' и v'' — векторы, то каждый из этих векторов также представляется в виде суммы соответственно разложению $V = V_1 \oplus V_2$:

$$v' = v'_1 + v'_2, \quad v'' = v''_1 + v''_2, \quad v'_1, v''_1 \in V_1, \quad v'_2, v''_2 \in V_2.$$

Тогда

$$v = \alpha'v' + \alpha''v'' = \alpha'v'_1 + \alpha'v'_2 + \alpha''v''_1 + \alpha''v''_2 = (\alpha'v'_1 + \alpha''v''_1) + (\alpha'v'_2 + \alpha''v''_2).$$

Так как $\alpha'v'_1 + \alpha''v''_1 \in V_1$, а $\alpha'v'_2 + \alpha''v''_2 \in V_2$, то из $v = v_1 + v_2$ и из единственности такой записи следует, что

$$v_1 = \alpha'v'_1 + \alpha''v''_1, \quad v_2 = \alpha'v'_2 + \alpha''v''_2.$$

Используя обозначения для проекций π_1 и π_2 , и учитывая, что $\pi_1(v') = v'_1$, $\pi_1(v'') = v''_1$, $\pi_2(v') = v'_2$, $\pi_2(v'') = v''_2$, это можно переписать в следующем виде:

$$\pi_1(\alpha'v' + \alpha''v'') = \alpha'\pi_1(v') + \alpha''\pi_1(v''), \quad \pi_2(\alpha'v' + \alpha''v'') = \alpha'\pi_2(v') + \alpha''\pi_2(v'').$$

Но это и означает, что π_1 и π_2 — линейные отображения. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4.1. Пусть V — евклидово или унитарное векторное пространство, $v \in V$, и $U \subseteq V$ — подпространство пространства V . Рассмотрим разложение в прямую сумму $V = U \oplus U^\perp$, и пусть $v = u + w$, где $u \in U$ — проекция v на U , а $w \in U^\perp$ — проекция v на U^\perp . Величина (действительное неотрицательное число) $\|w\|$ называется *расстоянием от вектора v до подпространства U* .

Обоснованием этого названия может служить следующая теорема:

ТЕОРЕМА 4.4.1. Пусть данный вектор v представлен в виде некоторой суммы $v = u' + w'$, где $u' \in U$. Тогда $\|w'\| \geq \|w\|$. Равенство достигается только при $w' = w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $v = u + w$ и $v = u' + w'$, где $u, u' \in U$, и $(u'', w) = 0$ для каждого $u'' \in U$, то $u + w = u' + w'$, откуда имеем $w' = w + (u - u')$, причем $u - u' \in U$. Тогда

$$\begin{aligned} \|w'\|^2 &= (w', w') = (w + (u - u'), w + (u - u')) = \\ &= (w, w) + (u - u', w) + (w, u - u') + (u - u', u - u'). \end{aligned}$$

Так как (ввиду $w \in U^\perp$) $(u - u', w) = (w, u - u') = 0$, то получается равенство

$$\|w'\|^2 = (w, w) + (u - u', u - u') = \|w\|^2 + \|u - u'\|^2.$$

Но так как $\|u - u'\|^2 \geq 0$, то $\|w'\|^2 \geq \|w\|^2$. А так как нормы неотрицательны, то это значит, что и $\|w'\| \geq \|w\|$. Из $\|w'\|^2 = \|w\|^2 + \|u - u'\|^2$ также следует, что равенство $\|w'\| = \|w\|$ возможно в том и только в том случае, если $\|u - u'\| = 0$, то есть $u = u'$. Но тогда из $w' = w + (u - u')$ делаем вывод, что равенство норм возможно только при $w = w'$. \square

Теперь опишем алгоритм практического вычисления расстояния от вектора до подпространства. Пусть подпространство U задано семейством образующих (например, базисом): $U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$. Векторы u_1, \dots, u_m не обязательно линейно независимы, и не обязательно ортогональны. Проекция заданного вектора v на U представляется в виде:

$$u = \sum_{j=1}^m x_j u_j,$$

где коэффициенты x_j пока неизвестны (однако они существуют, так как существует вектор v и его проекция u). Так как $u_j \in U$ и $w \in U^\perp$, то $(w, u_j) = 0$ для каждого индекса j . Равенство

$$v = u + w$$

умножаем справа скалярно на u_j , $j = 1, 2, \dots, m$, и получаем соотношение:

$$(v, u_j) = (u, u_j) + (w, u_j) = (u, u_j).$$

Вычисляем (u, u_j) :

$$(u, u_j) = \left(\sum_{k=1}^m x_k u_k, u_j \right) = \sum_{k=1}^m x_k (u_k, u_j).$$

Таким образом, для нахождения x_1, \dots, x_m получается система из m линейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{cases} (u_1, u_1)x_1 + (u_2, u_1)x_2 + \dots + (u_m, u_1)x_m = (v, u_1) \\ (u_1, u_2)x_1 + (u_2, u_2)x_2 + \dots + (u_m, u_2)x_m = (v, u_2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ (u_1, u_m)x_1 + (u_2, u_m)x_2 + \dots + (u_m, u_m)x_m = (v, u_m) \end{cases}$$

Как уже было отмечено, эта система имеет решение. Матрица этой системы есть матрица Грама векторов u_1, \dots, u_m . Если векторы u_1, \dots, u_m линейно независимы, то по теореме 4.1.5 эта матрица невырождена, так что решение единственно. Впрочем, единственность решения в этом случае следует просто из того, что векторы u_1, \dots, u_m будут базисом U , и поэтому вектор u записывается в виде их линейной комбинации единственным способом.

Решаем систему, находим x_1, \dots, x_m , и тем самым находим явный вид $u = \sum_{j=1}^m x_j u_j$. Затем из $v = u + w$ находим $w = v - u$. Остается вычислить искомое расстояние $\|w\|$.

4.5. Изоморфизмы евклидовых и унитарных пространств

ТЕОРЕМА 4.5.1. Пусть V и W два евклидовых (или унитарных) пространства, имеющие одинаковую размерность. Тогда существует изоморфизм $\varphi : V \rightarrow W$ такой, что для любых двух векторов $v, u \in V$ справедливо равенство:

$$(v, u) = (\varphi(v), \varphi(u)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все, что нам необходимо знать об евклидовых или унитарных пространствах — это то, что в них существуют ортонормированные базисы. Выберем какой-нибудь ортонормированный

базис v_1, \dots, v_n в пространстве V , и произвольный ортонормированный базис w_1, \dots, w_n в пространстве W . Уже известно, что существует однозначным образом определяемое линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$, переводящее элементы базиса v_j в элементы другого базиса w_j для всех j (то есть $\varphi(v_j) = w_j$ для всех j), и это отображение является изоморфизмом векторных пространств. Если $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ — некоторый вектор из V , то $\varphi(v) = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$. Покажем, что изоморфизм φ обладает требуемым свойством.

В самом деле, пусть $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$, $u = \sum_{k=1}^n \beta_k v_k$. Тогда

$$\begin{aligned} (v, u) &= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^n \beta_k v_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k (v_j, v_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \end{aligned}$$

в случае евклидовых пространств, и

$$\begin{aligned} (v, u) &= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^n \beta_k v_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_k (v_j, v_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_k \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_j \end{aligned}$$

в случае унитарных пространств. Черта сверху означает, как обычно, комплексное сопряжение. Вычисляя точно также $(\varphi(v), \varphi(u))$, получим

$$\begin{aligned} (\varphi(v), \varphi(u)) &= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j w_j, \sum_{k=1}^n \beta_k w_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k (w_j, w_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j \end{aligned}$$

в случае евклидовых пространств, и

$$\begin{aligned} (\varphi(v), \varphi(u)) &= \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j w_j, \sum_{k=1}^n \beta_k w_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_k (w_j, w_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_k \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_j \end{aligned}$$

в случае пространств унитарных. Теперь очевидно, что и в том, и в другом случае есть равенство $(v, u) = (\varphi(v), \varphi(u))$. \square

Изоморфизм $\varphi : V \rightarrow W$ со свойством

$$(v, u) = (\varphi(v), \varphi(u))$$

для любых двух векторов $v, u \in V$ естественно назвать *изоморфизмом евклидовых (унитарных) пространств*, так как он устанавливает взаимно-однозначное соответствие не только между структурами векторных пространств, но и между дополнительными структурами, задаваемыми скалярными произведениями.

Смысл доказанной только что теоремы состоит в том, что для каждого n с точностью до изоморфизма (евклидовых или унитарных пространств) существует ровно одно евклидово или унитарное пространство данной размерности n . В частности, каждое евклидово пространство изоморфно пространству из примера 4.1.1, а каждое унитарное пространство изоморфно пространству из примера 4.1.2. Именно поэтому формулы (4.2.4) и (4.2.5) так похожи на скалярные произведения из данных примеров.

ГЛАВА V. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ И УНИТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

5.1. Ортогональные и унитарные операторы

ТЕОРЕМА 5.1.1. Пусть V — евклидово (унитарное) пространство, $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Эквивалентны следующие утверждения:

- 1) Оператор \mathcal{A} отображает некоторый ортонормированный базис e_1, \dots, e_n в ортонормированный базис $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$;
- 2) Для любых двух векторов $v, w \in V$ имеет место равенство $(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = (v, w)$;
- 3) Для любого вектора $v \in V$ имеет место равенство $(\mathcal{A}v, \mathcal{A}v) = (v, v)$;
- 4) Оператор \mathcal{A} отображает любой ортонормированный базис пространства V в ортонормированный базис.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) \implies 2). Пусть $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$, $w = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k$.

Тогда в случае, если пространство евклидово, будем иметь: $(v, w) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k (e_j, e_k)$. Так как $(e_j, e_k) = 0$ при $j \neq k$, а $(e_j, e_j) = 1$, то вся

эта сумма равна $\sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j$.

Далее,

$$\mathcal{A}v = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathcal{A}e_j, \quad \mathcal{A}w = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathcal{A}e_k, \quad (\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \beta_k (\mathcal{A}e_j, \mathcal{A}e_k).$$

Если $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$ — также ортонормированный базис, то из $(\mathcal{A}e_j, \mathcal{A}e_k) = 0$ (при $j \neq k$) и $(\mathcal{A}e_j, \mathcal{A}e_j) = 1$ получаем $(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j = (v, w)$.

В случае, если пространство является унитарным, вычисления не-много изменятся:

$$(v, w) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_k (e_j, e_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_j.$$

Далее, $\mathcal{A}v = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathcal{A}e_j$, $\mathcal{A}w = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathcal{A}e_k$,

$$(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_k (\mathcal{A}e_j, \mathcal{A}e_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_j = (v, w).$$

2) \implies 3). Очевидно.

3) \implies 2). Рассмотрим отдельно случаи евклидова и унитарного пространства.

Пусть пространство евклидово. Согласно условию пункта 3), для любых $v, w \in V$ имеет место равенство: $(\mathcal{A}(v+w), \mathcal{A}(v+w)) = (v+w, v+w)$. “Раскрывая скобки” (т.е. вычисляя скалярные произведения), получаем следующее:

$$(\mathcal{A}v, \mathcal{A}v) + (\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) + (\mathcal{A}w, \mathcal{A}v) + (\mathcal{A}w, \mathcal{A}w) = (v, v) + (v, w) + (w, v) + (w, w).$$

Согласно условию пункта 3), $(\mathcal{A}v, \mathcal{A}v) = (v, v)$, $(\mathcal{A}w, \mathcal{A}w) = (w, w)$. Отсюда получаем равенство:

$$(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) + (\mathcal{A}w, \mathcal{A}v) = (v, w) + (w, v).$$

Теперь надо вспомнить, что в евклидовом пространстве $(x, y) = (y, x)$ для любых векторов $x, y \in V$. Таким образом, $2(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = 2(v, w)$, откуда получаем искомое равенство $(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = (v, w)$.

Рассмотрим случай унитарного пространства. Пусть $(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = \alpha + i\beta$, $(v, w) = a + ib$, где α, β, a, b — действительные числа. Если воспроизвести предыдущие выкладки, и получить равенство $(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) + (\mathcal{A}w, \mathcal{A}v) = (v, w) + (w, v)$, то рассуждать далее, как в случае евклидова

пространства, уже не получится, так как в унитарных пространствах $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (комплексное сопряжение). Однако, если применить это свойство, то придем к равенству:

$$(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) + \overline{(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w)} = (v, w) + \overline{(v, w)},$$

откуда следует, что $\alpha = a$. Чтобы получить равенство комплексных частей, используем то, что согласно пункту 3), имеется равенство $(\mathcal{A}(v + iw), \mathcal{A}(v + iw)) = (v + iw, v + iw)$. Прodelывая сначала те же преобразования, что и выше, приходим к равенству:

$$(\mathcal{A}v, i\mathcal{A}w) + (i\mathcal{A}w, \mathcal{A}v) = (v, iw) + (iw, v).$$

Так как в унитарном пространстве $(x, iy) = -i(x, y)$, $(ix, y) = i(x, y)$, то получаем:

$$-i(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) + i(\mathcal{A}w, \mathcal{A}v) = -i(v, w) + i(w, v),$$

или

$$-i((\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) - \overline{(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w)}) = -i((v, w) - \overline{(v, w)}),$$

то есть

$$(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) - \overline{(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w)} = (v, w) - \overline{(v, w)}.$$

Из этого равенства следует $b = \beta$. Таким образом, $(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = \alpha + i\beta = a + ib = (v, w)$.

2) \implies 4). Пусть e_1, \dots, e_n — произвольный ортонормированный базис пространства V . Тогда, согласно пункту 2), $(\mathcal{A}e_k, \mathcal{A}e_j) = (e_k, e_j)$, то есть $(\mathcal{A}e_k, \mathcal{A}e_j) = 0$ при $k \neq j$, и $(\mathcal{A}e_j, \mathcal{A}e_j) = 1$. Таким образом, $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$ — ортогональная система векторов в n -мерном пространстве V . Из ортогональности следует линейная независимость, а из того, что количество векторов совпадает с размерностью пространства, следует то, что эта система векторов является базисом.

4) \implies 1). Очевидно.

Теорема доказана. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.1. Оператор, обладающий любым из эквивалентных свойств, сформулированных в предыдущей теореме, называется *ортогональным* в случае, если пространство V евклидово, или *унитарным*, если пространство V унитарно (эрмитово).

ЛЕММА 5.1.1. Пусть V — евклидово (унитарное) пространство, A, B — линейные операторы на V .

- 1) Если A и B ортогональны (унитарны), то их суперпозиция AB также является ортогональным (унитарным) оператором.
- 2) Каждый ортогональный (унитарный) оператор A является невырожденным (т.е. имеет обратный), причем оператор A^{-1} также является ортогональным (унитарным).
- 3) Тожественный оператор E является ортогональным (унитарным).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) почти очевиден: достаточно рассмотреть некоторый ортонормированный базис e_1, \dots, e_n , перевести его в ортонормированный базис Be_1, \dots, Be_n с помощью оператора B , а затем этот ортонормированный базис перевести с помощью оператора A в ортонормированный базис ABe_1, \dots, ABe_n . Требуемое утверждение вытекает из пункта 4) теоремы 5.1.1.

Любой оператор, переводящий базис в базис, является невырожденным (обратимым). Если оператор A переводит ортонормированный базис e_1, \dots, e_n в ортонормированный базис Ae_1, \dots, Ae_n , то обратный оператор переводит этот базис в базис e_1, \dots, e_n и, таким образом, сам является ортогональным согласно пункту 1) теоремы 5.1.1.

То, что \mathcal{E} является ортогональным (унитарным), очевидно: любой ортонормированный базис переходит сам в себя. \square

Множество всех невырожденных (обратимых) линейных операторов из V в V образует группу относительно операции суперпозиции операторов. Эта группа обозначается через $\mathbf{GL}(V)$. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем K . Множество всех невырожденных (обратимых) матриц n -го порядка над K образует группу относительно операции умножения матриц. Эта группа обозначается через $GL_n(K)$, и называется *общей линейной группой* n -го порядка над K . После выбора некоторого базиса в V соответствие $\mathcal{A} \leftrightarrow A = M_{\mathcal{A}}$ определяет изоморфизм групп $\mathbf{GL}(V)$ и $GL_n(K)$. Это следует из свойств матриц линейных операторов: $M_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = M_{\mathcal{A}}M_{\mathcal{B}}$ и $M_{\mathcal{E}} = E$ (единичная матрица).

ТЕОРЕМА 5.1.2. Пусть V — евклидово пространство. Множество $\mathbf{O}(V)$ всех ортогональных операторов из V в V является группой относительно операции суперпозиции. Группа $\mathbf{O}(V)$ является подгруппой группы $\mathbf{GL}(V)$.

Пусть V — унитарное пространство. Множество $\mathbf{U}(V)$ всех унитарных операторов из V в V является группой относительно операции суперпозиции. Группа $\mathbf{U}(V)$ является подгруппой группы $\mathbf{GL}(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное следствие предыдущей леммы и определения подгруппы. \square

Напомним некоторые сведения о матрице билинейной формы. Если $\beta : V \times V \rightarrow K$ — любая билинейная форма, и e_1, \dots, e_n — некоторый базис V , то элементы $b_{i,j} = \beta(e_i, e_j)$ образуют матрицу B , которая и называется матрицей формы β . Если даны векторы $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $w = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, и $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ (это столбцы), то $\beta(v, w) =$

$x^T B y$.

В случае, когда K есть поле комплексных чисел, и форма β полуторалинейна, имеет место равенство $\beta(v, w) = x^T B \bar{y}$, где $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)^T$, и черта обозначает комплексное сопряжение.

Если $\beta(v, w) = (v, w)$ в евклидовом или унитарном пространстве, и базис e_1, \dots, e_n выбран ортонормированным, то матрица формы становится единичной, и в этом случае $(v, w) = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ для евклидова пространства, и $(v, w) = x^T \bar{y} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ для унитарного пространства.

ТЕОРЕМА 5.1.3. Пусть $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — линейный оператор в евклидовом или унитарном пространстве, и пусть A есть матрица этого оператора в некотором ортонормированном базисе.

- 1) Оператор \mathcal{A} в евклидовом пространстве является ортогональным тогда и только тогда, если $A^{-1} = A^T$.
- 2) Оператор \mathcal{A} в унитарном пространстве является унитарным тогда и только тогда, если $A^{-1} = \bar{A}^T$.

Здесь \bar{A} есть матрица, i, j -й элемент которой есть $\bar{a}_{i,j}$, где $a_{i,j}$ есть i, j -й элемент матрицы A . Черта означает комплексное сопряжение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подробно унитарный случай. Пусть $v = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $w = \sum_{k=1}^n y_k e_k$, где e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис. Пусть A есть матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Положим $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$. Тогда столбец Ax состоит из координат вектора $\mathcal{A}v$, а столбец Ay — из координат вектора $\mathcal{A}w$ в базисе e_1, \dots, e_n (теорема 1.2.2, выпуск I данного курса лекций). Для любых v, w , а значит, для всех столбцов x, y справедливы равенства:

$$(v, w) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j = x^T \bar{y} = (\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = (Ax)^T \overline{(Ay)} = x^T (A^T \bar{A}) \bar{y}.$$

Обозначим временно через B матрицу $A^T \bar{A}$, и выясним, что следует из того, что $x^T B \bar{y} = x^T \bar{y}$ для любых x и y . Пусть x есть столбец, в j -й строке которого стоит единица, а во всех остальных строках нули, а y есть столбец, в k -й строке которого располагается единица, а все остальные компоненты нулевые. Тогда $\bar{y} = y$, $x^T \bar{y} = \delta_{j,k}$ (символ Кронекера), а $x^T B \bar{y}$ есть j, k -й элемент матрицы B . Таким образом, j, k -й элемент матрицы $A^T \bar{A}$ равен $\delta_{j,k}$ для всех j, k . Но это означает, что $A^T \bar{A} = E$ — единичная матрица. Транспонируя, получим $\bar{A}^T A = E$. Отсюда следует, что $A^{-1} = \bar{A}^T$.

Обратно, пусть A — матрица оператора \mathcal{A} в ортонормированном базисе, и $A^{-1} = \bar{A}^T$. Приведенные выше рассуждения легко проводятся в обратном направлении. Из $A^{-1} = \bar{A}^T$ получаем $\bar{A}^T A = E$, и, транспонируя, приходим к равенству: $A^T \bar{A} = E$. Отсюда следует, что для любых столбцов x, y (а значит, для всех векторов v, w) имеется равенство: $x^T (A^T \bar{A}) \bar{y} = x^T E \bar{y} = x^T \bar{y}$. Так как $x^T \bar{y} = (v, w)$, $x^T (A^T \bar{A}) \bar{y} = (Ax)^T \bar{A} \bar{y} = (\mathcal{A}v, \mathcal{A}w)$. Таким образом, получено равенство $(v, w) = (\mathcal{A}v, \mathcal{A}w)$, и оператор \mathcal{A} является унитарным.

Случай ортогональных операторов рассматривается совершенно аналогично, надо лишь учесть то, что комплексного сопряжения в этом случае нет. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.2. Матрица $A \in GL_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной*, если $A^{-1} = A^T$. Матрица $A \in GL_n(\mathbb{C})$ называется *унитарной*, если $A^{-1} = \bar{A}^T$.

Множество ортогональных матриц n -го порядка обозначается через $\mathbf{O}(n)$. Это подгруппа группы $GL_n(\mathbb{R})$, называемая *ортогональной группой* n -го порядка, изоморфная группе $\mathbf{O}(V)$. Важное значение имеет подгруппа $\mathbf{SO}(n)$ группы $\mathbf{O}(n)$, состоящая из ортогональных матриц

с единичным определителем (*специальная ортогональная группа*).

Множество унитарных матриц n -го порядка обозначается через $U(n)$. Это подгруппа группы $GL_n(\mathbb{C})$, изоморфная группе $U(V)$. Она называется *унитарной группой* n -го порядка. Ее подгруппа, состоящая из всех унитарных матриц с единичным определителем, обозначается через $SU(n)$ и называется *специальной унитарной группой*.

В поле $K = \mathbb{R}$ можно также определить сопряжение полагая $\bar{\alpha} = \alpha$ для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$. Ввиду этого можно для любой матрицы A с действительными или комплексными компонентами определить *сопряженную* к ней матрицу A^* , полагая $A^* = \bar{A}^T$. В случае, когда компоненты A действительны, это означает, что $A^* = A^T$.

Ортогональную (или унитарную) матрицу A можно, таким образом, охарактеризовать тем, что $A^{-1} = A^*$.

Для любых матриц A и B имеют место равенства: $(AB)^* = B^*A^*$, $(A^*)^* = A$. Это следует из известного равенства $(AB)^T = B^T A^T$ и из очевидного (или легко проверяемого) равенства $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$.

ЛЕММА 5.1.2. 1) Пусть V — евклидово пространство размерности n . Ортогональные $n \times n$ -матрицы, и только они, являются матрицами перехода от одного ортонормированного базиса V к другому ортонормированному базису.

2) Пусть V — унитарное пространство размерности n . Унитарные $n \times n$ -матрицы, и только они, являются матрицами перехода от одного ортонормированного базиса V к другому ортонормированному базису.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e_1, \dots, e_n — некоторый базис. Задать матрицу перехода к базису e'_1, \dots, e'_n , т.е. задать соотношения $e'_j = \sum_{k=1}^n a_{k,j} e_k$ — это то же самое, что задать линейный оператор \mathcal{A} , опреде-

лив его на базисных элементах как $\mathcal{A}e_j = \sum_{k=1}^n a_{k,j}e_k$. Матрица перехода $A = (a_{k,j})_{1 \leq k,j \leq n}$ есть матрица оператора \mathcal{A} в базисе e_1, \dots, e_n . Оператор \mathcal{A} является ортогональным (унитарным) тогда и только тогда, если он переводит ортонормированный базис e_1, \dots, e_n в ортонормированный базис $e'_1 = \mathcal{A}e_1, \dots, e'_n = \mathcal{A}e_n$. Соответственно, матрица A будет матрицей перехода от ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису тогда и только тогда, когда она есть матрица ортогонального (унитарного) оператора, то есть сама является ортогональной (унитарной). \square

5.2. Сопряженные операторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.1. Пусть V — евклидово (или унитарное) пространство, $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — линейный оператор, e_1, \dots, e_n — некоторый ортонормированный базис V , A — матрица \mathcal{A} в этом базисе. Оператор с матрицей A^* в базисе e_1, \dots, e_n называется оператором, *сопряженным к \mathcal{A}* , и обозначается через \mathcal{A}^* .

ЛЕММА 5.2.1. Пусть e'_1, \dots, e'_n — любой другой ортонормированный базис V , и A' — матрица \mathcal{A} в этом базисе. Тогда матрицей \mathcal{A}^* в этом базисе будет матрица $(A')^*$.

Иными словами, определение сопряженного оператора не зависит от выбора ортонормированного базиса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e'_j = \sum_{k=1}^n c_{k,j}e_k$. Тогда матрица $C = (c_{k,j})_{1 \leq k,j \leq n}$ является, как уже было показано выше, ортогональной (унитарной). Таким образом, матрицей \mathcal{A} в базисе e'_1, \dots, e'_n будет матрица $C^{-1}AC = C^*AC$, а матрицей оператора \mathcal{A}^* в этом базисе будет матрица $C^{-1}A^*C = C^*A^*C$. Легко убедиться, что $(C^*AC)^* = C^*A^*C$. \square

ТЕОРЕМА 5.2.1. Пусть V — евклидово (или унитарное) пространство, $\mathcal{A}, \mathcal{B} : V \rightarrow V$ — линейные операторы. Эквивалентны следующие утверждения:

1) $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$;

2) Для любых $v, w \in V$ имеет место равенство:

$$(\mathcal{A}v, w) = (v, \mathcal{B}w)$$

Таким образом, сопряженный к \mathcal{A} оператор полностью определяется условием:

$$(\mathcal{A}v, w) = (v, \mathcal{A}^*w)$$

для любых $v, w \in V$. При этом $(\mathcal{A}^*v, w) = (v, \mathcal{A}w)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем некоторый ортонормированный базис e_1, \dots, e_n , и пусть $\mathcal{A}e_j = \sum_{k=1}^n a_{k,j}e_k$, $\mathcal{B}e_j = \sum_{k=1}^n b_{k,j}e_k$, так что A и B — матрицы операторов \mathcal{A} и \mathcal{B} соответственно. Рассмотрим $v = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, $w = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, и пусть, как и выше, x и y есть столбцы из координат векторов v и w . По теореме 1.2.2 столбец координат вектора $\mathcal{A}v$ есть Ax , а столбец из координат $\mathcal{B}w$ есть By . Вычислим $(\mathcal{A}v, w)$ и $(v, \mathcal{B}w)$.

$$(\mathcal{A}v, w) = (Ax)^T \bar{y} = x^T A^T \bar{y}, \quad (v, \mathcal{B}w) = x^T \overline{By} = x^T \overline{B} \bar{y} \quad (5.2.1)$$

Если $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$, то $B = A^* = \overline{A}^T$, $\overline{B} = A^T$, и из (5.2.1) следует $(\mathcal{A}v, w) = (v, \mathcal{B}w)$, то есть 1) \implies 2).

Обратно, если $(\mathcal{A}v, w) = (v, \mathcal{B}w)$ для любых v и w , то из (5.2.1) получим, что

$$x^T A^T \bar{y} = x^T \overline{B} \bar{y}$$

для произвольных столбцов x и y . Как и выше, рассмотрим случай, когда x есть столбец, в j -й строке которого стоит единица, а во всех

остальных строках нули, а y есть столбец, в k -й строке которого располагается единица, а все остальные компоненты нулевые. Тогда $\bar{y} = y$, $x^T A^T \bar{y}$ есть j, k -й элемент матрицы A^T , а $x^T \bar{B} \bar{y}$ есть j, k -й элемент матрицы \bar{B} . Так как индексы j, k могут принимать все возможные значения, то получаем, что $A^T = \bar{B}$, или $A^* = B$, что и требовалось доказать. \square

5.3. Самосопряженные операторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3.1. Линейный оператор в евклидовом (или унитарном) пространстве называется *самосопряженным*, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Другое название — *эрмитов* оператор. В случае евклидова пространства оператор со свойством $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ называется также *симметрическим*.

Напомним, что матрица A с действительными компонентами называется *симметрической*, если $A = A^T$. Если i, j -й элемент матрицы A есть $a_{i,j}$, то условие симметричности матрицы означает, что $a_{i,j} = a_{j,i}$ для всех индексов i, j . В случае матриц с комплексными компонентами матрица A называется *эрмитовой*, если $A = A^*$. Симметрические матрицы можно считать частным случаем эрмитовых матриц. Эрмитовость матрицы A означает, что $a_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$ для всех индексов i, j . Черта сверху, как обычно, обозначает комплексное сопряжение. В частности, если $i = j$, то $a_{i,i} = \bar{a}_{i,i}$. Это означает, что на главной диагонали у эрмитовой матрицы должны находиться действительные числа. Если это не так, то матрица автоматически не будет эрмитовой.

ЛЕММА 5.3.1. *Оператор \mathcal{A} является симметрическим тогда и только тогда, если его матрица в некотором (на самом деле — в любом) ортонормированном базисе будет симметрической.*

Оператор \mathcal{A} в унитарном пространстве является самосопряженным (эрмитовым) тогда и только тогда, если его матрица в некотором (на самом деле — в любом) ортонормированном базисе будет эрмитовой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из самого определения самосопряженного оператора. Если \mathcal{A} — некоторый оператор, e_1, \dots, e_n — какой угодно ортонормированный базис, и A — матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе, то \mathcal{A}^* есть оператор с матрицей A^* в том же базисе. Условие $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ равносильно тому, что $A = A^*$. Равносильность следует из установленного ранее взаимно-однозначного соответствия между множеством всех линейных операторов и множеством всех $n \times n$ -матриц (при выбранном фиксированном базисе). \square

ТЕОРЕМА 5.3.1. Пусть $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — линейный оператор.

- 1) Пусть V — евклидово пространство, и $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Тогда характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$ раскладывается на линейные множители над полем \mathbb{R} .
- 2) Пусть V — унитарное пространство, и $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Тогда все собственные значения оператора \mathcal{A} являются действительными числами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем какой-нибудь ортонормированный базис, и пусть A — матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Рассмотрим произвольный корень z характеристического многочлена матрицы A . Так как определитель $|A - zE|$ равен нулю, существует ненулевое решение $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ системы линейных неоднородных уравнений $(A - zE)x = 0$. Числа x_i будут, вообще говоря, комплексными. Запи-

шем систему уравнений (точнее — уже равенств) более подробно:

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j = zx_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Умножим k -е уравнение на \bar{x}_k , и просуммируем по k левые и правые части полученных равенств:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j\bar{x}_k = z \sum_{k=1}^n x_k\bar{x}_k = z \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \quad (5.3.1)$$

Заметим, что $\sum_{k=1}^n x_k\bar{x}_k$ есть действительное число, отличное от нуля (так как не все x_k равны нулю). Если теперь удастся доказать, что левая часть (5.3.1) (обозначим ее через s) является действительным числом, то действительным будет и z . Напомним, что число s будет действительным в том и только в том случае, если $s = \bar{s}$. Поэтому необходимо вычислить число, сопряженное к левой части (5.3.1).

Допустим, что пространство евклидово, и оператор \mathcal{A} симметрический. Это значит, что все $a_{k,j} = a_{j,k}$ действительны. Поэтому:

$$\bar{s} = \overline{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j\bar{x}_k} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{k,j}\bar{x}_jx_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{j,k}x_k\bar{x}_j = s.$$

Рассмотрим случай унитарного пространства, и эрмитова (т.е. самосопряженного) оператора \mathcal{A} . Это значит, что $\bar{a}_{k,j} = a_{j,k}$ для всех j и k .

Проведем соответствующие вычисления:

$$\bar{s} = \overline{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j\bar{x}_k} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{a}_{k,j}\bar{x}_jx_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{j,k}x_k\bar{x}_j = s.$$

Таким образом, в обоих случаях корень характеристического многочлена является действительным числом. \square

СЛЕДСТВИЕ 5.3.1. Пусть V — евклидово пространство, $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — симметрический линейный оператор. Тогда у оператора \mathcal{A} существует

ует собственное значение в поле \mathbb{R} , и собственный вектор в V , отвечающий этому собственному значению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы, так как собственные значения оператора — это корни его характеристического многочлена. \square

Собственные значения ортогональных и унитарных операторов могут не быть действительными (точнее, у ортогональных операторов может не существовать собственных значений в поле действительных чисел). Вот что известно о собственных значениях унитарных и ортогональных операторов.

ЛЕММА 5.3.2. Пусть $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — ортогональный оператор, и $\lambda \in \mathbb{R}$ — некоторое его собственное значение. Тогда $\lambda = \pm 1$.

Пусть $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — унитарный оператор, и $\lambda \in \mathbb{C}$ — некоторое его собственное значение. Тогда $|\lambda| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}v = \lambda v$, где $v \neq 0$, и $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$. Отсюда, в частности, следует, что $\lambda \neq 0$ (иначе было бы $\mathcal{A}v = 0$, т.е. \mathcal{A} — не инъективное отображение). Умножая на \mathcal{A}^* левую и правую части равенства $\mathcal{A}v = \lambda v$, получаем $v = \lambda \mathcal{A}^*v$, или $\mathcal{A}^*v = \frac{1}{\lambda}v$. Проведем следующие вычисления:

$$(\mathcal{A}v, v) = \lambda(v, v), \quad (\mathcal{A}v, v) = (v, \mathcal{A}^*v) = (1/\bar{\lambda})(v, v).$$

В евклидовом случае получаем $\lambda^2(v, v) = (v, v)$, и из $(v, v) > 0$ следует $\lambda^2 = 1$. В унитарном случае $\lambda\bar{\lambda}(v, v) = (v, v)$, то есть $|\lambda|^2 = 1$. Отсюда следует утверждение леммы. \square

Следующая теорема вытекает из более общих фактов, доказываемых ниже, но полезно знать и ее формулировку, и ее (очень простое) доказательство.

ТЕОРЕМА 5.3.2. Пусть $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — самосопряженный оператор в евклидовом или унитарном пространстве, λ_1 и λ_2 — два его различных собственных значения (напомним, что они всегда действительны), v_1 и v_2 — соответствующие им собственные векторы. Тогда v_1 и v_2 ортогональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор \mathcal{A} является самосопряженным, то $(\mathcal{A}v_1, v_2) = (v_1, \mathcal{A}v_2)$. Но $\mathcal{A}v_1 = \lambda_1 v_1$, $\mathcal{A}v_2 = \lambda_2 v_2$. Тогда $(\mathcal{A}v_1, v_2) = \lambda_1(v_1, v_2)$, $(v_1, \mathcal{A}v_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$ (в унитарном случае $(v_1, \mathcal{A}v_2) = \bar{\lambda}_2(v_1, v_2)$, но λ_2 — действительное число.) Таким образом, $\lambda_1(v_1, v_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$, или $(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1, v_2) = 0$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то отсюда следует, что $(v_1, v_2) = 0$. \square

ЛЕММА 5.3.3. Пусть V — евклидово (или унитарное) пространство, $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — линейный оператор, $U \subseteq V$ — инвариантное относительно \mathcal{A} подпространство. Тогда его ортогональное дополнение U^\perp инвариантно относительно оператора \mathcal{A}^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w \in U^\perp$, это означает, что $(u, w) = 0$ для каждого $u \in U$. Тогда

$$(u, \mathcal{A}^*w) = (\mathcal{A}u, w) = 0,$$

так как $\mathcal{A}u \in U$. Таким образом, $\mathcal{A}^*u \in U^\perp$. \square

ЛЕММА 5.3.4. Пусть $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — произвольный невырожденный линейный оператор (биективное отображение), $\dim(V) < \infty$, и подпространство U инвариантно относительно \mathcal{A} . Тогда подпространство U инвариантно и относительно \mathcal{A}^{-1} . Ограничение \mathcal{A}^{-1} на U есть оператор, обратный к ограничению \mathcal{A} на U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничение \mathcal{A} на U есть инъективный линейный оператор на конечномерном пространстве. По теореме 1.3.7 (выпуск

И данного курса лекций) этот оператор обязан быть биективным. В частности, он сюръективен. Поэтому произвольный $u \in U$ можно записать в виде $u = \mathcal{A}u'$, где $u' \in U$. Поэтому $\mathcal{A}^{-1}u = u' \in U$. Это доказывает инвариантность U относительно \mathcal{A}^{-1} . Последнее утверждение леммы очевидно. \square

ТЕОРЕМА 5.3.3. Пусть V — евклидово или унитарное пространство, $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — ортогональный или унитарный оператор, U — инвариантное относительно \mathcal{A} подпространство. Тогда подпространство U^\perp также будет инвариантно относительно \mathcal{A} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже было показано, U^\perp инвариантно относительно \mathcal{A}^* . Но по условию $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$. Следовательно по предыдущей лемме U^\perp инвариантно относительно $(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$. \square

5.4. Нормальные операторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4.1. Пусть V — унитарное (или евклидово) пространство. Оператор $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ называется *нормальным*, если $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$.

Пример 5.4.1. Легко проверяется, что ортогональные, унитарные и самосопряженные операторы являются нормальными. Однако существуют нормальные операторы, не являющиеся ни ортогональными, ни унитарными, ни самосопряженными. Например, оператор с матрицей (в некотором ортонормированном базисе):

$$\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

не является ни унитарным, ни самосопряженным, но тем не менее является нормальным.

Сформулируем теперь в явном виде несколько очевидных утверждений, о которых надо постоянно помнить.

ЛЕММА 5.4.1. Пусть V — евклидово (или унитарное) пространство, $U \subseteq V$ — его подпространство. Тогда U также является евклидовым (или унитарным).

Пусть $A : V \rightarrow V$ — линейный оператор, и U — его инвариантное подпространство. Если A является ортогональным, унитарным или самосопряженным, то таков же и оператор, являющийся ограничением A на подпространство U .

Пусть $A : V \rightarrow V$ — линейный оператор в евклидовом или унитарном пространстве V , и U — его инвариантное подпространство, инвариантное также относительно A^* . Если A является нормальным оператором, то таков же и оператор, являющийся ограничением A на подпространство U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае нормального оператора речь идет о том, что для каждого вектора $u \in U$ справедливо равенство: $AA^*u = A^*Au$, причем и левая, и правая части принадлежат подпространству U . Но при сделанных предположениях это очевидно. \square

ЛЕММА 5.4.2. Пусть $A : V \rightarrow V$ — нормальный оператор, λ — его собственное значение, и $v \in V$ — соответствующий ему собственный вектор. Тогда $\bar{\lambda}$ будет собственным значением оператора A^* , причем соответствующим ему собственным вектором будет вектор v .

Иными словами, если $Av = \lambda v$, то $A^*v = \bar{\lambda}v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что если оператор A является нормальным, то нормальным будет также оператор $A - \lambda E$ для произ-

вольного λ . В самом деле, $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E}$ (чтобы это проверить, достаточно вычислить матрицу $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^*$ в некотором ортонормированном базисе). Теперь

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^* &= \mathcal{A}\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + \lambda\bar{\lambda}\mathcal{E}, \\(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^*(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) &= \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \bar{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + \lambda\bar{\lambda}\mathcal{E},\end{aligned}$$

так что при $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ получим требуемое равенство.

Пусть v — любой вектор. Тогда

$$\| \mathcal{A}v \|^2 = (\mathcal{A}v, \mathcal{A}v) = (v, \mathcal{A}^*\mathcal{A}v) = (v, \mathcal{A}\mathcal{A}^*v) = (\mathcal{A}^*v, \mathcal{A}^*v) = \| \mathcal{A}^*v \|^2.$$

Поскольку нормы — неотрицательные числа, то $\| \mathcal{A}v \| = \| \mathcal{A}^*v \|$. Подставив вместо нормального оператора \mathcal{A} нормальный оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, получим равенство:

$$\| (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v \| = \| (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^*v \|, \text{ то есть}$$

$$\| \mathcal{A}v - \lambda v \| = \| \mathcal{A}^*v - \bar{\lambda}v \|^2$$

Если теперь $\mathcal{A}v = \lambda v$, то $\| \mathcal{A}^*v - \bar{\lambda}v \| = 0$. Из свойств нормы следует, что $\mathcal{A}^*v - \bar{\lambda}v = 0$, а это и требовалось доказать. \square

Из этой леммы следует, что если v — собственный вектор нормального оператора \mathcal{A} , то подпространство $\langle v \rangle$ будет инвариантным и относительно \mathcal{A} , и относительно \mathcal{A}^* .

ТЕОРЕМА 5.4.1. Пусть V — евклидово или унитарное пространство, $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — линейный оператор. Допустим, что существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора \mathcal{A} . Тогда \mathcal{A} — нормальный оператор, причем его характеристический многочлен раскладывается на линейные множители (над полем \mathbb{R} в евклидовом случае, и над \mathbb{C} в унитарном). Обратно, пусть \mathcal{A} является нормальным, и его характеристический многочлен раскладывается на линейные множители над соответствующим полем.

Тогда в пространстве V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора \mathcal{A} (а это равносильно тому, что матрица A оператора \mathcal{A} приводится к диагональному виду с помощью преобразования V^*AV , где V — некоторая ортогональная или унитарная матрица).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует ортонормированный базис e_1, \dots, e_n , состоящий из собственных векторов оператора \mathcal{A} . Таким образом, для каждого i , $1 \leq i \leq n$, имеется равенство $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$. В этом случае $\mathcal{A}^*e_i = \bar{\lambda}_i e_i$, и легко проверяется, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^*e_i = \mathcal{A}^*\mathcal{A}e_i = \lambda_i \bar{\lambda}_i e_i$. Это означает, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Обратно, пусть \mathcal{A} — нормальный оператор, и пусть λ — некоторое его собственное значение. Ввиду предположения о разложении характеристического многочлена на линейные множители существуют и собственные значения, и соответствующие им собственные векторы. Рассмотрим $V^\lambda = \{v \mid \mathcal{A}v = \lambda v\}$. Согласно доказанной выше лемме, если $\mathcal{A}v = \lambda v$, то $\mathcal{A}^*v = \bar{\lambda}v$. Это значит, что $\mathcal{A}^*(V^\lambda) \subseteq V^\lambda$, т.е. V^λ является инвариантным подпространством и относительно \mathcal{A} , и относительно \mathcal{A}^* .

По лемме 5.3.3 подпространство $(V^\lambda)^\perp$ также является инвариантным относительно \mathcal{A} . Но так как V^λ инвариантно и относительно \mathcal{A}^* , то подпространство $(V^\lambda)^\perp$ также инвариантно относительно \mathcal{A}^* . Таким образом, ограничение оператора \mathcal{A} на $(V^\lambda)^\perp$ есть нормальный оператор.

Теперь можно провести индукцию по $n = \dim(V)$. В случае $n = 1$ все очевидно (см. пример 1.1.6 в выпуске I). При $n > 1$ выбираем подпространство V^λ и рассматриваем ограничение \mathcal{A} на подпространство $(V^\lambda)^\perp$, размерность которого строго меньше n . Этот оператор является нормальным, и для него справедливо предположение индукции. Таким образом, в $(V^\lambda)^\perp$ существует ортонормированный базис из собственных

векторов оператора \mathcal{A} . Но

$$V = V^\lambda \oplus (V^\lambda)^\perp,$$

а в подпространстве V^λ любой базис состоит из собственных векторов \mathcal{A} . Выберем ортонормированный базис V^λ . Добавляя к нему ортонормированный базис подпространства $(V^\lambda)^\perp$, состоящий из собственных векторов \mathcal{A} , получим искомый ортонормированный базис всего пространства V . \square

СЛЕДСТВИЕ 5.4.1. Пусть V — евклидово пространство, $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — самосопряженный (т.е. симметрический) линейный оператор. Тогда в пространстве V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора \mathcal{A} .

В частности, это означает, что для любой симметрической матрицы A с действительными компонентами найдется ортогональная матрица B такая, что $B^T A B$ — диагональная матрица.

СЛЕДСТВИЕ 5.4.2. Пусть V — унитарное пространство, $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — самосопряженный (эрмитов) линейный оператор. Тогда в пространстве V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора \mathcal{A} .

В частности, это означает, что для любой эрмитовой матрицы $A = A^*$ найдется унитарная матрица B такая, что $B^T A B$ — диагональная матрица, причем на диагонали стоят действительные числа.

СЛЕДСТВИЕ 5.4.3. Пусть V — унитарное пространство, $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — унитарный линейный оператор. Тогда в пространстве V существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора \mathcal{A} .

В частности, это означает, что для любой унитарной матрицы A найдется унитарная матрица B такая, что $B^T A B$ — диагональная матрица, причем на диагонали стоят комплексные числа, по модулю равные единице.

Заметим, что если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — произвольные комплексные числа, равные по модулю единице, то матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

является унитарной.

5.5. Приведение квадратичных форм к главным осям

Напомним, что существует взаимно-однозначное соответствие между квадратичными формами и билинейными симметричными формами на пространстве V . Симметричной билинейной форме $\beta : V \times V \rightarrow K$ соответствует квадратичная форма $q(v) = \beta(v, v)$. Обратно, по квадратичной форме q строится симметричная билинейная форма $\beta(v, w) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$.

Выберем базис e_1, \dots, e_n в пространстве V , и пусть $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $w = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$. Положим $b_{i,j} = \beta(e_i, e_j)$, и пусть B — матрица с компонентами $b_{i,j}$. Форма β является симметрической (т.е. $\beta(v, w) = \beta(w, v)$ для любых v, w) тогда и только тогда, если симметрической является матрица B . При этом

$$\beta(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j} x_i y_j = x^T B y,$$

$$q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j} x_i x_j = x^T B x.$$

Рассматривая билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах, предполагают обычно, что базис e_1, \dots, e_n является ортонормированным. Пусть e'_1, \dots, e'_n — другой ортонормированный базис, и C — матрица перехода от первого базиса ко второму. Тогда матрицей квадратичной формы q в базисе e'_1, \dots, e'_n будет матрица $C^T B C = C^{-1} B C$. Отсюда следует, что наборы собственных значений матриц B и $C^T B C$ совпадают, и, таким образом, эти собственные значения зависят только от самой формы, но не от базиса, в котором вычислена матрица формы.

ТЕОРЕМА 5.5.1. *Допустим, что пространство евклидово, и пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — все собственные значения матрицы B квадратичной формы q (с учетом их кратностей). Тогда существует ортонормированный базис e'_1, \dots, e'_n пространства V , такой, что если $v = \sum_{i=1}^n z_i e'_i$, то*

$$q(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2.$$

Эта теорема называется теоремой о *приведении квадратичной формы к главным осям*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матрица B квадратичной формы является симметрической, и ее можно, таким образом, считать матрицей некоторого нормального (самосопряженного) оператора в евклидовом пространстве, вычисленной в ортонормированном базисе e_1, \dots, e_n . Согласно доказанной выше теореме о диагонализации нормальных операторов, существует ортонормированный базис e'_1, \dots, e'_n пространства V , состоящий из собственных векторов этого оператора. Если перейти к матричному языку, то все только что сказанной означает, что существует ортогональная матрица C (матрица перехода к ортонормированному базису

e'_1, \dots, e'_n) такая, что $C^{-1}BC = C^TBC$ является диагональной матрицей, на диагонали которой расположены собственные значения B , причем каждое встречается столько раз, какова кратность этого числа как корня характеристического многочлена матрицы B . Если $v = \sum_{i=1}^n z_i e'_i$, и $z = (z_1, \dots, z_n)^T$, то значение квадратичной формы от v в новом базисе есть

$$\begin{aligned}
 q(v) &= z^T C^T B C z = \\
 &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2.
 \end{aligned}$$

□

5.6. Каноническая форма матрицы ортогонального оператора

В этом параграфе будет показано, к какому простейшему виду можно привести матрицы ортогональных операторов. В отличие от других нормальных операторов диагональных матриц здесь не получается.

Положим

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Рассмотрим двумерное евклидово пространство \mathbb{R}^2 с ортонормированным базисом $e_1 = (1, 0)^T$, $e_2 = (0, 1)^T$. Геометрически это просто плоскость. Легко проверяется, что линейный оператор, матрица которого в этом базисе есть $A(\varphi)$, действует следующим образом: каждый вектор поворачивается на угол φ против часовой стрелки.

Заметим, что оператор с матрицей $A(\varphi)$ (в ортонормированном базисе) является ортогональным, и при $\varphi \neq 0, \pi$ у него нет собственных значений (а значит, и собственных векторов).

ТЕОРЕМА 5.6.1. Пусть $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ — ортогональный оператор в евклидовом пространстве V . Существует ортонормированный базис, в котором матрица \mathcal{A} имеет вид:

$$\begin{pmatrix} E_l & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -E_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A(\varphi_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A(\varphi_k) \end{pmatrix}$$

Здесь E_l и E_r — единичные матрицы, причем числа k, l, r могут быть равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже известно, собственными значениями оператора \mathcal{A} в поле \mathbb{R} могут быть только числа $+1$ и -1 (или оба, или одно из них, или собственных чисел может не быть вообще). Обозначим через V_1 подпространство V^λ с $\lambda = +1$, и через V_2 — подпространство V^λ с $\lambda = -1$. Возможно, что либо одно из этих подпространств, либо даже оба они нулевые. Покажем, что в любом случае, если $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, то $(v_1, v_2) = 0$. По предположению, $\mathcal{A}v_1 = v_1, \mathcal{A}v_2 = -v_2$. Из ортогональности оператора \mathcal{A} следует, что $(v_1, v_2) = (\mathcal{A}v_1, \mathcal{A}v_2) = (v_1, -v_2) = -(v_1, v_2)$. Отсюда $(v_1, v_2) = 0$, а это означает, что сумма $V_1 + V_2$ является прямой. Рассмотрим $W = (V_1 \oplus V_2)^\perp$. Имеется разложение в прямую сумму:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus W,$$

причем подпространства V_1, V_2 и W являются инвариантными относительно оператора \mathcal{A} . Ограничение оператора \mathcal{A} на W является ортогональным оператором на W . У этого оператора, однако, нет собственных значений и собственных векторов. В самом деле, если нашлось бы собственное значение, то оно обязательно было бы равно $+1$ или -1 , а тогда

собственный вектор из W , отвечающий этому собственному значению, был бы и собственным вектором \mathcal{A} , отвечающим тому же собственному значению. Но все такие собственные вектора должны содержаться в подпространствах V_1 и V_2 , которые имеют с W нулевое пересечение.

Таким образом, у ограничения \mathcal{A} на W нет одномерных инвариантных подпространств. Индукцией по $m = \dim(W)$ покажем, что W есть прямая сумма двумерных инвариантных (относительно ограничения \mathcal{A} на W , а значит, и относительно самого \mathcal{A}) подпространств. По теореме 1.5.3 (выпуск I) при отсутствии одномерных инвариантных подпространств всегда существует двумерное инвариантное подпространство $W_1 \subseteq W$. Таким образом, при $m = 2$ наше утверждение справедливо. В общем случае рассмотрим $W_2 = W_1^\perp$. Ввиду $W = W_1 \oplus W'$ будем иметь $\dim(W') < m$. Подпространство W' инвариантно относительно ограничения \mathcal{A} на W , а значит, и относительно самого \mathcal{A} , причем в нем нет одномерных подпространств, инвариантных относительно \mathcal{A} (ибо все такие подпространства содержатся либо в V_1 , либо в V_2). Поэтому к W' применимо предположение индукции, т.е. $W' = W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$, где все подпространства W_j при $2 \leq j \leq k$ двумерны, взаимно ортогональны, и инвариантны относительно \mathcal{A} . Но тогда точно такими же свойствами обладает и разложение $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$. Таким образом, получено разложение в прямую сумму попарно взаимно ортогональных инвариантных относительно \mathcal{A} подпространств:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

Выберем в каждом из этих инвариантных подпространств ортонормированный базис. Объединение этих базисов есть ортонормированный базис V , и матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе будет иметь следующий

вид:

$$\begin{pmatrix} E_l & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -E_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}$$

Здесь $l = \dim(V_1)$, матрица ограничения \mathcal{A} на V_1 есть E_l , $r = \dim(V_2)$, матрица ограничения \mathcal{A} на V_2 есть $-E_r$, и для каждого j , $1 \leq j \leq k$, матрица A_j есть 2×2 -матрица ограничения \mathcal{A} на W_j . Ограничение \mathcal{A} на W_j есть ортогональный оператор. Остается показать, что для любого ортогонального оператора на двумерном пространстве (в котором нет одномерных инвариантных подпространств!) и любого ортонормированного базиса в этом пространстве матрица оператора в этом базисе будет иметь вид $A(\varphi)$.

Итак, рассмотрим произвольную ортогональную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Из условия $A^T = A^{-1}$ следует $AA^T = E$. Вычисляя определители левой и правой частей этого равенства, получаем $|A|^2 = 1$, т.е. либо $|A| = +1$, либо $|A| = -1$. При $|A| = ad - bc = -1$ многочлен $|A - xE| = x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = x^2 - (a + d)x - 1$ имеет два вещественных корня (т.к. $(a+d)^2 - 4(-1) > 0$). Но это противоречит предположению об отсутствии одномерных инвариантных подпространств. Следовательно, $|A| = ad - bc = 1$. Это позволяет вычислить по известным формулам матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Теперь используем условие ортогональности: $A^{-1} = A^T$:

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем $a = d$, $-b = c$. Равенство $ad - bc = 1$ превращается в $a^2 + c^2 = 1$. Полагая $a = \cos \varphi$, $c = \sin \varphi$ для соответствующего φ , получаем требуемое утверждение. \square

СЛЕДСТВИЕ 5.6.1. *В трехмерном евклидовом пространстве для каждого неединичного (т.е. не равного \mathcal{E}) ортогонального оператора с определителем, равным единице, существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

При этом $0 < \varphi < 2\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Характеристический многочлен ортогонального оператора в трехмерном евклидовом пространстве имеет степень три, и поэтому у него обязательно есть либо один действительный корень и два комплексных сопряженных друг к другу корня, либо три действительных корня (с учетом возможных кратностей). Известно также, что все собственные значения ортогонального оператора равны $+1$ или -1 . А это и есть действительные корни характеристического многочлена. Случай, когда имеется один корень $+1$ кратности три, отпадает, так как это случай тождественного (единичного) оператора. Случай, когда есть корень $+1$ кратности два, и корень -1 , отпадает, так как тогда матрица оператора приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и ее определитель равен -1 , что противоречит условию. Случай, когда есть корень -1 кратности три, отпадает по этой же причине: определитель равен -1 . Случай, когда есть только один действительный корень -1 , означает, что матрица приведется к виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Снова видим, что определитель равен -1 . Наконец, все оставшиеся случаи — это именно то, что утверждается в формулировке следствия. В частности, случай, когда есть корень -1 кратности два, и корень $+1$ — это случай $\varphi = \pi$. \square

Это следствие означает, что в трехмерном евклидовом пространстве каждый ортогональный оператор с единичным определителем действует как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат.

Заметим, что так как перестановка элементов ортонормированного базиса приводит снова к ортонормированному базису, то матрицы из формулировок предыдущей теоремы и ее следствия можно записывать по-разному. Например, можно утверждать, что для любого неединичного ортогонального линейного оператора в трехмерном евклидовом пространстве, определитель которого равен единице, существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В общем случае условие $(\mathcal{A}v, \mathcal{A}w) = (v, w)$ означает, что ортогональные операторы сохраняют длины векторов и углы между ними. Условие равенства единице определителя означает, что данный линейный

оператор сохраняет *ориентацию* (само это условие можно принять за определение ориентации).

Литература

- [1] Артамонов В.А. Введение в высшую алгебру и аналитическую геометрию. — М.: Факториал Пресс, 2007.
- [2] Винберг Э.Б. Курс алгебры. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во “Факториал Пресс”, 2002.
- [3] Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. — 5-е изд., исправленное. — М.: Добросвет, Московский центр непрерывного математического образования, 1998. — 320 с.
- [4] Методические указания к курсу “Линейная алгебра и геометрия” по теме “Линейные преобразования” / Составитель Ю.Б. Ермолаев. — Казань: Казанский государственный университет, 1987.
- [5] Линейные операторы в унитарных и евклидовых пространствах. Методические указания к курсу “Алгебра” / Составитель Ю.Б. Ермолаев. — Казань: Казанский государственный университет, 1994.
- [6] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974.
- [7] Ильин С.Н. Элементы алгебры: комплексные числа, системы линейных уравнений, многочлены: Учебное пособие. — Казань: Казанский государственный университет, 2006.
- [8] Корешков Н.А. Линейные операторы: Учебное пособие. — Казань: Казанский государственный университет, 2004.
- [9] Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

- [10] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. — 2-е изд., исправл. — М.: Физико-математическая литература, 2001.
- [11] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. — 2-е изд., исправл. — М.: Физико-математическая литература, 2001.
- [12] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры. — 2-е изд., исправл. — М.: Физико-математическая литература, 2001.
- [13] Сборник задач по алгебре / Под ред. А.И.Кострикина. — Изд. 3-е, испр. и доп. — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [14] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — Изд. десятое, стереотипное. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971.
- [15] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. — Изд. третье, перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.
- [16] Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Магистр: ИНФРА-М, 2011.
- [17] Лекции по алгебре. Семестр 2. Выпуск I. Линейные отображения и линейные операторы: Учебно-методическое пособие / С.Н. Тронин. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012.
- [18] Лекции по алгебре. Семестр 2. Выпуск II. Жорданова нормальная форма матрицы: Учебно-методическое пособие / С.Н. Тронин. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2012.