



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

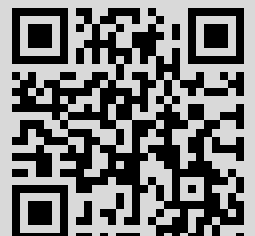
Д. Х. Зайнетдинов, И. Ш. Калимуллин, О предельно монотонной сводимости  $\Sigma_2^0$ -множеств, *Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2014, том 156, книга 1, 22–30

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 178.213.240.13

17 сентября 2015 г., 08:00:55



УДК 510.5

## О ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННОЙ СВОДИМОСТИ $\Sigma_2^0$ -МНОЖЕСТВ

Д.Х. Зайнетдинов, И.Ш. Каллимуллин

**Аннотация**

Исследованы свойства  $\text{lm}$ -сводимости множеств, принадлежащих классу  $\Sigma_2^0$ . В частности, доказано существование несравнимых  $\Sigma_2^0$ -множеств относительно  $\text{lm}$ -сводимости. Кроме того, построена бесконечная равномерная последовательность несравнимых  $\Sigma_2^0$ -множеств относительно  $\text{lm}$ -сводимости, показано также отсутствие наибольшего  $\Sigma_2^0$ -множества относительно рассматриваемой сводимости.

**Ключевые слова:** вычислимые функции,  $\Sigma_2^0$ -множества, предельно монотонные функции, предельно монотонные множества.

**Введение**

Обозначим через  $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$  множество неотрицательных целых чисел. Функция  $f : \omega \rightarrow \omega$  называется *предельно монотонной*, если существует вычислимая функция  $\varphi(x, s)$  такая, что для всех  $x \in \omega$

- 1)  $f(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(x, s)$ ;
- 2)  $\varphi(x, s) \leq \varphi(x, s+1) \quad \forall s \in \omega$ .

Множество  $A \subseteq \omega$  будем называть *предельно монотонным*, если  $A = \emptyset$  или оно является областью значения некоторой предельно монотонной функции.

Пусть дано множество натуральных чисел  $X \in 2^\omega$ . *Спектром предельной монотонности* (иногда будем называть его просто *спектром* и обозначать как  $\text{lmSp}(A)$ ) множества  $A$  называется класс всех множеств  $X \in 2^\omega$  таких, что  $A$  является предельно монотонным множеством относительно некоторой функции  $\varphi(x, s)$  такой, что  $\varphi \leq_T X$ .

В обозначениях и терминологии мы придерживаемся в основном монографии [1]. Мы имеем дело с множествами и функциями, заданными на множестве  $\omega$ . Для обозначения множества всех конечных последовательностей над  $\omega$  используется запись  $\omega^{<\omega}$ . На множестве  $\omega^{<\omega}$  для любых двух строк  $x$  и  $y$  определим их покомпонентный порядок, а именно  $x_1x_2\dots x_n \preceq y_1y_2\dots y_n$  тогда и только тогда, когда  $x_1 \leq y_1 \ \& \ x_2 \leq y_2 \ \& \ \dots \ \& \ x_n \leq y_n$ . После этого мы можем вычислимо отождествить множество всех строк, заданных на  $\omega$ , с множеством натуральных чисел, то есть можем задать взаимно-однозначное отображение  $\omega^{<\omega} \cong \omega$ . Тогда под записью  $B^{<\omega}$  будем понимать множество номеров строк  $x_1x_2\dots x_n$  таких, что  $x_1 \in B, x_2 \in B, \dots, x_n \in B$ .

В работе [2] введено понятие сводимости на семействах подмножеств натуральных чисел, согласованное с понятием  $\Sigma$ -определимости в допустимых множествах. Обозначим через  $\mathcal{F}_A$  семейство начальных сегментов  $\{\{x \mid x < n\} \mid n \in A\}$ . В соответствии с работой [2] определим  $\text{lm}$ -сводимость множеств как  $\Sigma$ -сводимость соответствующих начальных сегментов, а именно  $A \leq_{\text{lm}} B$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{F}_A \leq_{\Sigma} \mathcal{F}_B$ . В настоящей статье нам будет удобнее пользоваться эквивалентным понятием  $\text{lm}$ -сводимости.

**Определение 1.** Будем говорить, что  $A \leq_{\text{lm}} B$ , если  $A = \{\theta(x), x \in B^{<\omega}\}$ , где  $\theta(x)$  – предельно монотонная функция, которая является монотонной по своим аргументам, то есть если  $\theta(y) \downarrow$  и  $x \prec y$ , то  $\theta(x) \downarrow$  и  $\theta(x) \leq \theta(y)$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что  $A \equiv_{\text{lm}} B$ , если  $A \leq_{\text{lm}} B$  и  $B \leq_{\text{lm}} A$ . Отметим, что отношение  $\leq_{\text{lm}}$  рефлексивно и транзитивно, так что  $\equiv_{\text{lm}}$  является отношением эквивалентности.

Предельно монотонной степенью (или, иначе,  $\text{lm}$ -степенью) множества  $A$  назовем класс эквивалентности  $\text{deg}(A) = \{B : B \equiv_{\text{lm}} A\}$ . В дальнейшем  $\text{lm}$ -степенью множеств будем обозначать строчными полужирными буквами **a**, **b**, **c**. Через  $\mathbf{S}_{\text{lm}}$  обозначим класс всех  $\text{lm}$ -степеней. Степени из  $\mathbf{S}_{\text{lm}}$  образуют частичный порядок относительно отношения  $\text{deg}(A) \leq \text{deg}(B)$  тогда и только тогда, когда  $A \leq_{\text{lm}} B$ . Будем записывать  $\text{deg}(A) < \text{deg}(B)$ , если  $A <_{\text{lm}} B$ , то есть если  $A \leq_{\text{lm}} B$  и  $B \not\leq_{\text{lm}} A$ .

Во втором параграфе настоящей статьи мы докажем, что каждый счетный частичный порядок вкладывается в  $\mathbf{S}_{\text{lm}}$ .

Покажем сейчас отсутствие наибольшего  $\Sigma_2^0$ -множества относительно  $\text{lm}$ -сводимости, используя свойства спектра предельно монотонных  $\Sigma_2^0$ -множеств. Для этого воспользуемся следующими двумя теоремами, доказательства которых можно найти в работе [3].

**Теорема 1.** Если  $S \in \Sigma_2^0$ , то спектр множества  $S$  содержит низкую степень.

**Теорема 2.** Множество  $X \leq_T \emptyset'$  не является 2-низким тогда и только тогда, когда  $X$  принадлежит спектру каждого множества  $S \in \Sigma_2^0$ .

Отсюда, как следствие из этих теорем, непосредственно вытекает следующий результат, устанавливающий отсутствие наибольшего  $\Sigma_2^0$ -множества относительно  $\text{lm}$ -сводимости.

**Следствие 1.** Не существует наибольшего  $\Sigma_2^0$ -множества относительно  $\text{lm}$ -сводимости<sup>1</sup>.

**Доказательство.** Из приведенных выше определений спектра и  $\text{lm}$ -сводимости нетрудно видеть, что если  $A \leq_{\text{lm}} B$  и  $B$  является предельно монотонным множеством относительно функции  $\varphi(x, s)$ , где  $\varphi \leq_T X$ , то  $A$  также является предельно монотонным множеством относительно некоторой функции  $\varphi \leq_T X$ . Отсюда непосредственно следует, что спектр предельной монотонности множества  $B$  содержится в спектре предельной монотонности множества  $A$ , то есть  $\text{lmSp}(B) \subseteq \text{lmSp}(A)$ . Далее, применяя теорему 1, получим, что если  $B \in \Sigma_2^0$ , то для класса  $\text{low}$  всех низких множеств имеет место включение  $\text{low} \subseteq \text{lmSp}(B)$ . Из теоремы 2 следует, что для класса  $\text{Nonlow}_2$  всех не 2-низких множеств имеет место равенство  $\text{Nonlow}_2 = \bigcap_{A \in \Sigma_2^0} (\text{lmSp}(A) \upharpoonright \emptyset')$ , где под выражением  $\text{lmSp}(A) \upharpoonright \emptyset'$  по-

нимается множество элементов спектра  $\text{lmSp}(A)$ ,  $T$ -сводящихся к  $\emptyset'$ . Кроме того, известно, что каждая низкая степень является также и 2-низкой. Таким образом, если предположить, что  $B$  является наибольшим  $\Sigma_2^0$ -множеством относительно  $\text{lm}$ -сводимости, то получим  $\text{lmSp}(B) = \bigcap_{A \in \Sigma_2^0} (\text{lmSp}(A))$ . Рассмотрим теперь последнее равенство в ограничении на  $\emptyset'$ , то есть  $\text{lmSp}(B) \upharpoonright \emptyset' = \bigcap_{A \in \Sigma_2^0} (\text{lmSp}(A) \upharpoonright \emptyset')$ . В итоге

<sup>1</sup> Авторы настоящей статьи благодарны М.Х. Файзрахманову за высказанные идеи, которые легли в основу доказательства данного результата.

получим противоречие с тем, что класс низких множеств содержится в классе не 2-низких множеств:

$$\text{low} \subseteq \text{ImSp}(B) \upharpoonright \emptyset' = \bigcap_{A \in \Sigma_2^0} (\text{ImSp}(A) \upharpoonright \emptyset') = \text{Nonlow}_2. \quad \square$$

Основные результаты, на которые мы будем опираться при изучении свойств предельно монотонной сводимости, представлены в работах [4] и [5]. Далее докажем лемму, которая будет полезна нам во втором параграфе настоящей статьи.

**Лемма 1.** *Если  $A$  является бесконечным  $\Sigma_2^0$ -множеством и существует бесконечное множество  $B$ , содержащееся в  $A$ , то  $A \leq_{\text{Im}} B$ .*

**Доказательство.** Пусть  $A$  – бесконечное  $\Sigma_2^0$ -множество и существует бесконечное множество  $B \subseteq A$ . Так как  $A$  является  $\Sigma_2^0$ -множеством, то существует такая вычислимая функция  $h$ , что для каждого  $a \in \omega$  имеем

$$a \in A \iff W_{h(a)} \text{ конечно.}$$

Зафиксируем вычислимый набор пар  $\{(x_k, a_k)\}_{k \in \omega}$  таких, что  $x_k$  – непустая строка  $x_k = b_{k,0}b_{k,1} \dots b_{k,s_k-1} \in \omega^{<\omega}$  и  $a_k < b_{k,0}$ . Для того чтобы показать, что  $A \leq_{\text{Im}} B$ , определим предельно монотонную функцию  $\theta(x_k, s)$ , которая задает множество  $A$  в следующем виде:

$$A = \{\theta(x_k, s), x_k \in B^{<\omega}, s \in \omega, k \in \omega\}.$$

Определим искомую функцию в виде

$$\theta(x_k, s) = \begin{cases} a_k, & \text{если } W_{h(a_k),s} \subseteq W_{h(a_k),s_k}, \\ b_{k,0}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Докажем, что  $\theta(x_k) = \lim_{s \rightarrow \infty} \theta(x_k, s)$  является предельно монотонной аппроксимацией для множества  $A$ . В самом деле, во-первых, заметим, что для всех  $k, s \in \omega$  справедливо соотношение  $\theta(x_k, s) \leq \theta(x_k, s+1)$ . Во-вторых, легко увидеть, что  $\max_{s \in \omega} \theta(x_k, s)$  существует для всех  $k \in \omega$ , так как  $\max_{s \in \omega} \theta(x_k, s) \leq b_{k,0}$ .

Теперь предположим, что  $a \in A$ . Так как множество  $B$  бесконечно, то существует такое  $k$ , что  $x_k \in B^{<\omega}$ ,  $b_{k,0} > a$ , где  $a = a_k$  и  $W_{h(a_k)} = W_{h(a_k),s_k}$ . Тогда для любой длины  $s$  строки  $x_k$  имеем  $W_{h(a_k),s} \subseteq W_{h(a_k),s_k}$ . Поэтому  $\lim_{s \rightarrow \infty} \theta(x_k, s) = a_k = a$ .

Допустим, что  $a \notin A$ . Тогда множество  $W_{h(a)}$  должно быть бесконечным. Выберем  $k, s$  такие, что  $\theta(x_k, s) = a$  и  $x_k \in B^{<\omega}$ . Тогда существует  $s' \geq s$ , для которого  $W_{h(a_k),s'} \not\subseteq W_{h(a_k),s_k}$ . В итоге имеем, что  $\theta(x_k, s') = b_{k,0} > a$  для всех  $s' \geq s$ . Отсюда вытекает, что  $a \neq \lim_{s \rightarrow \infty} \theta(x_k, s)$  для всех номеров  $k \in \omega$ .  $\square$

### 1. Существование пары несравнимых множеств

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о существовании несравнимых  $\Sigma_2^0$ -множеств относительно  $\text{Im}$ -сводимости.

**Теорема 3.** *Существуют такие  $\Sigma_2^0$ -множества  $A$  и  $B$ , что  $A \not\leq_{\text{Im}} B$  и  $B \not\leq_{\text{Im}} A$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_e(x, t)$ , где  $e \in \omega$  – равномерное перечисление всех частично вычислимых функций  $\varphi$  таких, что если значение  $\varphi(x, t')$  определено

для любого шага  $t' \geq t$ , тогда значение функции  $\varphi(x, t)$  определено и на всех предыдущих шагах  $t$  и  $\varphi(x, t) \leq \varphi(x, t')$ .

Далее, на шаге  $s$  нашей конструкции мы определим конечные множества  $A_s$  и  $B_s$  таким образом, чтобы  $A(y) = \lim_{s \rightarrow \infty} A_s(y)$  и  $B(y) = \lim_{s \rightarrow \infty} B_s(y)$  для любого  $y$ .

Сформулируем условия, которые в дальнейшем будем именовать *требованиями*  $R_{2e}$  и  $R_{2e+1}$ , которым должны удовлетворять множества  $A$  и  $B$ :

$$R_{2e} : (\forall x \in B^{<\omega}) [f_{2e}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{2e}(x, t) < \omega] \implies A \neq \text{rng}(f_{2e});$$

$$R_{2e+1} : (\forall x \in A^{<\omega}) [f_{2e+1}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{2e+1}(x, t) < \omega] \implies B \neq \text{rng}(f_{2e+1}).$$

Стратегия удовлетворения только одного требования  $R_{2e}$  состоит в том, чтобы на шаге  $s$  выбрать произвольное число  $m_{2e}$ . Затем поместить его в  $A$ , то есть положить  $A_s(m_{2e}) = 1$ . При этом требование  $R_{2e}$  будет удовлетворено, так как  $A_s(m_{2e}) = 1$  и  $f_{2e}(x) \uparrow$ . Если на более позднем шаге  $t_0$  мы найдем  $x \in B^{<\omega}$  такой, что  $\varphi_{2e}(x, t_0) = m_{2e}$ , тогда для выполнения требования  $R_{2e}$  необходимо удалить  $m_{2e}$  из  $A$ , то есть полагаем  $A(\varphi_{2e}(x, t)) = 0$  для любого  $t \geq t_0$ . Итак, имеем либо  $A_s(m_{2e}) = 1$  и  $f_{2e}(x) \uparrow$ , либо  $f_{2e}(x) \downarrow$  и  $A_s(\varphi_{2e}(x, t)) = 0$ .

*Построение множеств  $A$  и  $B$ .*

На шаге  $s$  мы пытаемся определить значения параметров  $m_e$ ,  $x_e$  и  $n_e = \varphi(x_e, s)$  для всех требований  $R_e$ . Каждый из параметров может быть также неопределен.

*Шаг 0.* Пусть  $A_0 = B_0 = \emptyset$ , считаем все параметры неопределенными.

*Шаг  $s > 0$ .* Для каждого подшага  $i = 0, 1, 2, \dots, s-1$  мы выполняем следующие действия:

*Подшаг  $i = 2e$ .*

1. Если  $m_{2e} \uparrow$ , тогда в качестве  $m_{2e}$  берем наименьший номер в  $\omega^{[e]}$ , больший, чем все  $m_j$ ,  $j < e$ , который не запрещен никаким требованием. При этом требование  $R_{2e}$  запрещает  $m_{2e}$  в  $A$ . Полагаем  $A_s(m_{2e}) = 1$  и выполняем следующий подшаг или, если  $i = s-1$ , то переходим к шагу  $s+1$ .

2. Допустим, что  $x_{2e} \uparrow$ ,  $n_{2e} \uparrow$  и существует  $x \in B^{<\omega}$  такой, что  $\varphi_{2e}(x, s) = m_{2e}$ . Тогда определим  $x_{2e} = x$  и  $n_{2e} = m_{2e}$ . Следовательно, получаем, что  $x_{2e} \downarrow$  и  $\varphi_{2e}(x_{2e}, s) = m_{2e}$ . Тогда удаляем  $m_{2e}$  из  $A$ , то есть  $A_s(m_{2e}) = 0$ . Требование  $R_{2e}$  запрещает все элементы строки  $x \in B^{<\omega}$  в множестве  $B$ . Выполняем следующий подшаг или, если  $i = s-1$ , переходим к шагу  $s+1$ .

3. Пусть теперь  $x_{2e} \in B^{<\omega}$ ,  $n_{2e} = \varphi_{2e}(x_{2e}, s)$ . Полагаем  $A_s(n_{2e}) = 0$ . Если окажется, что  $n_{2e}$  запрещен требованием  $R_j$  для  $j > 2e$ , то полагаем все параметры и запреты для всех требований  $R_j$  при  $j > 2e$  неопределенными.

*Подшаг  $i = 2e+1$ .* Проводим те же действия, что и при  $i = 2e$ , но меняем  $A$  и  $B$  местами. Если такого  $i$  не существует, то полагаем  $A_{s+1} = A_s$ ,  $B_{s+1} = B_s$  и  $x_e^{s+1} = x_e^s$  и  $n_e^{s+1} = n_e^s$  для любого  $e$ .

Если окажется, что  $A_s(y)$  или  $B_s(y)$  остаются неопределенными для некоторого  $y$  к концу шага  $s$ , то полагаем, что  $A_s(y) = A_{s-1}(y)$  и  $B_s(y) = B_{s-1}(y)$  соответственно. Шаг  $s$  завершен.

Для завершения доказательства теоремы докажем несколько промежуточных утверждений.

**Предложение 1.** *Начиная с некоторого шага, значение каждого параметра  $m_e$  больше не меняется.*

**Доказательство.** Предположим, что утверждение справедливо для любого  $i < e$ . Пусть  $s_0$  – такой шаг, на котором каждое значение  $m_i$ ,  $i < e$  уже достигло

своего предела; значение  $x_i$  уже определено, элементы строки  $x_i$  уже запрещены требованиями  $R_i$ ,  $i < e$ . Пусть  $k \geq e$  – наименьшее число, которое не запрещено этими требованиями и не совпадает ни с одним из этих конечных пределов  $\lim_{s \rightarrow \infty} n_{i,s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_i(x_i, s) < \infty$ . Пусть  $s_1 > s_0$  – такой шаг, что для всех  $s \geq s_1$   $\varphi_i(x_i, s) \neq k$  для всех  $i < e$ . Тогда после шага  $s_1$  значение  $m_e \leq k$  не может быть изменено.  $\square$

**Предложение 2.** Если  $f_{2e}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{2e}(x, t)$  существует для любого  $x \in B^{<\omega}$ , то  $A \neq \text{rng}(f_{2e})$ .

**Доказательство.** Предположим противное, то есть существует  $e$  такое, что  $A = \text{rng}(f_{2e})$ . Пусть  $s_0$  – наименьший шаг, на котором все числа  $m_i$ ,  $i \leq 2e$ , достигают своего предела. Тогда на некотором более позднем шаге  $s > s_0$  нам необходимо выполнить второй пункт из конструкции для построения множеств  $A$  и  $B$ , иначе получим, что  $A(m_{2e}) = 1$ , но  $m_{2e} \notin \text{rng}(f_{2e})$ . Пусть  $m_{2e} = \varphi_{2e}(x_{2e}, s)$ , здесь шаг  $s$  понимается как минимальный номер шага, использующийся во втором пункте конструкции. Следовательно, для шага  $t > s$  имеем  $n_{2e} = \varphi_{2e}(x_{2e}, t)$  и  $A_t(n_{2e}) = 0$ . Таким образом, получаем, что  $A_t(\varphi_{2e}(x_{2e}, t)) = A_t(f_{2e}) = 0$ . Это противоречит тому, что  $A = \text{rng}(f_{2e})$ .  $\square$

Аналогичные рассуждения приводят к справедливости следующего утверждения.

**Предложение 3.** Если  $f_{2e+1}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{2e+1}(x, t)$  существует для любого  $x \in A^{<\omega}$ , то  $B \neq \text{rng}(f_{2e+1})$ .

**Предложение 4.** Для любого  $y$  существует  $\lim_{s \rightarrow \infty} A_s(y)$ . Кроме того,  $A(y) = \lim_{s \rightarrow \infty} A_s(y)$  и  $A$  является  $\Sigma_2^0$ -множеством.

**Доказательство.** Для того чтобы все числа  $m_{2e}$  для различных требований были различными, выберем в качестве параметра  $m_{2e}$  для требования  $R_{2e}$  числа  $y$  из  $\omega^{[2e]} = \{\langle x, i \rangle : i = 2e\}$ . Пусть  $s_0$  – наименьший шаг, на котором каждое значение  $m_j$ ,  $j \leq 2e$ , уже достигло своего предела. Поскольку  $y$  можно поместить в  $A^{<\omega}$ , если только  $y = m_{2e}$ , то  $A(y)$  после шага  $s_0$  может измениться не более одного раза. Поэтому  $A$  будет  $\Sigma_2^0$ -множеством.  $\square$

**Предложение 5.** Для любого  $y$  существует  $\lim_{s \rightarrow \infty} B_s(y)$ . Кроме того,  $B(y) = \lim_{s \rightarrow \infty} B_s(y)$  и  $B$  является  $\Sigma_2^0$ -множеством.

**Доказательство.** Необходимо провести рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве предложения 4, только вместо  $2e$  и  $A$  используем  $2e + 1$  и  $B$  соответственно.  $\square$

Этим утверждением завершается доказательство теоремы в целом.  $\square$

## 2. Бесконечная последовательность несравнимых $\Sigma_2^0$ -множеств относительно $\text{lm}$ -сводимости

В данном параграфе мы обобщим результат, полученный в первом параграфе, а именно построим бесконечную равномерную последовательность несравнимых  $\Sigma_2^0$ -множеств относительно  $\text{lm}$ -сводимости.

**Теорема 4.** *Существует такая равномерная последовательность бесконечных  $\Sigma_2^0$ -множеств  $\{A_i\}_{i \in \omega}$ , что  $A_i \not\leq_{\text{lm}} \bigcap_{j \neq i} A_j$ , причём  $\bigcap_{j \in \omega} A_j$  бесконечно и  $x \in A_i$  при  $x < i$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_e(x, t)$ , где  $e \in \omega$  – равномерное перечисление всех частично вычислимых функций  $\varphi$  таких, что если значение  $\varphi(x, t')$  определено для любого шага  $t' \geq t$ , то значение функции  $\varphi(x, t)$  определено и на всех предыдущих шагах  $t$  и  $\varphi(x, t) \leq \varphi(x, t')$ .

На шаге  $s$  нашей конструкции мы определяем конечные множества  $A_{i,s}$  таким образом, чтобы  $A_i(y) = \lim_{s \rightarrow \infty} A_{i,s}(y)$  для любого  $y$ .

В ходе построения множеств  $A_i$  будем следить за тем, чтобы предикат “ $x \in A_i$ ” принадлежал классу  $\Sigma_2^0$ , иными словами, множество  $\bigoplus A_i = \{\langle x, i \rangle : x \in A_i \ \& \ i \in \omega\}$  должно принадлежать классу  $\Sigma_2^0$ -множеств.

Для каждой пары  $\langle e, i \rangle$  и для любого  $k \in \omega$  удовлетворяем требованиям  $R_{\langle e, i \rangle}$  и  $P_k$ , которые зададим в следующем виде:

$$R_{\langle e, i \rangle} : \left( \forall x \in \left( \bigcap_{j \neq i} A_j \right)^{<\omega} \left[ f_e(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_e(x, t) < \omega \right] \right) \implies A_i \neq \text{rng}(f_e);$$

$$P_k : \max \bigcap_{i \in \omega} A_i \geq k.$$

Стратегия удовлетворения единственного требования  $R_{\langle e, i \rangle}$  состоит в том, чтобы на шаге  $s$  прикрепить к  $R_{\langle e, i \rangle}$  потенциального «свидетеля»  $m_{\langle e, i \rangle}$ . Затем поместить его в  $A_i$ , то есть положить  $A_{i,s}(m_{\langle e, i \rangle}) = 1$ . При этом требование  $R_{\langle e, i \rangle}$  будет удовлетворено, так как  $A_{i,s}(m_{\langle e, i \rangle}) = 1$  и  $f_e(x) \uparrow$ . Если на более позднем шаге  $t_0$  мы найдем такой элемент  $x \in \left( \bigcap_{j \neq i} A_j \right)^{<\omega}$ , что  $\varphi_e(x, t_0) = m_{\langle e, i \rangle}$ , тогда для выполнения требования  $R_{\langle e, i \rangle}$  необходимо удалить  $m_{\langle e, i \rangle}$  из  $A_i$ , то есть положить  $A_i(\varphi_e(x, t)) = 0$  для любого  $t \geq t_0$ . Итак, имеем, что либо  $A_i(m_{\langle e, i \rangle}) = 1$  и  $f_e(x) \uparrow$ , либо  $f_e(x) \downarrow$  и  $A_i(\varphi_e(x, t)) = 0$ .

*Построение множеств  $A_i$ ,  $i \in \omega$ .*

На шаге  $s$  мы пытаемся определить значения параметров  $m_{\langle e, i \rangle}$ ,  $x_{\langle e, i \rangle}$  и  $n_{\langle e, i \rangle} = \varphi(x_{\langle e, i \rangle}, s)$  для всех требований  $R_{\langle e, i \rangle}$ . Каждый из параметров может быть также неопределен.

*Шаг 0.* Пусть  $A_{i,0} = \emptyset$  и полагаем все параметры неопределенными.

*Шаг  $s > 0$ .* Для каждого подшага  $l = 0, 1, 2, \dots, s-1$  мы выполняем следующие действия.

*Подшаг  $l = 2\langle e, i \rangle + 1$ .*

1. Если  $m_{\langle e, i \rangle} \uparrow$ , то в качестве  $m_{\langle e, i \rangle} > i$  берем наименьший номер в  $\omega^{[e]}$ , больший, чем все  $m_{\langle j, i \rangle}$ ,  $j < e$ , и который не запрещен никаким требованием. При этом требование  $R_{\langle e, i \rangle}$  запрещает  $m_{\langle e, i \rangle}$  в  $A_i$ . Полагаем  $A_{i,s}(m_{\langle e, i \rangle}) = 1$  и выполняем следующий подшаг или, если  $l = s-1$ , то переходим к шагу  $s+1$ .

2. Допустим, что  $x_{\langle e, i \rangle} \uparrow$ ,  $n_{\langle e, i \rangle} \uparrow$  и существует  $x \in \left( \bigcap_{j \neq i} A_j \right)^{<\omega}$ , для которого  $\varphi_{\langle e, i \rangle}(x, s) = m_{\langle e, i \rangle}$ . Полагаем  $x_{\langle e, i \rangle} = x$  и  $n_{\langle e, i \rangle} = m_{\langle e, i \rangle}$ . Следовательно, получаем, что  $x_{\langle e, i \rangle} \downarrow$  и  $\varphi_{\langle e, i \rangle}(x_{\langle e, i \rangle}, s) = m_{\langle e, i \rangle}$ . Тогда исключаем  $m_{\langle e, i \rangle}$  из  $A_i$ , то есть  $A_{i,s}(m_{\langle e, i \rangle}) = 0$ . А значит, требование  $R_{\langle e, i \rangle}$  запрещает все элементы строки  $x \in \left( \bigcap_{j \neq i} A_j \right)^{<\omega}$  в множестве  $x \in \left( \bigcap_{j \neq i} A_j \right)$ . Выполняем следующий подшаг или, если  $l = s-1$ , переходим к шагу  $s+1$ .

3. Пусть теперь  $x_{\langle e,i \rangle} \in \left( \bigcap_{j \neq i} A_j \right)^{<\omega}$ ,  $n_{\langle e,i \rangle} = \varphi_{\langle e,i \rangle}(x_{\langle e,i \rangle}, s)$ . Полагаем  $A_{i,s}(n_{\langle e,i \rangle}) = 0$ . Если окажется, что  $n_{\langle e,i \rangle}$  и  $t_k$  запрещены требованиями  $R_{\langle j,i \rangle}$  и  $P_q$  для  $j > e$  и  $q > k$ , то объявляем все параметры и запреты для всех требований  $R_{\langle j,i \rangle}$  и  $P_q$  при  $j > e$  и  $q > k$  неопределенными.

*Подшаг*  $l = 2k + 2$ . Для удовлетворения требований  $P_k$  проводим следующие действия: выбираем наименьшее число  $t_k \geq k$  и помещаем его в каждое  $A_i$ . При этом требование  $P_k$  запрещает  $t_k$  во всех  $A_i$ ,  $i \in \omega$ . Полагаем  $A_{i,s}(t_k) = 1$  и выполняем следующий подшаг или, если  $l = s - 1$ , то переходим к шагу  $s + 1$ .

Если окажется, что  $A_{i,s}(y)$  остается неопределенным для некоторого  $y$  к концу шага  $s$ , то полагаем, что  $A_{i,s}(y) = A_{i,s-1}(y)$ . Шаг  $s$  завершен.

Для завершения доказательства теоремы докажем несколько промежуточных утверждений.

**Предложение 6.** *Начиная с некоторого шага, значение каждого параметра  $m_{\langle e,i \rangle}$  больше не меняется.*

**Доказательство.** Предположим, что утверждение справедливо для любого  $j < e$ . Пусть  $s_0$  – такой шаг, на котором каждое значение  $m_{\langle j,i \rangle}$ ,  $j < e$  достигло своего предела; значение  $x_{\langle j,i \rangle}$  определено, элементы строки  $x_{\langle j,i \rangle}$  запрещены требованием  $R_{\langle j,i \rangle}$ ,  $j < e$ . Пусть  $k \geq e$  – наименьшее число, которое не запрещено этими требованиями и не совпадает ни с одним из конечных пределов  $\lim_{s \rightarrow \infty} n_{\langle j,i \rangle, s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_{\langle j,i \rangle}(x_{\langle j,i \rangle}, s) < \infty$ . Пусть  $s_1 > s_0$  – такой шаг, что  $\varphi_{\langle j,i \rangle}(x_{\langle j,i \rangle}, s_1) > k$  для всех  $j < e$ , для которых  $\varphi_{\langle j,i \rangle}(x_{\langle j,i \rangle}, s) = \infty$ . Тогда после шага  $s_1$  значение  $m_{\langle e,i \rangle} \leq k$  не меняется.  $\square$

**Предложение 7.** *Для любого  $y$  существует  $\lim_{s \rightarrow \infty} A_{i,s}(y)$ . Кроме того,  $A_i(y) = \lim_{s \rightarrow \infty} A_{i,s}(y)$ , и  $\bigoplus_i A_i = \{ \langle x, i \rangle : x \in A_i \text{ \& } i \in \omega \}$  является  $\Sigma_2^0$ -множеством.*

**Доказательство.** Для того чтобы числа  $m_{\langle e,i \rangle}$  из различных требований были различными, выберем в качестве параметра  $m_{\langle e,i \rangle}$  для требования  $R_{\langle e,i \rangle}$  числа  $y$  из  $\omega^{[e]} = \{ \langle x, i \rangle : i = e \}$ . Пусть  $s_0$  – такой шаг, на котором каждое значение  $m_{\langle j,i \rangle}$ ,  $j < e$ , уже достигло своего предела. Поскольку любое  $y$  можно поместить в  $A_i$ , если только  $y = m_{\langle j,i \rangle}$ ,  $j < e$ , то после шага  $s_0$  мы можем только исключить элемент из  $A_i$ . Таким образом,  $A_i(y)$  после шага  $s_0$  может измениться не более одного раза. Поэтому  $\bigoplus_i A_i$  будет  $\Sigma_2^0$ -множеством.  $\square$

**Предложение 8.** *Если  $f_e(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_e(x, t)$  существует для любого  $x_{\langle e,i \rangle} \in \left( \bigcap_{j \neq i} A_j \right)^{<\omega}$ , то  $A_i \neq \text{rng}(f_e)$  для всех  $i \in \omega$ .*

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть существует  $e$  такое, что  $A_i = \text{rng}(f_e)$ . Пусть  $s_0$  – наименьший шаг, на котором каждое значение  $m_{\langle j,i \rangle}$ ,  $j \leq e$  достигло своего предела. Тогда на некотором более позднем шаге  $s > s_0$  нам необходимо выполнить второй пункт из конструкции для построения множеств  $\{A_i\}_{i \in \omega}$ , иначе получим, что  $A_i(m_{\langle e,i \rangle}) = 1$ , но  $m_{\langle e,i \rangle} \notin \text{rng}(f_e)$ . Пусть  $m_{\langle e,i \rangle} = \varphi_{\langle e,i \rangle}(x_{\langle e,i \rangle}, s)$ , здесь шаг  $s$  понимается как минимальный номер шага, использующийся во втором пункте конструкции. Следовательно, для шага  $t > s$  имеем  $n_{\langle e,i \rangle} = \varphi_{\langle e,i \rangle}(x_{\langle e,i \rangle}, t)$  и  $A_{i,t}(n_{\langle e,i \rangle}) = 0$ . Таким образом, получаем, что  $A_{i,t}(\varphi_{\langle e,i \rangle}(x_{\langle e,i \rangle}, t)) = A_{i,t}(f_e) = 0$ . Получили противоречие с предположением, что  $A = \text{rng}(f_e)$ .  $\square$



**Предложение 9.**  $\max \bigcap_{i \in \omega} A_i \geq k$  для любого  $k \in \omega$ .

**Доказательство.** Пусть  $s_0$  – такой шаг, на котором каждое значение  $m_{\langle e, i \rangle}$ ,  $\langle e, i \rangle < k$ , достигло своего предела; значение  $x_{\langle e, i \rangle}$  определено, элементы строки  $x_{\langle e, i \rangle}$  запрещены требованием  $R_{\langle e, i \rangle}$ ,  $\langle e, i \rangle < k$ . Пусть  $t_k \geq k$  – наименьшее число, которое не запрещено этими требованиями и не совпадает ни с одним из этих конечных пределов  $\lim_s n_{\langle e, i \rangle, s} = \lim_s \varphi_{\langle e, i \rangle}(x_{\langle e, i \rangle}, s) < \infty$ . Пусть  $s_1 > s_0$  – такой шаг, что для всех  $s \geq s_1$   $\varphi_{\langle e, i \rangle}(x_{\langle e, i \rangle}, s) \neq k$  для всех  $\langle e, i \rangle < k$ . Тогда после шага  $s_1$  значение  $t_k \in \bigcap_{i \in \omega} A_i$  не меняется.  $\square$

Таким образом, теорема 4 полностью доказана.  $\square$

Покажем теперь, что для любого счётного частично-упорядоченного множества  $\mathcal{P} = (P, \leq_P)$  существует сохраняющее порядок 1:1 отображение из  $P$  в  $\mathbf{S}_{\text{lm}}$ , где  $\mathbf{S}_{\text{lm}}$  – это класс всех  $\text{lm}$ -степеней. Поскольку каждое счётное частично-упорядоченное множество вкладывается в вычислимый частичный порядок, мы можем считать, что  $P = \omega$ , и  $\leq_P$  является вычислимым отношением.

Определим отображение  $f : \omega \rightarrow \mathbf{S}_{\text{lm}}$ , полагая

$$f(i) = \mathbf{b}_i = \text{deg}(B_i) = \text{deg}(\bigcap_{k \leq_P i} A_k),$$

где  $B_i = \bigcap_{k \leq_P i} A_k$ . Из теоремы 4 вытекает, что  $x \in B_i$  для любых  $x$  и  $i$  в том и только том случае, когда  $(\forall k \leq x)[k \leq_P i \implies x \in A_k]$ , так что  $B_i \in \Sigma_2^0$  для каждого  $i$ .

Наша задача показать, что если  $i \leq_P j$ , то  $B_i \leq_{\text{lm}} B_j$ , и если  $i \not\leq_P j$ , то  $B_i \not\leq_{\text{lm}} B_j$ . Для этого сформулируем и докажем следующие утверждения.

**Предложение 10.** Если  $i \leq_P j$ , то  $B_i \leq_{\text{lm}} B_j$ .

**Доказательство.** Если  $i \leq_P j$ , тогда  $B_j = \bigcap_{k \leq_P j} A_k \subseteq B_i = \bigcap_{k \leq_P i} A_k$ , где  $B_i$  и  $B_j$  принадлежат классу  $\Sigma_2^0$ -множеств. Далее, применяя лемму 1, получим  $B_i = \bigcap_{k \leq_P i} A_k \leq_{\text{lm}} B_j = \bigcap_{k \leq_P j} A_k$ .  $\square$

**Предложение 11.** Если  $i \not\leq_P j$ , то  $B_i \not\leq_{\text{lm}} B_j$ .

**Доказательство.** По теореме 4 имеем  $A_i \not\leq_{\text{lm}} \bigcap_{k \neq i} A_k$ . Применяя снова лемму 1, можно получить следующую цепочку неравенств:

$$B_i = \bigcap_{k \leq_P i} A_k \geq_{\text{lm}} A_i \not\leq_{\text{lm}} \bigcap_{k \neq i} A_k \geq_{\text{lm}} \bigcap_{k \leq_P j} A_k = B_j.$$

Следовательно,  $B_i \not\leq_{\text{lm}} B_j$ . Так как в противном случае, если бы между  $B_i$  и  $B_j$  существовала  $\text{lm}$ -сводимость, то и в цепочке приведенных выше неравенств присутствовала бы  $\text{lm}$ -сводимость, то есть мы имели бы  $A_i \leq_{\text{lm}} \bigcap_{k \neq i} A_k$ , а это неверно.  $\square$

Из всех полученных во втором параграфе результатов можно сделать следующий вывод.

**Следствие 2.** Каждый счётный частичный порядок вкладывается в  $\mathbf{S}_{\text{lm}}$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-31389, 12-01-97008, 14-01-31200) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских учёных – докторов наук МД-4838.2013.1.

### Summary

*D.Kh. Zainetdinov, I.Sh. Kalimullin.* On Limitwise Monotonic Reducibility of  $\Sigma_2^0$ -Sets.

In this paper, we study the properties of *lm*-reducibility of sets belonging to the class of  $\Sigma_2^0$ -sets. In particular, we prove the existence of incomparable  $\Sigma_2^0$ -sets with respect to *lm*-reducibility. In addition, we construct an infinite uniform sequence of incomparable  $\Sigma_2^0$ -sets relative to *lm*-reducibility and show that every countable partial order can be embedded into the class of all *lm*-degrees of  $\Sigma_2^0$ -sets.

**Keywords:** computable functions,  $\Sigma_2^0$ -sets, limitwise monotonic functions, limitwise monotonic sets.

### Литература

1. *Coop R.I.* Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств / Пер. с англ. – Казань: Казан. матем. о-во, 2000. – 576 с.
2. *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г.* О сводимости на семействах // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, № 1. – С. 31–53.
3. *Калимуллин И.Ш., Файзрахманов М.Х.* Спектры предельной монотонности  $\Sigma_2^0$ -множеств // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 2. – С. 107–116.
4. *Kalimullin I., Khoussainov B., Melnikov A.* Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – V. 141, No 9. – P. 3275–3289.
5. *Khoussainov B., Nies A., Shore R.* Computable models of theories with few models // Notre Dame J. Formal Logic. – 1997. – V. 38, No 2. – P. 165–178.

Поступила в редакцию  
27.01.14

---

**Зайнетдинов Дамир Хабирович** – аспирант кафедры алгебры и математической логики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [damir.zh@mail.ru](mailto:d Amir.zh@mail.ru)

**Калимуллин Искандер Шагитович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [ikalimul@gmail.com](mailto:ikalimul@gmail.com)