КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского.
Институт физики.

Р.А. Даишев, В.А. Сочнева

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Казань – 2022

УДК 517

*Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского
ФГАСУ ВО Казанского (Приволжского) федерального университета*

Протокол № 5 от 10.03.2022 г.

*Заседания кафедры общей математики ИМиМ им. Н.И.Лобачевского
Протокол № 5 от 04.03.2022 г.*

Рецензент
доктор физ.-мат. наук, проф. КФУ С.Р. Насыров

Даишев Р.А., Сочнева В.А.

Уравнения математической физики: учебное пособие.
Р. А. Даишев, В.А. Сочнева – Казань, КФУ 2022. – 92 стр.

Курс "Уравнения математической физики"относится к числу основных базовых курсов для студентов физико-математических специальностей. Само название курса говорит о тесной связи между физикой и математикой, сложившейся за многие годы существования этих наук. Тем не менее, в предлагаемом пособии материал построен так, что отдельные главы можно переставлять и даже исключать, сохраняя целостность лекционного курса и делая изложение "более физическим"или "более математическим", учитывая направления подготовки студентов. Пособие вполне доступно также и для самостоятельного изучения предмета.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ГЛАВА 1

§ 1.1. Вывод уравнения малых свободных поперечных колебаний струны

Рассмотрим натянутую струну, закреплённую на концах. Под струной понимают тонкую нить, которая может свободно изгибаться, то есть не оказывает сопротивления изменению её формы, не связанному с изменением её длины. Внешние силы, действующие на струну, предполагаются значительными, так что действием силы тяжести мы пренебрегаем.

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси Ox. Будем рассматривать только поперечные колебания струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикалярно оси Ox.

Выведем уравнение малых поперечных колебаний струны вариационным методом. (Основные элементы вариационного исчисления приведены ниже в приложении III.)

Воспользуемся принципом наименьшего действия Гамильтона: запишем функционал

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt, \tag{1.1}$$

который принято называть *интегралом действия* или просто *действием,* и найдем минимум этого функционала. Здесь T – кинетическая энергия колеблющейся струны, U – её потенциальная энергия.

Согласно принципу наименьшего действия Гамильтона, все природные процессы развиваются так, чтобы обеспечить минимум этого функционала.

Понятно почему это так: при любом колебательном процессе кинетическая энергия переходит в потенциальную, а затем наоборот: потенциальная энергия превращается в кинетическую. При этом неизбежно происходят потери энергии. Смысл принципа Гамильтона заключается в том, что природа выбирает такие пути развития, чтобы потери энергии были минимальны. Разность $(T - U)$ – как раз и есть эти потери.

Пусть длина струны равна l и пусть начало координат совпадает с левым концом струны. Отклонение точек струны в поперечном направлении обозначим через u. Ясно, что $u = u(x,t)$.

Рассматривая далее только малые колебания, будем считать, что смещение $u(x,t)$ и её производная $u'_x(x,t)$ столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами.

Рассмотрим какой-либо малый элемент Δx струны в недеформированном состоянии. В процессе колебаний этот малый участок Δx дефомируется и его длина в момент времени t с точностью до бесконечно малых второго порядка будет равна

$$ds = \sqrt{1 + (u'_x)^2}\Delta x \approx \left[1 + \frac{1}{2}(u'_x)^2\right]\Delta x.$$

Как известно, потенциальная энергия этого элемента, согласно закону Гука, пропорциональна удлинению $ds - \Delta x$ элемента струны:

$$ds - \Delta x \approx \left[1 + \frac{1}{2}(u'_x)^2\right]\Delta x - \Delta x = \frac{1}{2}(u'_x)^2\Delta x.$$

Значит, потенциальная энергия малого элемента струны Δx имеет вид:

$$U_{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (u'_x)^2 \Delta x,$$

где k – коэффициент пропорциональности. Если свойства материала струны не меняются от точки к точке, то есть струна однородна, то будем считать, что $k = const$. Если же струна неоднородна, то положим $k = k(x)$. Потенциальная энергия всей струны:

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \cdot k(x) \cdot (u'_x)^2 dx.$$

Кинетическая энергия участка Δx струны равна

$$T_{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot (\rho \cdot \Delta x) \cdot (u'_t)^2,$$

где $\rho = \rho(x)$ — линейная плотность струны. Кинетическая энергия всей струны:

$$T = \int\limits_0^l \frac{1}{2} \cdot \rho(x) \cdot (u'_t)^2 dx.$$

Таким образом,

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} (T - U)dt = \frac{1}{2} \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\int\limits_0^l \left[\rho(x) \cdot (u'_t)^2 - k(x) \cdot (u'_x)^2 \right] dx \right) dt. \tag{1.2}$$

Это частный случай так называемого интегрального функционала. В общем случае интегральный функционал, зависящий от функции $u(x,t)$ двух переменных, имеет вид:

$$F\left(u(x,t)\right) = \int\limits_\Omega \int \Phi\left(x, t, u, u'_x, u'_t\right) dx dt.$$

Уравнение Эйлера-Остроградского имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_t}\right) = 0$$

и применительно к нашему функционалу запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0. \tag{1.3}$$

Если струна сделана их однородного материала, то $\rho = \mathrm{const}$, $k = \mathrm{const}$ и уравнение малых поперечных колебаний струны можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.4}$$

где обозначено $a^2 = \frac{k}{\rho}$.

§ 1.2. Вывод уравнения малых вынужденных поперечных колебаний струны

Пусть на струну действует внешняя сила $\vec{f}(x,t)$, перпендикулярная к струне в её положении равновесия и рассчитанная на единицу её массы. Такой силой может быть, например, сила сопротивления среды: она пропорциональна отклонению струны от положения равновесия.

Если считать, что колебания струны происходят в плоскости $x0y$ а орт $\vec{j}$, направленный вдоль оси $0y$, перпендикулярен положению струны в положении равновесия, то силу, действующую в точке ξ на элемент струны Δx с плотностью $\rho(x)$, можно записать так: $\vec{f}_{\Delta x}(\xi,t) = \vec{j} \cdot f(\xi,t) \cdot (\rho(\xi)\Delta x)$, а энергия, которую необходимо затратить на преодоление действия этой силы на участке Δx равна $\Delta E = \left(\vec{f}_{\Delta x}(\xi,t) \cdot u(\xi,t)\, \vec{j}\right)$. Для всей струны силовая функция равна $\int\limits_0^l f(x,t) \cdot \rho(x) \cdot u(x,t) dx$. Поэтому действие равно

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\int\limits_0^l \left[\rho(x) \cdot (u'_t)^2 - k(x) \cdot (u'_x)^2 + f(x,t) \cdot \rho(x) \cdot u(x,t) \right] dx \right) dt.$$

Уравнение Эйлера-Остроградского даёт

$$\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho(x) f(x,t). \tag{1.5}$$

Если струна однородная, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1.6}$$

где, как и прежде, $a^2 = \frac{k}{\rho}$.

§ 1.3. Вывод уравнения малых поперечных колебаний мембраны

Мембраной называется тонкая плёнка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу, но оказывающая сопротивление растяжению (упругая плёнка). Пусть плёнка в положении равновесия лежит на плоскости $x0y$, а отклонение плёнки от положения равновесия характеризуется функцией $v(x,y,t)$.

Рассмотрим маленький кусочек мембраны, который в положении равновесия имеет площадь $\Delta x \cdot \Delta y$. В процессе колебаний, когда мембрана отклоняется от положения равновесия, площадь этого кусочка будет равна

$$d\sigma = \sqrt{1+(v'_x)^2+(v'_y)^2}\Delta x\Delta y \approx \left(1+\frac{1}{2}(v'_x)^2+\frac{1}{2}(v'_y)^2\right)\Delta x\Delta y.$$

Согласно закону Гука, потенциальная энергия этого кусочка мембраны пропорциональна растяжению:

$$U_{\Delta x\Delta y} = k(x,y)\left(d\sigma - \Delta x\Delta y\right) = \frac{k(x,y)}{2}\left((v'_x)^2+(v'_y)^2\right)\Delta x\Delta y.$$

Потенциальная энергия всей мембраны равна

$$U = \int\limits_D\int \frac{k(x,y)}{2}\left((v'_x)^2+(v'_y)^2\right)dxdy.$$

Кинетическая энергия всей мембраны равен

$$T = \int\limits_D\int \frac{\rho(x,y)}{2}(v'_t)^2dxdy.$$

Интеграл действия:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2}(T-U)dt = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\int\limits_D\int\left(\rho(x,y)(v'_t)^2 - k(x,y)[(v'_x)^2+(v'_y)^2]\right)dxdy\right]dt.$$

Уравнение Эйлера-Остроградского для нашего функционала в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x,y)\frac{\partial v}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$

или

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - k(x,y)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial k(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial k(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1.7}$$

Это — уравнение свободных колебаний мембраны. Если $\rho = \text{const}$, $k = \text{const}$, то это уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{1.8}$$

где, как и прежде, $a^2 = \frac{k}{\rho}$.

Предположим теперь, что на мембрану действует внешняя сила $\vec{f}(x,y,t)$, перпендикулярная к мембране в её положении равновесия и рассчитанная на единицу её массы.

Рассуждениями, аналогичными тем, которые мы провели для струны, легко показать, что вынужденные колебания мембраны описываются уравнением

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - k(x,y)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) -$$

$$-\frac{\partial k(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial k(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \rho(x,y)f(x,y,t). \tag{1.9}$$

В случае однородной мембраны получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t) \tag{1.10}$$

Используя оператор Лапласа,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \Delta v = f(x,y,t). \tag{1.11}$$

Рассуждая аналогично и применяя наши рассуждения к колебаниям произвольного скалярного поля $v = v(x,y,z,t)$, например к вариациям давления или плотности какой-либо среды, которые описываются функцией $v = v(x,y,z,t)$, нетрудно показать, что уравнения колебаний имеют вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = f(x,y,t). \tag{1.12}$$

Трёхмерное волновое уравнение (1.12), приведённое выше, описывает, например, процесс распространения звука в однородной среде, распространение электромагнитных волн в непроводящей среде и так далее.

Волновое уравнение иногда удобно представить формулой

$$\Box v = f(x,y,z,t),$$

где $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$ – *волновой оператор* или *оператор Даламбера*.

Если $v = v(x,y,z)$, и $f(x,y,z) = 0$, то мы получим хорошо знакомое уравнение Лапласа

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

некоторые решения которого мы получили на прошлой главы.

ГЛАВА 2

§ 2.1. Вывод уравнения малых продольных колебаний стержня

Рассмотрим однородный стержень длины l, то есть тело цилиндрической или какой-либо иной формы, для растяжения или изгибания которого надо приложить заметное усилие. Последнее обстоятельство и отличает даже самый тонкий стержень от струны, которая, как мы знаем, гнётся свободно.

Пусть прямолинейный стержень длины выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям в момент времени $t = 0$ сообщены малые продольные смещения и скорости. Предполагая, что поперечные сечения стержня всё время остаются плоскими, выведем уравнения малых продольных колебаний этого стержня.

Направим ось $0x$ вдоль стержня и выберем начало координат в левом его конце. Пусть $u(x,t)$ – отклонение сечения x в момент времени t от положения равновесия. Рассмотрим элемент Δx стержня. Изменение длины этого элемента равно $u(x+\Delta x,t) - u(x,t)$, а относительное изменение длины - $\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} \approx u'_x(x,t)$.

Будем считать, что упругие силы $\vec{F}$, возникающие при продольных деформациях стержня, подчинены закону Гука: $T(x,t) = E(x) \cdot S(x) \cdot u'_x(x,t)$, где E – модуль Юнга, S – площадь поперечного сечения стержня, T – проекция силы $\vec{F}$ на ось $0x$, действующая на левое поперечное сечение выделенного элемента стержня, $T(x+\Delta x,t) = E(x+\Delta x) \cdot S(x+\Delta x) \cdot u'_x(x\Delta x,t)$ – проекция силы, действующей в противоположном направлении на правое поперечное сечение. Суммарная сила, действующая на выделенный элемент стержня, равна:

$$T(x+\Delta x,t) - T(x,t) = E(x+\Delta x) \cdot S(x+\Delta x) \cdot u'_x(x+\Delta x,t) - E(x) \cdot S(x) \cdot u'_x(x,t).$$

В случае однородного стержня E – постоянная величина. Пусть площадь поперечного сечения стержня S тоже постоянна. В этом случае

$$T(x+\Delta x,t) - T(x,t) = E \cdot S \cdot [u'_x(x+\Delta x,t) - u'_x(x,t)] = E \cdot S \cdot u''_{xx}(x+\theta\Delta x,t)\Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$. Здесь мы применили формулу конечных приращений Лагранжа.

При достаточно малом Δx можно рассматриваемый элемент заменить приближённо материальной точкой с массой $\Delta m = \rho \cdot \Delta x \cdot S$, где ρ – объёмная плотность стержня в невозмущённом состоянии, и применить к нему второй закон Ньютона:

$$\rho \cdot \Delta x \cdot S \cdot u''_{tt}(x_c,t) = E \cdot S \cdot u''_{xx}(x+\theta\Delta x,t)\Delta x,$$

где x_c — координата центра тяжести элемента. Сокращая на $S \cdot \Delta x$ и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение малых свободных продольных колебаний стержня:

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = 0, \tag{2.1}$$

где $a^2 = {}^{E}\!/_{\rho}$, $\quad t > 0, \quad 0 < x < l.$

Если дополнительно предположить, что вдоль оси стержня действуют внешние силы, плотностью $f(x,t) \cdot \rho$, получим уравнение вынужденных продольных колебаний:

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = f(x,t). \tag{2.2}$$

Легко видеть, что это уравнение в точности совпадает с уравнением малых поперечных колебаний струны.

§ 2.2. Постановка краевых задач для уравнения колебаний

Чтобы определить произвольные функции, входящие в решение дифференциального уравнения в частных производных, то есть выделить конкретное частное решение, необходимо, как известно, на искомую функцию наложить дополнительные условия.

В задаче о малых поперечных колебаниях струны или малых продольных колебаниях упругого стержня

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = f(x,t)$$

такие дополнительные условия должны быть двух видов: начальные и граничные.

Начальные условия задаются обычно в момент времени $t = 0$ или $t = t_0$ и определяют начальное положение точек струны или стержня $u(x,0) = \varphi(x)$ и их начальную скорость $u'_t(x,0) = \psi(x)$.

Граничные условия показывают, что происходит на концах струны или стержня во всё время колебаний.

Существует три вида краевых задач.

1. Первая краевая задача. Эта задача возникает, если наложены условия на смещения концов струны или стержня. Так, если оба конца закреплены неподвижно, то должны выполняться условия

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0.$$

Если же концы струны или стержня движутся по заданному закону, то граничные условия принимают вид

$$u(0,t) = \alpha(t); \quad u(l,t) = \beta(t),$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — заданные функции от t.

2. Вторая краевая задача. Эта задача возникает, если при $x = 0$ или при $x = l$ заданы производные от искомой функции. Вспомним вывод уравнения малых продольных колебаний стержня: сила натяжения в сечении x стержня равна $T(x,t) = E \cdot S \cdot u'_x(x,t)$. Задавая $u'_x(0,t)$, $u'_x(l,t)$, мы тем самым задаём силы, действующие на левый и правый торцы стержня.

Следовательно, если нам нужно найти закон колебания стержня при условии, что на концы его действуют заданные силы, то граничные условия принимают вид

$$u'_x(0,t) = \lambda_1(t)\ ; \quad u'_x(l,t) = \lambda_2(t).$$

Если же речь идёт о малых поперечных колебаниях струны, то задание производных $u'_x(0,t)$, $u'_x(l,t)$ можно опять понимать как задание сил натяжения струны в точках $x = 0$ или $x = l$. А если вспомнить, что производная функции по x — это тангенс угла наклона касательной к оси $0x$, то задание $u'_x(0,t) = \lambda_1(t)$ и $u'_x(l,t) = \lambda_2(t)$ можно понимать как условие того, что струна в момент t пересекает ось $0x$ под заранее заданным углом.

3. Третья краевая задача. Очень часто в рассматриваемых задачах участвует условие упругого закрепления концов; то есть имеются упругие силы, стремящиеся вернуть сместившийся конец в прежнее положение, например:

$$u'_x(0,t) = k_1 \cdot u(0,t); \quad u'_x(l,t) = k_2 \cdot u(l,t).$$

А если точка, относительно которой имеется упругое закрепление, ещё и движется по заданному закону, то возникает граничное условие третьего типа:

$$u'_x(0,t) = k_1 \cdot [u(0,t) - \nu_1(t)]\,; u'_x(l,t) = k_2 \cdot [u(l,t) - \nu_2(t)]\,.$$

4. Задача Коши. В этой задаче требуется найти решение уравнения колебаний

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = f(x,t)$$

с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u'_t(x,0) = \psi(x)$, когда $-\infty < x < \infty$. Эта задача может быть представлена как предельный случай первой краевой задачи, когда в течение малого времени "далеко расположенные" концы не успевают оказать влияние на перемещение конечных точек стержня или струны.

При решении краевых задач:

(1) надо убедиться, что дополнительные условия достаточны для выделения однозначного решения; это достигается доказательством теоремы *единственности*.

(2) эти дополнительные условия не переопределяют задачу, то есть среди них нет несовместимых условий; это достигается доказательством теоремы *существования* решения.

(3) при малых изменениях начальных и граничных данных само решение тоже изменится мало. Это последнее свойство, которое можно понимать как непрерывную зависимость решения от начальных и граничных условий, называют *устойчивостью решения* задачи.

Задачи, для которых выполнены все три условия, называют *корректно поставленными*.

§ 2.3. Теорема единственности решения первой краевой задачи

Теорема. *Существует единственное решение уравнения*

$$\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho(x) f(x,t),$$

удовлетворяющее начальным $u(x,0) = \varphi(x)$, $u'_t(x,0) = \psi(x)$ *и граничным* $u(0,t) = \alpha(t)$; $u(l,t) = \beta(t)$ *условиям, если выполнены следующие условия:*

1) функция $u(x,t)$ *и её производные* u''_{tt}, u''_{xx}, u''_{xt} *непрерывны на отрезке* $0 \le x \le l$ *при* $t \ge 0$;

2) коэффициенты $\rho(x)$ *и* $k(x)$ *непрерывны на отрезке* $0 \le x \le l$.

Доказательство. Предположим противное: существует два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Их разность $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

при нулевых начальных $v(x,0) = 0$; $v'_t(x,0) = 0$, и нулевых граничных $v(0,t) = 0$; $v(l,t) = 0$ условиях.

Покажем, что $v(x,t) \equiv 0$. Поскольку $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению колебаний, подсчитаем полную энергию струны:

$$E = T + U = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[\rho (v'_t)^2 + k(v'_x)^2\right] dx.$$

Тогда

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [\rho \cdot v'_t \cdot v''_{tt} + k \cdot v'_x \cdot v''_{xt}] dx.$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое в этом интеграле и подсчитаем интеграл по частям:

$$\int\limits_0^l \underbrace{(k \cdot v'_x)}_{u} \cdot \underbrace{v''_{xt} dx}_{dv} = \underbrace{k \cdot v'_x \cdot v'_t\big|_0^l}_{u\cdot v=0} - \int\limits_0^l v'_t \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot v'_x\right) dx.$$

Поэтому

$$\frac{dE}{dt}=\int\limits_0^l\left[\rho\cdot v_t'\cdot v_{tt}''-v_t'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(k\cdot v_x')\right]dx=\int\limits_0^l v_t'\cdot\underbrace{\left[\rho\cdot v_{tt}''-\frac{\partial}{\partial x}(k\cdot v_x')\right]}_{=0}dx=0.$$

Таким образом, $\frac{dE}{dt}=0$, следовательно, $E=\mathrm{const}$. Но поскольку $E(0)=0$, то $E(t)\equiv 0$. Так как $\rho>0$, $k>0$, то $v_t'=0$, и $v_x'=0$. Это означает, что $v=\mathrm{const}$. Но так как $v(x,0)=0$, $v(0,t)=0$, то $v(x,t)\equiv 0$. Иначе говоря, $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$, что и требовалось доказать.

ГЛАВА 3

§ 3.1. Вывод уравнения распространения тепла в теле

Процесс распространения тепла в теле может быть описан функцией $U(x,y,z,t)$, задающей температуру в каждой точке (x,y,z) тела в момент времени t. Известно, что когда температура в отдельных участках тела различна, в теле возникают тепловые потоки от более нагретых к менее нагретым участкам. Из физики известно, что количество тепла, протекающего за время Δt через площадку $d\sigma$ по закону Фурье равно $\Delta Q_1=k\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\cdot d\sigma\cdot\Delta t$, где k – коэффициент теплопроводности тела, а n - нормаль к $d\sigma$. Здесь речь идёт об увеличении количества тепла в элементе объёма. Если бы тепло утекало из этого объёма, а не втекало в него, нам бы пришлось писать $\Delta Q_1=-k\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\cdot d\sigma\cdot\Delta t$. Через всю поверхность S за время Δt тело получит количество тепла, равное

$$Q_1=\left(\oiint_S k\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\cdot d\sigma\right)\cdot\Delta t. \tag{3.1}$$

Такое изменение количества тепла приведёт к изменению температуры тела на величину δU :

$$\delta U=U(x,y,z,t+\Delta t)-U(x,y,z,t)=\frac{\partial U(x,y,z,t+\theta\Delta t)}{\partial t}\Delta t,\quad 0<\theta<1,$$

Здесь мы применили формулу конечных приращений Лагранжа. При этом мы предполагали, что $U(x,y,z,t)$ – дифференцируемая функция. Очевидно, что это – вполне допустимое предположение для обычных, медленно текущих процессов.

Для повышения температуры тела на δU необходимо следующее количество тепла в элементе объёма:

$$\Delta Q_2=c\cdot(\Delta m)\cdot\delta U=c\cdot(\rho\cdot\Delta V)\cdot\frac{\partial U(x,y,z,t+\theta\Delta t)}{\partial t}\cdot\Delta t,$$

где c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность вещества. Тепло, необходимое для нагрева всего тела:

$$Q_2=\left(\int\int\limits_V\int c\cdot\rho\cdot U_t'(x,y,z,t+\theta\Delta t)\cdot dV\right)\cdot\Delta t. \tag{3.2}$$

Составим уравнение теплового баланса: $Q_1=Q_2$, то есть

$$\left(\oiint_S k\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\cdot d\sigma\right)\cdot\Delta t=\left(\int\int\limits_V\int c\cdot\rho\cdot U_t'(x,y,z,t+\theta\Delta t)\cdot dV\right)\cdot\Delta t.$$

Сократим на Δt и затем перейдём к пределу при $\Delta t\to 0$. Тогда уравнение теплового баланса в момент времени t будет иметь вид:

$$\left(\oiint_S k\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\cdot d\sigma\right)=\left(\int\int\limits_V\int c\cdot\rho\cdot U_t'\cdot dV\right). \tag{3.3}$$

Воспользовавшись формулой для производной по направлению, уравнение теплового баланса можно переписать:

$$\oiint_S k\cdot(\vec{\nabla}U\cdot\vec{n})\cdot d\sigma=\int\int\limits_V\int c\cdot\rho\cdot U_t'dV. \tag{3.4}$$

Если в теле есть источники тепла с плотностью $f(x,y,z,t)$, то нагрев тела в течение времени Δt на δU происходит за счёт выделения источниками тепла Q_3 :

$$Q_3 = \left(\int\int\limits_V\int f(x,y,z,t)dV\right)\cdot\Delta t. \tag{3.5}$$

Уравнение теплового баланса $Q_1 + Q_3 = Q_2$ в этом случае будет выглядеть так:

$$\left(\oiint_S k\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\cdot d\sigma\right)\cdot\Delta t + \left(\int\int\limits_V\int f(x,y,z,t)dV\right)\cdot\Delta t =$$

$$= \left(\int\int\limits_V\int c\cdot\rho\cdot U_t'(x,y,z,t+\theta\Delta t)\cdot dV\right)\cdot\Delta t,$$

или, сокращая на Δt и переходя к пределу $\Delta t\to 0$, получим:

$$\left(\oiint_S k\cdot(\vec{\nabla}U\cdot\vec{n})\cdot d\sigma\right) = \left(\int\int\limits_V\int [c\cdot\rho\cdot U_t' - f(x,y,z,t)]\cdot dV\right). \tag{3.6}$$

Преобразуем первое слагаемое в левой части равенства с помощью формулы Остроградского:

$$\oiint_S k\cdot\frac{\partial U}{\partial n}\cdot d\sigma = \oiint_S k\cdot\left(\vec{\nabla}U\cdot\vec{n}\right)\cdot d\sigma = \int\int\limits_V\int div\left(k\cdot\vec{\nabla}U\right)dV.$$

После этого уравнение (3.6) примет вид:

$$\int\int\limits_V\int div\left(k\cdot\vec{\nabla}U\right)dV = \left(\int\int\limits_V\int [c\cdot\rho\cdot U_t' - f(x,y,z,t)]\cdot dV\right). \tag{3.7}$$

Уравнения (3.6) и (3.7) – это два разных представления уравнения теплового баланса в интегральном виде.

Применяя к (3.7) теорему о среднем и стягивая объём V в точку, получим уравнение теплового баланса в дифференциальном виде:

$$c\cdot\rho\cdot\frac{\partial U}{\partial t} = div\left(k\cdot\vec{\nabla}U\right) + f(x,y,z,t). \tag{3.8}$$

Если $k = k(x,y,z) \neq \text{const}$, то есть тело изготовлено из неоднородного материала, то это уравнение можно записать:

$$c\cdot\rho\cdot\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial U}{\partial z}\right) + f(x,y,z,t), \tag{3.9}$$

а если тело однородное, то $k = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $c = \text{const}$, и уравнение примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k}{c\cdot\rho}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{c\cdot\rho}f(x,y,z,t). \tag{3.10}$$

Обычно этому дифференциальному уравнению теплового баланса придают стандартный вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\Delta U + F(x,y,z,t), \tag{3.11}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\cdot\rho}$, $F = \frac{f(x,y,z,t)}{c\cdot\rho}$.

При отсутствии тепловых источников $F(x,y,z,t) = 0$, и уравнение теплопроводности становится однородным:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a^2\Delta U = 0. \tag{3.12}$$

Если в уравнении (3.11) температура U не зависит от времени, то есть процесс распространения тепла стационарен, то это уравнение превращается в $\Delta U = F(x, y, z, t)$ − уравнение Пуассона, а при отсутствии источников тепла − в $\Delta U = 0$ − уравнение Лапласа.

Уравнения (3.11) и (3.12) описывают также процесс диффузии газа или раствора в некотором объёме, функция U в этом случае означает концентрацию вещества.

Уравнения колебаний, теплопроводности, Лапласа (Пуассона) называют основными уравнениями математической физики.

Ниже мы покажем, что общее линейное уравнение в частных производных второго порядка на плоскости с помощью подходящего выбора переменных x, y в любой точке приводится к одному из этих трёх уравнений.

3.2. Распределение тепла в тонком стержне и постановка краевых задач для уравнения теплопроводности

Задача о распределении тепла в тонком стержне есть частный случай задачи, рассмотренной выше. Будем считать, что стержень тонкий, то есть в поперечном сечении температура считается одинаковой во всех точках. Будем считать, что тонкий стержень теплоизолирован с боков, поэтому потоки тепла могут распространяться только в положительном или отрицательном направлении оси x, так что $\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x}$, и уравнение теплопроводности для такого стержня имеет вид:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial U}{\partial x}\right) + f(x,t), \tag{3.13}$$

а для однородного стержня

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(x,t). \tag{3.14}$$

При $f(x,t) = 0$ и $F(x,t) = 0$ получим уравнение распространения тепла в однородном тонком теплоизолированном с боков стержне без источников:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{3.15}$$

Постановку краевых задач проведём пока только для одномерного уравнения теплопроводности.

Для выделения единственного решения уравнения необходимо задать начальные и граничные условия. Наиболее распространёнными для уравнения теплопроводности являются следующие задачи:

1. Первая краевая задача − найти решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее начальному и граничным условиям:

$$U(x,0) = \varphi(x), \;\; U(0,t) = \alpha(t), \quad U(l,t) = \beta(t), \;\; x \in (0,l), \;\; t > 0$$

- задаётся начальная температура стержня и закон изменения температуры на концах.

2. Вторая краевая задача − найти решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее начальному и граничным условиям:

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad U_x(0,t) = \mu(t), \quad U_x(l,t) = \nu(t), \;\; x \in (0,l), \;\; t > 0,$$

- задаётся начальная температура стержня и поток тепла через концы стержня.

3. Третья краевая задача − найти решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее начальному и граничным условиям:

$$U(x,0) = \varphi(x), U_x(0,t) = \lambda(t)\left[U(0,t) - \theta(t)\right], U_x(l,t) = \nu(t)\left[U(l,t) - \theta(t)\right],$$

- задаётся начальная температура стержня, при условии, что поток тепла через концы стержня пропорционален разности между температурой стержня и окружающей среды (закон Ньютона).

4. Задача Коши - найти решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условию

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ниже мы подробно остановимся на решении задачи Коши и первой краевой задачи, а предварительно отметим одно важное свойство решений уравнения теплопроводности.

Теорема о максимуме и минимуме. *Если функция* $U(x,t)$ *определена и непрерывна при* $0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le l,$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

в точках области $D: \ 0 < t \le T, \quad 0 < x < l,$ *то максимальное и минимальное значение функции* $U(x,t)$ *достигается или в начальный момент времени* $t = 0,$ *или на концах стержня* $x = 0, \quad x = l.$ *Это множество мы обозначим* $\Gamma.$

Доказательство. Обозначим через M максимум функции $U(x,t)$ в D и на $\Gamma,$ а через m – максимум функции $U(x,t)$ на $\Gamma.$ Допустим противное: что максимум функции $U(x,t)$ достигается не на границе Γ области $D,$ а в некоторой внутренней точке $x^*,\ t^*$ области: $0 < x^* < 0, \quad t^* > 0.$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$V(x,t) = U(x,t) + \frac{M-m}{4l^2}(x-x^*)^2.$$

На Γ имеем:

$$V(x,t) < m + \frac{M-m}{4} = \frac{M}{4} + \frac{3m}{4} < M,$$

тогда как в точке $x^*,\ t^*: \ V(x,t) = M.$ Следовательно, вспомогательная функция $V(x,t)$ также не принимает наибольшего значения на $\Gamma,$ а принимает его в $D.$

Пусть $\max V = V(x_1,t_1),$ где $t_1 > 0,\ 0 < x_1 < l.$ Если точка максимума (x_1,t_1) – внутренняя, то первые частные производные в этой точке должны быть равны нулю, а вторые – не превосходить нуля:

$$V_t(x_1,t_1) = 0, \ \ V_{xx}(x_1,t_1) \le 0.$$

Таким образом,

$$V_t(x_1,t_1) - a^2 V_{xx}(x_1,t_1) \ge 0.$$

С другой стороны, в точке (x_1,t_1)

$$V_t(x_1,t_1) - a^2 V_{xx}(x_1,t_1) = \underbrace{U_t(x_1,t_1) - a^2 U_{xx}(x_1,t_1)}_{=0} - a^2 \frac{M-m}{2l^2} < 0,$$

что противоречит предыдущему утверждению.

Теорема единственности решения первой краевой задачи. *Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности единственно.*

Доказательство. Предположим противное: пусть при $0 \le t \le T, 0 \le x \le l$ существует два решения $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t),$ удовлетворяющие одинаковым уравнениям

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + F(x,t),$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + F(x,t),$$

и одинаковым начальным и граничным условиям

$$U_1(x,0) = U_2(x,0) = \varphi(x),$$

$$U_1(0,t) = U_2(0,t) = \mu_1(t),$$

$$U_1(l,t) = U_2(l,t) = \mu_2(t).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$V(x,t) = U_1(x,t) - U_2(x,t).$$

Видим, что $V(x,0)=0$, $V(0,t)=V(l,t)=0$ и $V(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial V}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Согласно принципу максимума и минимума, максимальное или минимальное значение такой функции достигается или в начальный момент времени $t=0$, или при $x=0$, $x=l$, и большего или меньшего значения эта функция принимать не может. Следовательно, $V(x,t)=0$, или $U_1(x,t)=U_2(x,t)$, что и утверждалось.

ГЛАВА 4

§ 4.1. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных и приведение их к каноническому виду

Большинство задач механики и физики приводят к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. (Из соображений удобства штрихи над производными далее будем опускать). Если через $U(x_1,x_2,...,x_n)$ обозначить искомую функцию, то выражение

$$\Phi(x_1,x_2,...,x_n,U,U_{x_1},U_{x_2},...,U_{x_n},U_{x_1x_1},...)=0$$

и есть самое общее уравнение второго порядка в частных производных. Частным случаем этого выражения служат выражения вида

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_1,x_2,...,x_n)U_{x_ix_j}+F(x_1,x_2,...,x_n,U,U_{x_1},U_{x_2},...,U_{x_n})=0. \tag{4.1}$$

Уравнения такого вида называются линейными относительно старших производных.

Для таких уравнений можно провести классификацию, разбив их на три типа: гиперболические, эллиптические и параболические. Подробно рассмотрим случай, когда $n=2$. Тогда уравнение имеет вид:

$$a_{11}(x,y)U_{xx}+2a_{12}(x,y)U_{xy}+a_{22}U_{yy}+F(x,y,U,U_x,U_y)=0. \tag{4.2}$$

Вместо переменных x и y введём новые независимые переменные $\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ – дважды дифференцируемые функции, такие, что $J\equiv\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\neq 0$, и потребуем, чтобы преобразованное уравнение приняло максимально простой вид.

Вычислим

$$U_x=U_\xi\xi_x+U_\eta\eta_x,\quad U_y=U_\xi\xi_y+U_\eta\eta_y,$$
$$U_{xx}=U_{\xi\xi}\xi_x^2+2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+U_{\eta\eta}\eta_x^2+U_\xi\xi_{xx}+U_\eta\eta_{xx},$$
$$U_{xy}=U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+U_\xi\xi_{xy}+U_\eta\eta_{xy},$$
$$U_{yy}=U_{\xi\xi}\xi_y^2+2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+U_{\eta\eta}\eta_y^2+U_\xi\xi_{yy}+U_\eta\eta_{yy}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (4.2).

$$U_{\xi\xi}\left(a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2\right)+2U_{\xi\eta}\left[a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y\right]+$$
$$+U_{\eta\eta}\left(a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\right)+\hat{F}\left(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta\right)=0.$$

Обозначим:

$$\hat{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,$$
$$\hat{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y,$$
$$\hat{a}_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2.$$

После этого наше уравнение примет вид:

$$\hat{a}_{11}U_{\xi\xi}+2\hat{a}_{12}U_{\xi\eta}+\hat{a}_{22}U_{\eta\eta}+\hat{F}\left(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta\right)=0. \tag{4.3}$$

Отметим, что если исходная функция F линейна, то есть имеет вид $b_1U_x+b_2U_y+cU+d$, то ясно, что после преобразования такой же линейный вид будет иметь и $\hat{F}$, то есть линейное уравнение преобразуется в линейное.

Непосредственным вычислением проверяется, что

$$\hat{a}_{12}^2 - \hat{a}_{11}\hat{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})J^2,$$

и, следовательно, эта величина, называемая дискриминантом, не меняет знака при переходе к новым переменным.

Потребуем, чтобы $\hat{a}_{11}$ в уравнении (4.3) обратилась в нуль в некоторой области D переменных (x, y) :

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0.$$

Тогда

$$a_{11}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) + a_{22} = 0.$$

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \stackrel{def}{=} \lambda_{1,2}(x, y). \tag{4.4}$$

Иначе говоря, функция $\xi(x, y)$ должна удовлетворять одному из уравнений,

$$\xi_x = \lambda_1(x, y)\xi_y \tag{4.5}$$

или

$$\xi_x = \lambda_2(x, y)\xi_y. \tag{4.6}$$

Составим характеристические уравнения:

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\lambda_1(x, y)}, \qquad \frac{dx}{1} = -\frac{dy}{\lambda_2(x, y)}.$$

Их первые интегралы $\varphi(x, y) = C, \quad \psi(x, y) = C,$ определяющие семейства линий на плоскости $x, y,$ называются характеристиками уравнения (4.2).

1. Полагая $\xi = \varphi(x, y),$ мы удовлетворим уравнению (9.4) и, следовательно, обратим $\hat{a}_{11}$ в нуль: $\hat{a}_{11} = 0.$ Если выбрать $\eta = \psi(x, y),$ то и $\hat{a}_{22}$ обратится в нуль: $\hat{a}_{22} = 0.$ Такая ситуация возможна, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и вещественны, то есть в формуле (4.4) подкоренное выражение $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0.$ В тех точках плоскости, где дискриминант больше нуля, уравнение называется принадлежащим к *гиперболическому типу* или просто *гиперболическим*. В новых переменных $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ оно принимает вид

$$U_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta), \tag{4.7}$$

называемый первым каноническим видом для уравнений гиперболического типа.

Если положить $\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}, \beta = \frac{\xi-\eta}{2}$, то $U_\xi = \frac{1}{2}\left(U_\alpha + U_\beta\right), U_\eta = \frac{1}{2}\left(U_\alpha - U_\beta\right),$ $U_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta}\right)$ и мы получим второй канонический вид гиперболического уравнения:

$$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = \bar{\Phi}(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta).$$

Примером уравнения гиперболического типа является рассмотренное в предыдущей лекции уравнение колебаний

$$U_{tt} = a^2U_{xx} + f(x, t).$$

Оно гиперболично в любой точке плоскости $x, t.$

2. При решении уравнения $\hat{a}_{11} = 0$ может оказаться, что в некоторых точках M плоскости и их окрестности $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0.$ Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и вместо двух уравнений (4.5) и (4.6) получится только одно уравнение

$$\xi_x = \lambda(x, y)\xi_y. \tag{4.8}$$

В этом случае уравнение (4.2) называется уравнением *параболического типа* в точках $M.$ Опять выберем $\xi = \varphi(x, y),$ тем самым обратим в нуль $\hat{a}_{11}$ в (4.3), а в качестве $\eta(x, y)$ возьмём любую функцию, лишь бы $J \equiv \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0.$ Воспользуемся теперь формулой

$$\hat{a}_{12}^2 - \hat{a}_{11}\hat{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})J^2.$$

В рассматриваемом случае $(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = 0, \quad \hat{a}_{11} = 0$ при $\xi = \varphi(x, y)$ и любом $\eta(x, y).$

Следовательно, коэффициент $\hat{a}_{12}$ тоже должен обратиться в нуль при $\xi = \varphi(x,y)$ и любом $\eta(x,y)$. Таким образом, уравнение (4.3) после деления на $\hat{a}_{22}$ приводится к виду

$$U_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \tag{4.9}$$

- это канонический вид уравнения параболического типа.

3. Если в некоторых точках M плоскости и их окрестности в окажется, что формуле (4.4) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то уравнение (4.2) называется уравнением *эллиптического типа* в точках M и его приведение к каноническому типу осуществляется аналогично тому, как это делалось в гиперболическом случае. Разница лишь в том, что коэффициенты λ_1 и λ_2 в уравнениях (4.5), (4.6) будут теперь комплексно сопряжёнными. Отсюда следует, что функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – решения уравнений (4.5) и (4.6) – тоже будут комплексно сопряжёнными: $\psi(x,y) = \bar{\varphi}(x,y)$. Чтобы не иметь дела с комплексными переменными ξ и η, которые по-прежнему обращают в нуль и $\hat{a}_{11}$, и $\hat{a}_{12}$, как и в случае получения второго кананического вида гиперболического уравнения, положим

$$\alpha = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2} = \mathrm{Re}\,\varphi, \quad \beta = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2i} = \mathrm{Im}\,\varphi.$$

Получим

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta)$$

- канонический вид уравнения эллиптического типа. Примером уравнения эллиптического типа может служить, например, двумерное уравнение Лапласа:

$$U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = 0.$$

Если коэффициенты a_{ij} в уравнении (4.2) постоянны, то тип уравнения и его канонический вид будет определяться одновременно для всех точек области задания уравнения.

§ 4.2. Дифференциальные уравнения со многими независимыми переменными

Как мы уже говорили, общее уравнение в частных производных второго порядка, линейное относительно старших производных с n независимыми переменными, имеет вид:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n) U_{x_i x_j} + F(x_1, x_2, ..., x_n, U, U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}, ...) = 0. \tag{4.1*}$$

Пусть в уравнении (4.1*) $a_{ij} = \mathrm{const}$. Рассмотрим квадратичную форму $k = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Проводя линейное преобразование (вспомним линейную алгебру!), приведём её к каноническому виду:

$$k(x,x) = x_1^2 + x_2^2 ... + x_k^2 - x_{k+1}^2 - ... - x_r^2,$$

где r – ранг матрицы (a_{ij}). Поэтому уравнение (4.1*) в данном случае всегда приводится к виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_{k+1}^2} - ... - \frac{\partial^2 U}{\partial x_r^2} + F(x_1, x_2, ..., x_n, U, U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}) = 0.$$

Если $r = n = k$, то говорят, что уравнение принадлежит к уравнению *эллиптического типа*.
Если $r = n, k < n$, то уравнение принадлежит к уравнению *гиперболического типа*.
Если $r = n-1, k = n-1$, то уравнение принадлежит к уравнению *параболического типа*.

Если $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)$, то фиксируя точку $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n)$ из области задания дифференциального уравнения и рассматривая значения $a_{ij}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, ..., \overset{\circ}{x}_n) = const$, можно провести классификацию уравнения (4.1*) на эллиптичность, параболичность или гиперболичность в точке.

Вернёмся к рассмотрению уравнения (4.1*). Это уравнение введением новых независимых переменных $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, где $\frac{D(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} \neq 0$, преобразуется в уравнение вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} \hat{a}_{ij} U_{\xi_i \xi_j} + \hat{F}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, U, U_{\xi_1}, U_{\xi_2}, ..., U_{\xi_n}, ...) = 0,$$

причём $\hat{a}_{ij} = \sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{kl} \cdot \alpha_{ki} \cdot \alpha_{lj}$, где $\alpha_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$, что проверяется непосредственным вычислением. Иначе говоря, в каждой точке коэффициенты "главной части" уравнения преобразуются по тому же закону, что и коэффициенты квадратичной формы при переходе к новому базису. Как известно из курса линейной алгебры, для всякой квадратичной формы с матрицей $A = (a_{ij})$ существует линейное преобразование переменных с матрицей $T = (t_{ij})$, приводящее форму к каноническому виду. Таких преобразований может быть несколько, на число положительных и отрицательных и равных нулю коэффициентов, в силу закона инерции квадратичных форм, всегда одно и то же.

Итак, полагая $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \alpha_{ij} = t_{ij}$, то есть выбирая, например, $\xi_j = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij} x_i$, мы получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{a}_{ii} U_{\xi_i \xi_i} + \hat{F}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, U, U_{\xi_1}, U_{\xi_2}, ..., U_{\xi_n}, ...) = 0,$$

а все $\hat{a}_{ij}$, где $i \neq j$, равны нулю. Ясно, что мы получили канонический вид уравнения (4.1); причём, если все $\hat{a}_{ii} \neq 0$ и одного знака, то это - уравнение *эллиптического* типа, если $n-1$ коэффициентов $\hat{a}_{ii}$ - одного знака, а n-ый коэффициент - противоположного, то это - уравнение *гиперболического* типа, если $n-k$ коэффициентов одного знака, а k - противоположного - уравнение *ультрагиперболического* типа и, наконец, если среди $\hat{a}_{ii}$ есть равные нулю, то уравнение *параболического* типа.

Подчеркнём, что преобразование переменных $\xi_j = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij} x_i$ определяется точкой M_0. в другой, даже близкой точке M_1 преобразование переменных, приводящее уравнение к каноническому виду, будет, вообще говоря, другим. Оказывается, что когда число переменных больше двух, в общем случае нельзя указать никакого невырожденного преобразования переменных, которое бы приводило данное линейное уравнение второго порядка к каноническому виду даже в сколь угодно малой области.

ГЛАВА 5

§ 5.1. Колебания бесконечной струны (задача Коши)

Найдём решение уравнения

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = 0 \tag{5.1}$$

свободных колебаний бесконечной струны при $t > 0$ с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u'_t(x,0) = \psi(x)$, когда $-\infty < x < \infty$.

Прежде всего приведём наше уравнение к каноническому виду. В нашем уравнении $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -a^2$, поэтому $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = a^2 > 0$. Следовательно, наше уравнение - это уравнение гиперболического типа. Для того, чтобы найти подходящую замену переменных и привести наше уравнение к каноническому виду, необходимо решить уравнение

$$a^2 (\xi_t)^2 = (\xi_x)^2 .$$

Составим характеристические уравнения:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{1/a}; \frac{dx}{1} = \frac{dt}{-1/a}.$$

Отсюда $dx - adt = 0$; $dx + adt = 0$.

Найдём первые интегралы $x - at = c_1$, $x + at = c_2$ и выберем новые переменные по формулам $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

Легко проверить, что в новых переменных уравнение свободных колебаний струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{5.2}$$

Общее решение этого уравнения: $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$. Возвращаясь к исходным переменным, имеем

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at). \tag{5.3}$$

Здесь $f(x-at)$ и $g(x+at)$ пока произвольные дважды дифференцируемые функции указанных в скобках аргументов. Для того чтобы определить эти функции, используем начальные условия:

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x), \tag{5.4}$$

$$u'_t(x,0) = -af'_x(x) + ag'_x(x) = \psi(x). \tag{5.5}$$

Интегрируя уравнение (5.5) по x, получим

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} \psi(\alpha) d\alpha. \tag{5.6}$$

Таким образом, для определения функций $f(x)$ и $g(x)$ имеем систему двух уравнений (5.4) и (5.6), решая которую, получим

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha) d\alpha\right], \quad g(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha) d\alpha\right].$$

Это означает, что

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)-\frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x-at}\psi(\alpha)d\alpha\right]+\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha\right],$$

или

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha. \tag{5.7}$$

Эта формула называется *формулой Даламбера*.

Видим, что если функция $\varphi(x)$ обладает производной до второго порядка включительно, а функция $\psi(x)$ – производной до первого порядка включительно, то решение задачи Коши существует и оно единственно.

Покажем, что задача Коши для уравнения колебаний является корректной задачей. Для этого надо показать, что полученное решение устойчиво относительно малых изменений начальных условий, то есть малые изменения начальных условий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ приводят к малым изменениям решения $u(x,t)$ при любых конечных значениях $0<t<T$.

Теорема. *Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – решения задачи Коши с начальными условиями*

$$u_1(x,0)=\varphi_1(x),\quad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t}=\psi_1(x),$$
$$u_2(x,0)=\varphi_2(x),\quad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t}=\psi_2(x).$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ и любого фиксированного $t_0>0$ существует $\delta>0$ такое, что из неравенств

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\delta,\quad |\psi_1(x)-\psi_2(x)|<\delta$$

при $-\infty<x<+\infty$, $t\le T$, следует

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\varepsilon.$$

Действительно, используя формулу Даламбера для $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, получим

$$u_1(x,t)-u_2(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)\right]+\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)\right]+$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\left[\psi_1(\alpha)-\psi_2(\alpha)\right]d\alpha.$$

Следовательно,

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\delta\cdot d\alpha=\delta+\delta t\le\delta(1+T)=\varepsilon$$

при $\delta=\frac{\varepsilon}{1+T}$. Тем самым показано, что при указанных условиях, действительно

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\varepsilon,$$

что и утверждалось.

Перейдём к интерпретации полученного решения. Предварительно заметим, что

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha\equiv\Psi(x+at)-\Psi(x-at)$$

и поэтому решение задачи Коши – суперпозиция двух решений исследуемого уравнения:

$$u(x,t)=V_1(x,t)+V_2(x,t),$$

где

$$V_1(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\Psi(x-at)\overset{def}{=}\Phi(x-at),$$
$$V_2(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)-\frac{1}{2a}\Psi(x+at)\overset{def}{=}\hat{\Phi}(x+at),$$

так что структура решения задачи имеет вид

$$u(x,t)=\Phi(x-at)+\hat{\Phi}(x+at).$$

Обратимся сначала к интерпретации решения $V_1(x,t)=\Phi(x-at)$. С этой целью зафиксируем точку x_0 и представим себе, что в момент $t=0$ из этой точки в положительном направлении оси x начинает двигаться наблюдатель со скоростью a. В момент t_1 он будет находиться в точке $x_1 = x_0 + at_1$. Какое отклонение струны от положения равновесия он увидит? Видим: $V_1(x_1, t_1) = \Phi(x_0 + at_1 - at_1) = \Phi(x_0)$ — тот же профиль, что и в точке x_0 в момент времени $t = 0$. Таким образом, начальный профиль $\Phi(x)$ будет двигаться со скоростью a в положительном направлении оси x как жесткая система, не изменяющая своей формы.

Решение $V_1(x, t) = \Phi(x - at)$ называется *прямой бегущей волной.*

Совершенно очевидно, что решение $V_2(x, t) = \hat{\Phi}(x + at)$ можно назвать *обратной бегущей волной,* поскольку профиль $\hat{\Phi}(x)$ бежит со скоростью a вдоль оси x в направлении, обратном положительному направлению.

§ 5.2. Решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве

Найдём решение $u(x, y, z, t)$ волнового уравнения

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{5.8}$$

или, в его полной записи, уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

при $(x, y, z) \in R^3, \quad t \in [0, \infty)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \qquad \left.\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y, z).$$

В электродинамике $a = c$ — скорость света в вакууме, в гидродинамике a - скорость звука.

При решении задачи Коши будем использовать принцип Гюйгенса, который утверждает, что всякая точка при волновом процессе является источником сферической волны. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка пространства, $M'(x', y', z')$ — некоторая точка на фронте сферической волны.

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$v(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{S_r} u(x', y', z', t)dS,$$

где $u(x, y, z, t)$ — дважды дифференцируемая функция, r — фиксированный параметр — радиус сферы $S_r : \begin{cases} x' = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y' = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z' = r\cos\theta. \end{cases}$

Поскольку $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \equiv r^2 d\Omega$, вспомогательную функцию можно переписать в виде

$$v(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{S_r} u(x', y', z', t)d\Omega.$$

Пусть функция $u(x, y, z, t)$ удовлетворяет волновому уравнению (10.8). Проинтегрируем это уравнение по шару T_r — внутренности сферы S_r. Имеем:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint\limits_{T_r} u(x, y, z, t)\cdot dV = \iiint\limits_{T_r} \Delta u(x, y, z, t)\cdot dV. \tag{5.9}$$

Упростим сначала правую часть выражения (5.9):

$$\iiint\limits_{T_r} \Delta u(x, y, z, t)\cdot dV = \iiint\limits_{T_r} div\,(grad\vec{u})\cdot dV =$$

(воспользуемся здесь формулой Остроградского - Гаусса)

$$= \oiint\limits_{S_r} (grad\vec{u}\cdot\vec{n})dS = \oiint\limits_{S_r} \frac{\partial u}{\partial n}\cdot dS =$$

(а здесь мы учтём, что на сфере $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$)

$$= \oiint\limits_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r} \cdot dS = r^2 \oiint\limits_{S_r} \frac{\partial u}{\partial r} \cdot d\Omega = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \underbrace{\oiint\limits_{S_r} u \cdot d\Omega}_{4\pi v} = r^2 \frac{\partial}{\partial r}(4\pi v).$$

Упростим теперь левую часть равенства (5.9):

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\int\limits_{T_r}\int u \cdot dV = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^r r'^2 dr' \oiint\limits_{S_{r'}} u \cdot d\Omega =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\limits_0^r r'^2 dr' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underbrace{\oiint\limits_{S_r} u \cdot d\Omega}_{4\pi v} = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^r r'^2 dr' \frac{\partial^2}{\partial t^2}(4\pi v).$$

В итоге, после упрощений, имеем:

$$r^2 \frac{\partial}{\partial r}(4\pi v) = \frac{1}{a^2}\int\limits_0^r r'^2 dr' \frac{\partial^2}{\partial t^2}(4\pi v).$$

Продифференцируем это равенство по параметру r :

$$\frac{1}{a^2} r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 2r\frac{\partial v}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

Сократив на r, получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 (rv)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2}$$

или

$$a^2 \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 (rv)}{\partial t^2} = 0. \tag{5.10}$$

Решение этого уравнения нам уже известно (см. предыдущий параграф):

$$rv = \Phi(at - r) + \hat{\Phi}(at + r).$$

При $r = 0$ получаем $0 = \Phi(at) + \hat{\Phi}(at)$, то есть $\Phi(at) = -\hat{\Phi}(at)$ и, следовательно,

$$rv = \hat{\Phi}(at + r) - \hat{\Phi}(at - r), \tag{5.11}$$

отсюда следует:

$$v = \frac{\hat{\Phi}(at + r) - \hat{\Phi}(at - r)}{r}. \tag{5.12}$$

В выражении (5.12) перейдём к пределу при $r \to 0$:

$$\lim_{r\to 0} v = \lim_{r\to 0} \frac{\hat{\Phi}(at + r) - \hat{\Phi}(at) + \hat{\Phi}(at) - \hat{\Phi}(at - r)}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\hat{\Phi}(at + r) - \hat{\Phi}(at)}{r} + \lim_{r\to 0} \frac{\hat{\Phi}(at - r) - \hat{\Phi}(at)}{-r} = \hat{\Phi}'(at) + \hat{\Phi}'(at) = 2\hat{\Phi}'(at).$$

С другой стороны, мы можем вычислить этот предел исходя из определения функции v. Используя теорему о среднем, можем записать:

$$v(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{S_r} u(x', y', z', t) dS = \frac{1}{4\pi r^2} u(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot 4\pi r^2 = u(\xi, \eta, \zeta, t).$$

Поэтому $\lim\limits_{r\to 0} v = u(x_0, y_0, z_0, t)$, так как при $r \to 0$ точка на сфере, в которой выполняется теорема о среднем: $M'(\xi, \eta, \zeta) \to M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Таким образом,

$$u(x_0, y_0, z_0, t) = 2\hat{\Phi}'(at). \tag{5.13}$$

Осталось определить $\hat{\Phi}'(at)$. С этой целью продифференцируем (5.11) сначала по r, а потом по t:

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} = \hat{\Phi}'(at+r) + \hat{\Phi}'(at-r),$$

$$\frac{\partial(rv)}{\partial t} = \hat{\Phi}'(at+r)\cdot a - \hat{\Phi}'(at-r)\cdot a.$$

Отсюда:

$$\frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial(rv)}{\partial t} = 2\hat{\Phi}'(at+r).$$

$$\left[\frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial(rv)}{\partial t}\right]\Bigg|_{t=0} = 2\hat{\Phi}'(r). \tag{5.14}$$

Опять воспользуемся выражением

$$v(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi r^2}\oiint\limits_{S_r} u(x', y', z', t)dS.$$

Подставим это выражение в (5.14):

$$\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\oiint\limits_{S_r}\frac{u}{r}dS + \frac{1}{4\pi a}\oiint\limits_{S_r}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{r}dS\right]\Bigg|_{t=0} = 2\hat{\Phi}'(r).$$

Используя начальные условия:

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = \psi(x,y,z)$$

получим

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\oiint\limits_{S_r}\frac{\varphi(x',y',z')}{r}dS + \frac{1}{4\pi a}\oiint\limits_{S_r}\frac{\psi(x',y',z')}{r}dS = 2\hat{\Phi}'(r).$$

Положим в этом равенстве $r = at$, (при этом $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}$). Тогда

$$2\hat{\Phi}'(at) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\oiint\limits_{S_{r=at}}\frac{\varphi(x',y',z')}{at}dS + \frac{1}{4\pi a}\oiint\limits_{S_{r=at}}\frac{\psi(x',y',z')}{at}dS.$$

В силу (5.13)

$$u(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\oiint\limits_{S_{r=at}}\frac{\varphi(x',y',z')}{at}dS + \oiint\limits_{S_{r=at}}\frac{\psi(x',y',z')}{at}dS\right].$$

Поскольку точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ выбиралась совершенно произвольно, то она является текущей точкой пространства и, следовательно, эта формула справедлива в любой точке пространства:

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\oiint\limits_{S_{r=at}}\frac{\varphi(x',y',z')}{at}dS + \oiint\limits_{S_{r=at}}\frac{\psi(x',y',z')}{at}dS\right]. \tag{5.15}$$

Эта формула называется *формулой Пуассона*. Она даёт решение волнового уравнения в пространстве.

ГЛАВА 6

§ 6.1. Решение задачи о свободных колебаниях закреплённой струны методом Фурье

Будем решать уравнение

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = 0 \tag{6.1}$$

колебания конечной струны длины l при условии, что струна закреплена на концах: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ и функция $u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям: $u(x,0) = \varphi(x), u'_t(x,0) = \psi(x)$.

Ранее нами показано, что решение такой задачи единственно. Поэтому мы можем применять любой метод решения, лишь бы полученное решение удовлетворяло нашим граничным и начальным условиям. Для нахождения решения мы применим *метод Фурье,* или *метод разделения переменных.* Его же иногда называют *методом стоячих волн.* Смысл такого названия станет ясен чуть позднее.

Будем искать решение нашей задачи в виде произведения функции, зависящей только от x, на функцию, зависящую только от t :

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t), \tag{6.2}$$

потребовав на первом этапе удовлетворения граничных условий, а затем и выполнения начальных условий. Подставляя это произведение в уравнение (6.1), получим:

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t),$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{6.3}$$

Деление на $X(x) \cdot T(t)$ в данном случае допустимо, поскольку мы ищем нетривиальные решения и, поэтому при $0 < x < l$ и $t > 0$ и $X(x)$, и $T(t)$ отличны от нуля.

Левая и правая части равенства (6.3) зависят от разных переменных, которые могут меняться независимо друг от друга, и поэтому равенство возможно только в том случае, если обе части равны одной постоянной:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = C = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Таким образом, вместо одного дифференциального уравнения в частных производных мы получили два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X''(x) - CX(x) = 0, \tag{6.4}$$

$$T''(t) - a^2 CT(t) = 0. \tag{6.5}$$

Из граничных условий

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0, \quad u(l,t) = X(l) \cdot T(t) = 0$$

следует: $X(0) = X(l) = 0.$

Легко убедиться в том, что если $C > 0$, то при таких граничных условиях решения уравнения (6.4), отличного от нулевого, не существует.

Действительно, пусть $C = +\lambda^2$. Тогда решение уравнения (6.4) имеет вид:

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x},$$

а из граничных условий следует:

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0,$$

$$X(l) = c_1 e^{\lambda l} + c_2 e^{-\lambda l} = 0.$$

Из этих двух условий находим $c_1 = c_2 = 0, \quad X(x) = 0.$

Если $C = 0$, то из (11.4) следует

$$X(x) = c_1 x + c_2,$$

из граничных условий: $c_2 = 0, \quad c_1 l + c_2 = 0$, откуда $c_1 = c_2 = 0, \quad X(x) = 0.$

Пусть теперь $C < 0$. Положим $C = -\lambda^2$, тогда уравнение

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{6.6}$$

имеет общее решение

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

Нулевые граничные условия $X(0) = X(l) = 0$ дают $c_1 = 0$, $c_2 \sin \lambda l = 0$. Поскольку уже нельзя полагать c_2 равным нулю, положим $\sin \lambda l = 0$, то есть $\lambda_k l = \pi k$, $k = 1, 2, 3, ...$, или $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$. Соответствующие каждому λ_k частные решения имеют вид:

$$X_k(x) = c_k \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Таким образом, уравнение (6.6) для $X(x)$ с нулевыми граничными условиями имеет нетривиальные решения не для всех λ, а только при некоторых значениях $\lambda = \lambda_k$, определяемых граничными условиями.

Этот результат не случаен. Уравнение (6.6) с нулевыми граничными условиями является частным случаем более общей краевой задачи, которая называется *задачей Штурма - Лиувилля*.

Эта задача заключается в нахождении нетривиальных решений однородного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющих определённым граничным условиям. Оказывается, что такая задача имеет решения не при всех, а только при определённых значениях параметра λ, входящего в данное дифференциальное уравнение.

Значения параметра λ, при которых эта задача имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а вся их совокупность — *спектром* этой задачи, соответствующие им нетривиальные решения — *собственными функциями* краевой задачи на собственные значения.

Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля обладают рядом замечательных свойств, которые широко используются не только при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, но и при решении краевых задач уравнений в частных производных.

Имеют место следующие свойства собственных значений и собственных функций этой краевой задачи.

1. Существует бесконечное счётное множество $\{\lambda_k\}$ собственных значений и соответствующая им бесконечная последовательность $\{y_k(x)\}$ собственных функций,

2. Каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция.

3. В случае граничных условий $y(x_0) = y(x_1) = 0$ и при выполнении условия $q \geq 0$ все собственные значения краевой задачи положительны: $\lambda_k > 0$.

4. Собственные функции $y_k(x)$ образуют на $[x_0, x_1]$ ортогональную с весом $\rho(x)$ систему $\{y_n(x)\}$:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} y_n(x)\, y_m(x)\, \rho(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n.$$

Более подробные сведения о краевых задачах и задаче Штурма-Лиувилля приведены ниже в приложении I.

Соответственно, числа $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$ естественно называть *собственными значениями* рассматриваемой краевой задачи, а всю их совокупность — *спектром* этой задачи. Соответствующие частные решения

$$X_k(x) = c_k \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

это — *собственные функции* поставленной краевой задачи, обладающие свойством ортогональности с весовой функцией $\rho(x) = 1$. Уравнение (6.5) для $T(t)$, отвечающие собственному значению λ_k,

$$T''(t) + \lambda_k \cdot a^2 T(t) = 0$$

имеет решение

$$T_k(t) = A_k \cos a\lambda_k t + B_k \sin a\lambda_k t = A_k \cos \frac{a\pi k}{l} t + B_k \sin \frac{a\pi k}{l} t,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Таким образом, частные решения уравнения

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = 0,$$

удовлетворяющие только граничным условиям $u(0,t) = 0,\quad u(l,t) = 0,$ представимы в виде:

$$u_k(x,t) = X_k(x) \cdot T_k(t) = \sin \frac{\pi k}{l} x \left(\alpha_k \cos \frac{a\pi k}{l} t + \beta_k \sin \frac{a\pi k}{l} t \right).$$

При каждом $k = 1, 2, 3, ...$ каждая такая функция, а также сумма любого числа таких функций, в силу линейности уравнения и граничных условий, тоже является решением этого уравнения.

Рассмотрим бесконечную сумму решений

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{a\pi k}{l} t + \beta_k \sin \frac{a\pi k}{l} t \right) \cdot \sin \frac{\pi k}{l} x \tag{6.7}$$

и убедимся в том, что коэффициенты α_k и β_k можно единственным образом подобрать так, чтобы выполнялись начальные условия $u(x,0) = \varphi(x)$ и $u'_t(x,0) = \psi(x)$.

Из первого граничного условия имеем:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \sin \frac{\pi k}{l} x = \varphi(x), \tag{6.8}$$

из второго:

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot \frac{a\pi k}{l} \cdot \sin \frac{\pi k}{l} x = \psi(x). \tag{11.9}$$

Предположим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются кусочно-гладкими и запишем их разложение в ряд Фурье на интервале $x \in [0,l]$ по синусам:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot \sin \frac{\pi k}{l} x, \qquad \varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi k}{l} \xi d\xi, \tag{6.10}$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cdot \sin \frac{\pi k}{l} x, \qquad \psi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi k}{l} \xi d\xi, \tag{6.11}$$

Сравнивая (6.8) с (6.10) и (6.9) с (6.11), видим, что для выполнения начальных условий необходимо положить $\alpha_k = \varphi_k,\quad \beta_k = \frac{l}{a\pi k} \cdot \psi_k,$ или

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi k}{l} \xi d\xi, \quad \beta_k = \frac{2}{a\pi k} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi k}{l} \xi d\xi.$$

Подставляя полученные значения коэффициентов α_k, и β_k в формулу (6.7), находим функцию $u(x,t)$.

Полученное решение не содержит никаких произвольных постоянных или произвольных функций, а определяется только заданными начальными условиями и, следовательно, является единственным решением.

Исследуем физический смысл полученного решения $u_k(x,t)$. Для этого перепишем его в виде

$$u_k(x,t) = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \cdot \sin \frac{\pi k}{l} x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}} \cos \frac{a\pi k}{l} t + \frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}} \sin \frac{a\pi k}{l} t \right).$$

Обозначим

$$\sin \theta_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}, \quad \cos \theta_k = \frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}},$$

$$\omega_k = \frac{a\pi k}{l}, \quad A_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \cdot \sin\frac{\pi k}{l} x.$$

В этих обозначениях решение примет вид

$$u_k(x,t) = A_k \sin\left(\omega_k t + \theta_k\right). \tag{6.12}$$

Теперь смысл нашего решения ясен: каждая точка струны x_0 совершает в этом случае гармонические колебания с амплитудой

$$A_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \cdot \sin\frac{\pi k}{l} x$$

и частотой

$$\omega_k = \frac{a\pi k}{l}.$$

Движение струны, описываемое такой функцией, называется *собственным колебанием* или *стоячей волной*. При $x_0 = \frac{l}{k}$ амплитуда колебаний равна нулю; такие точки струны называются *узлами*. При $x_0 = \frac{l}{2k}$ амплитуда достигает своего наибольшего значения, и мы получаем *пучность* стоячей волны.

Наименьшая собственная частота $\omega_1 = \frac{a\pi}{l}$ является частотой самого низкого тона струны. Очевидно, что она тем выше, чем короче струна и чем больше натяжение T струны, поскольку $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, ρ — плотность струны.

Колебания струны, определяемые формулой (6.7), являются суперпозицией всех стоячих волн:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\omega_k t + \theta_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{_k}(x,t). \tag{6.13}$$

Формула (6.13) — это общее решение задачи о свободных поперечных колебаниях конечной струны длины l, при условии, что струна закреплена на концах: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, в начальный момент времени отклонение точек струны от положения равновесия описывается функцией $u(x,0) = \varphi(x)$, и каждой точке струны в начальный момент времени придана скорость $u_t'(x,0) = \psi(x)$.

§ 6.2. Решение задачи о вынужденных колебаниях струны с закреплёнными концами

Если на струну действуют внешние силы, то её колебания описываются уравнением

$$u_{tt}''(x,t) - a^2 u_{xx}''(x,t) = f(x,t), \tag{6.14}$$

Пусть, как и в предыдущем параграфе, концы струны закреплены: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, а начальные условия имеют вид: $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t'(x,0) = \psi(x)$. Для решения задачи применим метод Фурье, или метод стоячих волн. В качестве стоячих волн выберем

$$u_k(x,t) = T_k(t) \cdot \sin\frac{\pi k}{l} x,$$

где $T_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ — неизвестные пока функции. Видно, что каждое такое $u_k(x,t)$ удовлетворяет нашим граничным условиям. Решение будем искать в виде суперпозиции стоячих волн.

Рассмотрим функцию

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \sin\frac{\pi k}{l} x$$

и подставим эту функцию в уравнение (6.14). Получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 T_k(t) + T_k''(t) \right] \cdot \sin\frac{\pi k}{l} x = f(x,t).$$

Разложим сейчас функцию $f(x,t)$ в интервале $x \in [0,l]$ в ряд Фурье по синусам, считая переменную t параметром:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cdot \sin\frac{\pi k}{l} x, \quad f_k(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(\xi,t) \sin\frac{\pi k}{l} \xi d\xi,$$

После этого наше уравнение эквивалентно следующему:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 T_k(t)+T_k''(t)\right]\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x.$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих синусах, получим:

$$T_k''(t)+\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 T_k(t)=f_k(t). \tag{6.15}$$

Таким образом, для того, чтобы найти неизвестные функции $T_k(t)$, необходимо решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (6.15), методы решения которого хорошо известны. Общее решение такого уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\overset{(0)}{\underset{k}{T}}{}''(t)+\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 \overset{(0)}{\underset{k}{T}}(t)=0 \tag{6.16}$$

и какого-нибудь частного решения $\gamma_k(t)$ неоднородного.

Решение однородного уравнения хорошо известно:

$$\overset{(0)}{\underset{k}{T}}(t)=\alpha_k\cos\frac{a\pi k}{l}t+\beta_k\sin\frac{a\pi k}{l}t,$$

где α_k и β_k – произвольные постоянные. Таким образом, общее решение уравнения (6.15) имеет вид:

$$T_k(t)=\left(\alpha_k\cos\frac{a\pi k}{l}t+\beta_k\sin\frac{a\pi k}{l}t\right)+\gamma_k(t),$$

тогда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\alpha_k\cos\frac{a\pi k}{l}t+\beta_k\sin\frac{a\pi k}{l}t\right)+\gamma_k(t)\right]\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x$$

или

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos\frac{a\pi k}{l}t+\beta_k\sin\frac{a\pi k}{l}t\right)\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{6.17}$$

Для определения произвольных постоянных воспользуемся, как и раньше, начальными условиями и разложим $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды Фурье по синусам:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x,\quad \varphi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi k}{l}\xi d\xi,$$

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x,\quad \psi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\pi k}{l}\xi d\xi.$$

Сравнивая коэффициенты в формулах

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x=\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x,$$

$$u_t'(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k'(0)\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x=\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x,$$

получим:

$$T_k(0)=\alpha_k+\gamma_k(0)=\varphi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi k}{l}\xi d\xi,$$

$$T_k'(0)=\frac{a\pi k}{l}\cdot\beta_k+\gamma_k'(0)=\psi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\pi k}{l}\xi d\xi,$$

откуда без труда найдём искомые коэффициенты α_k и β_k.

Формула (6.17) с найденными выше коэффициентами α_k и β_k однозначно определяют решение задачи о вынужденных колебаниях струны с закреплёнными концами. Очевидно, что это решение состоит из двух частей: первая часть отвечает за свободные колебания струны, вторая это колебания, вызванные вынуждающей силой.

Из общих соображений ясно, что свободные колебания это достаточно быстро затухающие вследствие рассеяния энергии колебания, и через определённый промежуток времени их влияние станет пренебрежимо мало, тогда как вынужденные колебания будут продолжаться до тех пор, пока действует вынуждающая сила.

Процессами диссипации энергии или процессами, которые происходят со струной, если частота воздействия вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебания струны, то есть резонансными процессами, мы пока заниматься не будем.

§ 6.3. Решение задачи о вынужденных колебаниях струны с незакреплёнными концами

В этом параграфе рассмотрим решение первой краевой задачи: необходимо найти решение уравнения

$$u''_{tt}(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = f(x,t),$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0) = \varphi(x)$, $u'_t(x,0) = \psi(x)$ и ненулевым граничным граничным условиям: $u(0,t) = \lambda_1(t)$, $u(l,t) = \lambda_2(t)$.

Иначе говоря, нам необходимо найти общее решение задачи о вынужденных поперечных колебаниях конечной струны длины l, при условии, что в начальный момент времени отклонение точек струны от положения равновесия описывается функцией $u(x,0) = \varphi(x)$, каждой точке струны в начальный момент времени придана скорость $u'_t(x,0) = \psi(x)$, а концы струны двигаются по заданным законам: $u(0,t) = \lambda_1(t)$, $u(l,t) = \lambda_2(t)$.

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию:

$$v(x,t) = u(x,t) - \lambda_1(t) + \frac{x}{l}\left[\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\right].$$

Легко проверяется, что новая функция удовлетворяет уравнению

$$v''_{tt}(x,t) - a^2 v''_{xx}(x,t) = F(x,t),$$

где

$$F(x,t) = f(x,t) - \lambda''_1(t) - \frac{x}{l}\left[\lambda''_1(t) - \lambda''_2(t)\right]$$

(функции $\lambda_1(t)$, и $\lambda_2(t)$ предполагаются дважды дифференцируемыми), нулевым граничным условиям

$$v(0,t) = v(l,t) = 0,$$

и начальным условиям вида

$$v(x,0) = \varphi(x) - \lambda_1(0) + \frac{x}{l}\left[\lambda_1(0) - \lambda_2(0)\right] \equiv \varphi_1(x),$$

$$v'_t(x,0) = \psi(x,0) - \lambda'_1(0) + \frac{x}{l}\left[\lambda'_1(0) - \lambda'_2(0)\right] \equiv \psi_1(x).$$

Таким образом, первая краевая задача общего вида для уравнения колебания струны приводится к уже рассмотренной нами выше задаче с нулевыми граничными условиями.

ГЛАВА 7

§ 7.1. Колебания прямоугольной мембраны

Метод разделения переменных может применяться при решении первой краевой задачи для уравнения колебаний не только в одномерном случае. Рассмотрим малые колебания однородной прямоугольной мембраны со сторонами $l \times m$, закреплёной по контуру. Свободные колебания такой мембраны описываются уравнением

$$u''_{tt} - a^2\left(u''_{xx} + u''_{yy}\right) = 0. \qquad (7.1)$$

Начальные условия имеют вид:

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u'_t(x,y,0) = \psi(x,y), \qquad (7.2)$$

а закрепление мембраны на границе означает, что

$$u(0,y,t)=u(l,y,t)=u(x,0,t)=u(x,m,t)=0. \tag{7.3}$$

Решение задачи будем искать в виде:

$$u(x,y,t)=X(x)\cdot Y(y)\cdot T(t). \tag{7.4}$$

Условия закрепления на границе дают:

$$X(0)=X(l)=0, \quad Y(0)=Y(m)=0. \tag{7.5}$$

Подставляя (7.4) в уравнение колебаний мембраны и выполняя деление на произведение $X(x)\cdot Y(y)\cdot T(t)$, имеем:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\left(\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}\right).$$

Как и в одномерном случае, обе части этого равенства, а также каждое из отношений $X''(x)/X(x)$ и $Y''(y)/Y(y)$ могут быть только постоянными величинами, причём отрицательными (в противном случае опять получаются нулевые решения).

Обозначим

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\mu^2.$$

Решая эти последние уравнения при условиях (7.5), находим:

$$X_k(x)=c_k\sin\lambda_k x, \quad \lambda_k=\frac{k\pi}{l}, \quad k=1,2,3,...,$$

$$Y_n(y)=\hat{c}_n\sin\mu_n y, \quad \mu_n=\frac{n\pi}{m}, \quad n=1,2,3,....$$

Уравнение для $T(t)$ принимает вид:

$$T''(t)+a^2\left(\lambda_k^2+\mu_n^2\right)T(t)=0,$$

или

$$T''(t)+\pi^2a^2\left(\frac{k^2}{l^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)T(t)=0.$$

Решение этого уравнения обозначим функцией $T_{kn}(t)$ с двумя индексами

$$T_{kn}(t)=A_{kn}\cos\omega_{kn}t+B_{kn}\sin\omega_{kn},t,$$

где $\omega_{kn}=\pi a\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{n^2}{m^2}}$ – собственные частоты колебаний мембраны. Итак, каждой паре положительных чисел k и n соответствует функция

$$u_{kn}(x,y,t)=(\alpha_{kn}\cos\omega_{kn}t+\beta_{kn}\sin\omega_{kn}t)\cdot\sin\lambda_k x\cdot\sin\mu_n y,$$

удовлетворяющая уравнению колебаний мембраны и граничным условиям. Решение, удовлетворяющее начальным условиям, будем опять искать в виде ряда

$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{kn}\cos\omega_{kn}t+\beta_{kn}\sin\omega_{kn}t)\cdot\sin\lambda_k x\cdot\sin\mu_n y. \tag{7.6}$$

Выполнение начальных условий означает, что

$$u(x,y,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{kn}\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{m}y=\varphi(x,y),$$

$$u_t'(x,y,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{kn}\beta_{kn}\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{m}y=\psi(x,y).$$

Эти формулы представляют собой разложение начальных функций в так называемые двойные ряды Фурье по синусам. Разложение в двойные ряды функций двух переменных совершенно аналогично разложению в обычный ряд Фурье функции одной переменной. Коэффициенты Фурье двойного ряда вычисляются по формулам:

$$\alpha_{kn} = \frac{4}{ml} \int\limits_0^l \int\limits_0^m \varphi(\xi, \eta) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}\xi \cdot \sin \frac{n\pi}{m}\eta \cdot d\xi \cdot d\eta,$$

$$\beta_{kn} = \frac{1}{\omega_{kn}} \cdot \frac{4}{ml} \int\limits_0^l \int\limits_0^m \psi(\xi, \eta) \cdot \sin \frac{k\pi}{l}\xi \cdot \sin \frac{n\pi}{m}\eta \cdot d\xi \cdot d\eta.$$

Подставляя вычисленные коэффициенты α_{kn} и β_{kn} в (7.6) и предполагая, что условия равномерной сходимости и дифференцируемости дважды по x и дважды по y ряда (7.6) выполнены, получаем решение первой краевой задачи для уравнений колебаний прямоугольной мембраны.

§ 7.2. Колебания круглой мембраны

Метод разделения переменных при решении первой краевой задачи для уравнения колебаний можно применять, как мы видели выше, не только в одномерном случае. Сейчас мы применим этот метод для изучения колебаний круглой мембраны, закреплённой на границе и имеющей радиус b. Будем считать, что начало координат расположено в центре мембраны.

Свободные колебания мембраны, как мы знаем, описываются уравнением

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{xx} + u_{yy}\right).$$

Перейдём в полярную систему координат $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ в этом уравнении:

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}\right). \tag{7.7}$$

Первую краевую задачу для круглой мембраны будем решать в предположении, что колебания осесимметричны, то есть функция u не зависит от φ : $u = u(t, r)$. Тогда в правой части уравнения (7.7) исчезнет последнее слагаемое, условие закрепления мембраны на границе $r = b$ примет вид

$$u(t, r)|_{r=b} = 0, \tag{7.8}$$

а начальные условия:

$$u(0, r) = f(r), \quad u'_t(0, r) = g(r). \tag{7.9}$$

Уравнение

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right). \tag{7.10}$$

с граничным условием (7.8) и начальными условиями (7.9) будем решать методом разделения переменных: пусть $u(t, r) = T(t) \cdot R(r)$. Подставляя это произведение в уравнение (7.10) и разделяя переменные, имеем:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{R''_{rr}(r) + \frac{1}{r}R'_r(r)}{R(r)} = -\lambda^2.$$

Знак минус у постоянной λ^2 можно объяснить, например, требованием ограниченности и периодичности по переменной t, что вытекает из физического смысла задачи.

Уравнение для $R(r)$:

$$R''_{rr}(r) + \frac{1}{r}R'_r(r) + \lambda^2 R(r) = 0$$

заменой $\lambda r = \rho$ приводится к уравнению:

$$R''_{\rho\rho}(\rho) + \frac{1}{\rho}R'_\rho(\rho) + R(\rho) = 0. \tag{7.11}$$

Нетрудно видеть, что — это уравнение Бесселя. Действительно, уравнение Бесселя в общем случае имеет вид:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Достаточно положить здесь $\nu = 0$, и мы, с точностью до переобозначений, получим уравнение (7.11).

Сведения о специальных функциях приведены ниже в приложении II.

Решение уравнения (7.11) $R(\rho) = J_0(\rho) = J_0(\lambda r)$ должно обращаться в нуль при $r = b$. Равенство $J_0(\lambda b) = 0$ означает, что λb - один из нулей μ_k функции Бесселя J_0, то есть $\lambda_k b = \mu_k$, или $\lambda_k = \mu_k / b$. (Сравните со случаем уравнения колебания струны, там $\lambda = \lambda_k = {}^{k\pi}/_{l}$, где $k\pi$ - нули функции $\sin x$; l соответствует b).

Подставим найденные значения λ_k в уравнение для $T(t)$:

$$T''(t) + a^2\lambda_k T(t) = 0.$$

Отсюда

$$T_k(t) = \alpha_k \cos\lambda_k at + \beta_k \sin\lambda_k at.$$

Функция

$$u_k(t,r) = (\alpha_k \cos\lambda_k at + \beta_k \sin\lambda_k at)\cdot J_0(\lambda_k r), \quad k = 1, 2, 3, ...$$

удовлетворяет уравнению (7.11) и граничным условиям (7.8). Составим ряд

$$u(t,r) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t,r) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos\lambda_k at + \beta_k \sin\lambda_k at)\cdot J_0(\lambda_k r)$$

и подберём коэффициенты α_k и β_k так, чтобы выполнялись начальные условия (7.9):

$$u(0,r) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot J_0(\lambda_k r) = f(r),$$

$$u'_t(0,r) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot \lambda_k a \cdot J_0(\lambda r) = g(r).$$

Мы знаем, что функции Бесселя $J_\nu(\mu_k x)$ обладают свойством ортогональности на промежутке $(0,\ 1)$ с весом $\rho(x) = x$, и что ортогональность функций Бесселя позволяет произвольную функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0,\ 1)$, представить функциональным рядом

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\nu(\mu_i x),$$

где

$$a_i = \frac{2}{J^2_{\nu+1}(\mu_j)} \int_0^1 x f(x) J_\nu(\mu_i x) dx.$$

Этот ряд, как известно, называется рядом Фурье - Бесселя функции $f(x)$.

Используя эти формулы, разложим функции $f(r)$ и $g(r)$ в ряд Фурье - Бесселя и, сравнивая коэффициенты при $J_0(\mu_k x)$, найдём коэффициенты α_k и β_k :

$$\alpha_k = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 x \cdot J_0(\mu_k x) \cdot f(bx) dx,$$

$$\beta_k = \frac{2b}{a\mu_k J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 x \cdot J_0(\mu_k x) \cdot g(bx) dx,$$

здесь через x обозначено отношение ${}^{r}/_{b}$.

ГЛАВА 8

§ 8.1. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности без источников

Рассмотрим однородное уравнение теплопроводности

$$U_t'(x,t) = a^2 U_{xx}''(x,t), \quad x \in (0,l), \tag{8.1}$$

с нулевыми граничными условиями $U(0,t) = U(l,t) = 0$ и начальным условием $U(x,0) = \varphi(x)$. Как и уравнение колебаний, эту однородную задачу будем решать методом разделения переменных.

Пусть $U(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Тогда уравнение (8.1) примет вид

$$X(x) \cdot T_t'(t) = a^2 X_{xx}''(x,t) \cdot T(t),$$

или

$$\frac{1}{a^2} \frac{T_t'(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}''(x,t)}{X(x)}.$$

Опять эти отношения, зависящие от разных независимых переменных, могут быть равны друг другу только в том случае, если они равны постоянной, и опять только отрицательной. В противном случае из $X(0) = X(l) = 0$ следует $X(x) \equiv 0$. Итак,

$$\frac{X_{xx}''(x,t)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Полностью повторяя вычисления, приведённые в первом параграфе лекции 6, получим

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad k = 1,2,3,... \tag{8.2}$$

Для функции $T(t)$ имеем уравнение первого порядка

$$T_t'(t) + a^2 T(t) = 0,$$

его решение:

$$T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}, \quad k = 1,2,3... \, . \tag{8.3}$$

Функция

$$U_k(x,t) = A_k \cdot C_k \cdot e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \equiv \alpha_k \cdot e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x$$

и любая сумма таких функций

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \tag{8.4}$$

является решением однородного уравнения, удовлетворяющим нулевым граничным условиям.

Потребуем, чтобы это решение удовлетворяло и начальному условию

$$U(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x = \varphi(x).$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ является кусочно-гладкой функцией и запишем её разложение в ряд Фурье на интервале $x \in [0,l]$ по синусам:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot \sin \frac{\pi k}{l} x, \qquad \varphi_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi k}{l} \xi d\xi,$$

Сравнивая, видим, что для выполнения начального условия необходимо положить $\alpha_k = \varphi_k$, или

$$\alpha_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi k}{l} \xi d\xi.$$

Подставляя полученное значение α_k в формулу (13.4), найдём искомую функцию $U(x,t)$.

Полученное решение не содержит никаких произвольных постоянных или произвольных функций, а определяется только заданными начальными условиями и является единственным решением.

§ 8.2. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности с источниками

Рассмотрим сейчас решение неоднородного уравнения теплопроводности

$$U'_t(x,t) = a^2 U''_{xx}(x,t) + F(x,t) \tag{8.5}$$

с начальным условием $U(x,0) = \varphi(x)$ и неоднородными граничными условиями $U(0,t) = \lambda_1(t)$, $U(0,t) = \lambda_2(t)$.

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$V(x,t) = U(x,t) - \lambda_1(t) - \frac{x}{l}\left(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)\right).$$

Эта вспомогательная функция должна удовлетворять уравнению

$$V'_t(x,t) + \dot{\lambda}_1(t) + \frac{x}{l}\left(\dot{\lambda}_2(t) - \dot{\lambda}_1(t)\right) = a^2 V''_{xx}(x,t) + F(x,t),$$

или, в эквивалентном виде,

$$V'_t(x,t) = a^2 V''_{xx}(x,t) + \tilde{F}(x,t), \tag{8.6}$$

где

$$\tilde{F}(x,t) \stackrel{def}{=} F(x,t) - \dot{\lambda}_1(t) - \frac{x}{l}\left(\dot{\lambda}_2(t) - \dot{\lambda}_1(t)\right).$$

Начальные условия для вспомогательной функции $V(x,t)$ выглядят так:

$$V(x,0) + \lambda_1(0) + \frac{x}{l}\left(\lambda_2(0) - \lambda_1(0)\right) = \varphi(x)$$

или, эквивалентно,

$$V(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \tag{8.7}$$

где

$$\tilde{\varphi}(x) \stackrel{def}{=} \varphi(x) - \lambda_1(0) - \frac{x}{l}\left(\lambda_2(0) - \lambda_1(0)\right).$$

Легко видеть, что граничные условия для функции $V(x,t)$ имеют вид

$$V(0,t) = V(l,t) = 0. \tag{8.8}$$

Таким образом, нам необходимо решить неоднородное уравнение теплопроводности (8.6) с начальным условием (8.7) и с однородными граничными условиями (8.8).

Решение этой задачи будем искать в виде

$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{8.9}$$

где $T_k(t)$ — неизвестные функции. Граничные условия для решения такого вида, очевидно, удовлетворены. Подставив (8.9) в уравнение (8.6), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T'_k(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t)\right) \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x = \tilde{F}(x,t). \tag{8.10}$$

Разложим функцию $\tilde{F}(x,t)$ в ряд Фурье по синусам по переменной x в интервале $(0,l)$ и, считая переменную t параметром, получим:

$$\tilde{F}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

где

$$\gamma_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \tilde{F}(x,t) \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x dx.$$

Подставим это разложение в уравнение (8.10) и приравнивая коэффициенты при соответствующих синусах, получим уравнение первого порядка для функций $T_k(t)$:

$$T'_k(t) + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) = \gamma_k(t). \tag{8.11}$$

Уравнение (8.11) - это обыкновенное линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Как хорошо известно, решение такого уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, существует и оно единственно.

Выполнение начального условия (8.7) означает, что

$$V(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(0)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x=\tilde{\varphi}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\varphi}_k\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

то есть

$$T_k(0)=\tilde{\varphi}_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\tilde{\varphi}(\xi)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi. \tag{8.12}$$

Таким образом, для нахождения неизвестных функций $T_k(t)$ необходимо решить уравнения (8.11) с начальными условиями (8.12). Подставив найденное решение в (8.9), найдём вспомогательную функцию $V(x,t)$, а затем и искомую функцию $U(x,t)$.

§ 8.3. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности

Требуется найти решение $U(x,t)$ при $x\in(-\infty,+\infty)$, $t>0$ однородного уравнения теплопроводности

$$U'_t(x,t)=a^2U''_{xx}(x,t)$$

с начальными условиями $U(x,0)=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – непрерывная и ограниченная функция, при условии, что внутренние источники тепла в стержне отсутствуют.

Физический смысл такой задачи – найти распределение тепла в бесконечно длинном стержне. Практически, бесконечно длинных стержней не существует, но если процесс распространения температуры рассматривать в достаточно короткий промежуток времени, когда граничные условия ещё не успевают сказаться, то такая задача имеет смысл.

Задачу решаем методом разделения переменных: $U(x,t)=X(x)\cdot T(t)$. Тогда уравнение теплопроводности приобретает вид

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'_t(t)}{T(t)}=\frac{X''_{xx}(x,t)}{X(x)}=C,$$

где $C=$ const.

Видим, что предположения $C\geq 0$ отпадают сразу, поскольку они противоречат физическому смыслу задачи. Действительно, в этом случае решение уравнения

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'_t(t)}{T(t)}=C$$

имеет вид

$$T(t)=Ke^{Ca^2t}.$$

При $C>0$ температура со временем растёт до бесконечности, то есть при $t\to\infty$, $T(t)\to\infty$, а при $C=0$ получаем, что $T(t)=const$, $X(x)=c_1x+c_2$, температура со временем не меняется, а начальное условие $U(x,0)=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ ограничена при любых значениях x, не может быть выполнено.

Остаётся рассмотреть случай $C<0$. Положим $C=-\lambda^2$. Тогда

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x,\quad T(t)=De^{-\lambda^2a^2t},$$

где A,B,D постоянные, зависящие, вообще говоря, от λ. Тем самым, имеем континуум решений нашего уравнения:

$$U_\lambda(x,t)=e^{-\lambda^2a^2t}\cdot\left[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\sin\lambda x\right],$$

где $0\leq\lambda<\infty$.

Определим суперпозицию всех этих решений:

$$U(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U_\lambda(x,t)d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cdot\left[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda. \tag{8.13}$$

При условии двукратной дифференцируемости и равномерной сходимости этого несобственного интеграла, зависящего от двух параметров, построенная таким образом функция $U(x,t)$ также удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности.

Полученное решение должно удовлетворять начальному условию $U(x,0)=\varphi(x)$, то есть

$$\varphi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda.$$

Функцию $\varphi(x)$ представим интегралом Фурье.

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\right)\cos\lambda x+\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right)\sin\lambda x\right]d\lambda.$$

Сравнивая, видим, что

$$\alpha(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi,\quad \beta(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi.$$

Подставляя найденные значения $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ в (8.13), получим окончательный вид решения задачи Коши:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-\lambda^2a^2t}\cdot\cos\lambda(\xi-x)d\xi. \tag{8.14}$$

Поскольку при замене λ на $-\lambda$ в этом решении ничего не изменится, в ряде случаев бывает удобно решение записать в эквивалентном виде:

$$U(x,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-\lambda^2a^2t}\cdot\cos\lambda(\xi-x)d\xi. \tag{8.15}$$

Предположим, что порядок интегрирования можно менять. Тогда

$$U(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cdot\cos\lambda(\xi-x)d\lambda\right]d\xi\equiv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G(x,t,\xi)d\xi,$$

здесь

$$G(x,t,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cdot\cos\lambda(\xi-x)d\lambda.$$

Это — несобственный интеграл, зависящий от параметра. Из курса математического анализа известно, что этот интеграл берётся, его значение равно

$$G(x,t,\xi)=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

Окончательно имеем:

$$U(x,t)=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{1}{\pi t}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \tag{8.16}$$

Эта формула называется *формулой Пуассона*.

Формула Пуассона получена при целом ряде допущений, типа двукратной дифференцируемости (8.13), независимости от порядка интегрирования (8.14) и так далее. Вместо обоснования этих допущений рассмотрим формулу (8.16) и покажем, что она даёт решение задачи.

Легко проверить, что (8.16), а также интегралы, полученные из него дифференцированием по x и t, повторенным сколько угодно раз, сходятся равномерно в окрестности любой точки (x,t), если $t>0$. Это означает, что мы имеем право заносить знак дифференцирования под интеграл. А так как подинтегральная функция при $t>0$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности, то отсюда следует, что при $t>0$ и сама функция $U(x,t)$ из (8.16) удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности.

Функция $G(x,t,\xi)$ называется *функцией источника* для одномерного уравнения или *функцией Грина*. Функция источника имеет важный физический смысл. Чтобы его раскрыть, запишем решение задачи Коши со следующим начальным распределением температуры:

$$\varphi(x)=\begin{cases} \frac{1}{2h}, & |x-x_0|<h. \\ 0, & x\notin(x_0-h,x_0+h) \end{cases} \tag{8.17}$$

Заметим, что каково бы ни было h, всегда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi=\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h}\frac{1}{2h}d\xi=\frac{1}{2h}\ \xi|_{x_0-h}^{x_0+h}=1.$$

При $h\to 0$, $\varphi(x)\to\infty$, но, тем не менее, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi=1.$

В силу теоремы о среднем, имеем:

$$U(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G(x,t,\xi)d\xi=\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h}\frac{1}{2h}G(x,t,\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2h}G(x,t,\xi^*)2h=G(x,t,\xi^*),$$

где $\xi^*\in(x_0-h,x_0+h)$. Рассмотрим

$$\lim_{h\to 0}U(x,t)=\lim_{\xi^*\to x_0}G(x,t,\xi^*)=G(x,t,x_0). \tag{8.18}$$

Таким образом, в исследуемом случае $U(x,t)=G(x,t,x_0)$. Это означает, что функция Грина представляет собою распределение температуры в стержне при $t>0$, если в начальный момент времени $t=0$ в точке x_0 имелся бесконечный пик температуры.

Приведённое выше в формуле (8.18) распределение температуры в бесконечном стержне обеспечивается так называемой *дельта-функцией Дирака*, которая определяется соотношениями

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases} 0, & x\neq x_0, \\ \infty, & x=x_0, \end{cases}$$

так, что

$$\int\limits_a^b\delta(x-x_0)dx=1,\quad a<x_0<b. \tag{8.19}$$

Определение и некоторые свойства дельта-функции Дирака будут рассмотрены нами в главе 13 при изучении теории обобщённых функций.

Из этого определения сразу следует основное свойство δ -функции:

$$\int\limits_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0),\quad a<x_0<b. \tag{8.20}$$

где $f(x)$ - произвольная непрерывная функция.

Действительно, благодаря свойствам δ -функции в интеграле (8.20) играет роль лишь окрестность точки x_0. Тогда функцию $f(x)$ можно в точке x_0 вынести за знак интеграла, а оставшийся интеграл в силу (8.19) равен единице.

Область интегрирования в (8.20) должна включать точку x_0, иначе интеграл обращается в нуль:

$$\int\limits_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx=0,\quad \begin{cases} x_0>b, \\ x_0<a. \end{cases}$$

δ - функция не может входить ни в какие окончательные выражения. Всегда, когда пишется δ - функция, имеется в виду в дальнейшем интегрирование по тем переменным, от которых она зависит.

δ - функция может быть определена и как обобщённая производная от некоторой разрывной функции $\varepsilon(x)$:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varepsilon'(x) = 0$ при $x \neq 0$. Нетрудно показать, что имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad a < 0 < b.$$

Действительно,

$$\int_a^b f(x)\varepsilon'(x)dx = f(x)\varepsilon(x)|_a^b - \int_a^b \varepsilon(x)f'(x)dx = f(b) - \int_0^b f'(x)dx = f(0).$$

Следовательно, $\varepsilon'(x) = \delta(x)$.

ГЛАВА 9

§ 9.1. Уравнения эллиптического типа и краевые задачи

1. Простейшими задачами, приводящими к рассмотрению задач эллиптического типа, являются задачи теплопроводности со стационарным распределением температуры. В самом деле, уравнение теплопроводности без источников тепла для однородного тела имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right).$$

Если процесс стационарен, то $U = U(x, y, z)$ — температура не зависит от времени, и, следовательно, мы должны решать уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

или

$$\Delta U = 0. \tag{9.1}$$

Если же рассматривать уравнение теплопроводности с источниками, то придём к уравнению

$$\Delta U = f(x, y, z). \tag{9.2}$$

Уравнение (9.1) называется *уравнением Лапласа*, а уравнение (9.2) — *уравнением Пуассона*. Очевидно, что уравнение Лапласа является частным случаем уравнения Пуассона, когда $f(x, y, z) \equiv 0$. Всякая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией*. Поэтому когда говорят о нахождении гармонических функций, то речь идёт о решении уравнения Лапласа.

2. Из курса общей физики известно, что потенциал $\Phi(x, y, z)$, создаваемый заряженным телом в электростатике, массивным телом в гравистатике в области без тела удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi(x, y, z) = 0, \tag{9.3}$$

а внутри тела — уравнению Пуассона

$$\Delta\Phi(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z), \tag{9.4}$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность зарядов или плотность масс. Оба приведённых примера — из класса физических задач, приводящих к уравнению *эллиптического типа*.

Как ставятся краевые задачи для таких уравнений? Прежде всего отметим, что они делятся на два широких класса: *внутренние краевые задачи* и *внешние краевые задачи*.

Для примера сформулируем три вида внутренних краевых задач. Внешние задачи ставятся аналогично. Рассмотрим некоторое тело T ограниченное поверхностью S. Задача о стационарном распределении температуры $U(x, y, z)$ внутри тела T формулируется следующим образом:

Первая внутренняя краевая задача (задача Дирихле): найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри тела T с границей S уравнению $\Delta U = f(x, y, z)$ (или $\Delta U = 0$), непрерывную в области $(T \cup S)$ и удовлетворяющую граничному условию $U(x, y, z)|_S = \lambda(M)$, $M \in S$.

Вторая внутренняя краевая задача (задача Неймана) характеризуется граничным условием

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = \mu(M), \quad M \in S,$$

где $\frac{\partial U}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали $\vec{n}$ в точке M поверхности S, $\mu(M)$ - заданная непрерывная на поверхности S тела T функция. Очевидно, что при этом должно выполняться условие:

$$\oiint\limits_S \mu d\sigma = 0,$$

то есть общий поток тепла через границу тела должен равняться нулю, поскольку температурный режим внутри тела мы считаем установившимся.

Третья внутренняя краевая задача характеризуется граничными условиями

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = h(M)\left[U(M) - \nu(M)\right], M \in S.$$

Если во всех трёх перечисленных задачах искать решения в области $(\hat{T})$, внешней по отношению к S, то соответствующая краевая задача называется *внешней краевой задачей*.

§ 9.2. Формулы Грина и основные свойства гармонических функций

Ряд важных свойств гармонических функций будет получен из приводимых ниже интегральных формул, называемых обычно формулами Грина. Исходной для их вывода является известная из курса математического анализа формула Остроградского

$$\oiint\limits_S \vec{A}_{\vec{n}} d\sigma = \int\int\limits_T\int div\vec{A}d\tau. \tag{9.5}$$

Здесь $\vec{A}(x,y,z) = \vec{i}P(x,y,z) + \vec{j}Q(x,y,z) + \vec{k}R(x,y,z)$, T − некоторое тело, S − его поверхность, $\vec{n}$ − нормаль к S.

Пусть $U(x,y,z)$ и $V(x,y,z)$, − функции, непрерывные вместе с первыми производными в $(T \cup S)$ и дважды дифференцируемые в T. Положим $\vec{A} = V \cdot \vec{\nabla}\, U$. Тогда

$$\vec{A}_{\vec{n}} = \left(\vec{A}\cdot\vec{n}\right) = V\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\, U\right) = V\frac{\partial U}{\partial n},$$

$$div\vec{A} = div\left(V\cdot\vec{\nabla}\, U\right) = \vec{\nabla}\left(V\cdot\vec{\nabla}U\right) = \left(\vec{\nabla}V\cdot\vec{\nabla}U\right) + V\Delta U,$$

а формула Остроградского (9.5) принимает вид:

$$\oiint\limits_S V\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma = \int\int\limits_T\int\left[\left(\vec{\nabla}V\cdot\vec{\nabla}U\right) + V\Delta U\right]d\tau. \tag{9.6}$$

Это − **первая формула Грина.**

Если в этой формуле U и V поменять местами и составить разность этих формул, то получим:

$$\oiint\limits_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma = \int\int\limits_T\int\left(U\Delta V - V\Delta U\right)d\tau. \tag{9.7}$$

Это − **вторая формула Грина.**

Положим

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r_{M_0M}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

где $M_0(x_0,y_0,z_0) \in T$. При $M = M_0$ функция $V(M)$ имеет бесконечный разрыв.

Рассмотрим область $T \backslash T_\varepsilon$ с границей $(S \cup S_\varepsilon)$, где T_ε − шар достаточно малого радиуса ε с центром в точке M_0, а S_ε − его поверхность. В этой области функция $V(M)$ разрывов не имеет и является гармонической функцией. Это легко проверить непосредственным вычислением.

Применим вторую формулу Грина к функции $V = \frac{1}{r_{M_0 M}} \equiv \frac{1}{r}$ и некоторой функции U.

$$\oiint\limits_{S \cup S_\varepsilon} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = \int\int\limits_{T \setminus T_\varepsilon}\int (U \Delta V - V \Delta U)\, d\tau$$

Так как $\Delta \frac{1}{r} = 0$ в $T \setminus T_\varepsilon$, получим:

$$\oiint\limits_{S_\varepsilon} \left(U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma =$$

$$= - \oiint\limits_{S} \left(U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma - \int\int\limits_{T \setminus T_\varepsilon}\int \frac{1}{r} \Delta U d\tau. \quad (14.8)$$

Для сферы S_ε

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2},$$

а величина r на поверхности S_ε постоянна и равна ε. Используя теорему о среднем, получим:

$$\oiint\limits_{S_\varepsilon} U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \oiint\limits_{S_\varepsilon} U d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} U(M^*) \cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi U(M^*),$$

$$- \oiint\limits_{S_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial n}(M^{**}) \cdot 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi\varepsilon \frac{\partial U}{\partial n}(M^{**}),$$

здесь $M^*, M^{**} \in S_\varepsilon$. Подставив эти равенства в (9.8), имеем:

$$4\pi U(M^*) - 4\pi\varepsilon \frac{\partial U}{\partial n}(M^{**}) = \oiint\limits_{S} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma - \int\int\limits_{T \setminus T_\varepsilon}\int \frac{1}{r} \Delta U d\tau.$$

Перейдём в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{S} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int\int\limits_{T \setminus T_\varepsilon}\int \frac{1}{r} \Delta U d\tau. \quad (9.9)$$

Если считать $U(M)$ гармонической функцией, то эта формула примет вид

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{S} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d\sigma, \quad (9.10)$$

где

$$r_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Формула (9.10) выражает значение гармонической функции в любой внутренней точке области через значение этой функции и её нормальной производной на границе области.

Формулу (9.9), а иногда и (9.10), называют **основной интегральной формулой** теории гармонических функций.

Аналогичные формулы имеют место и для гармонических функций двух переменных. В двумерном случае вспомогательная гармоническая функция $V = \ln \frac{1}{r}$ (вместо $V = \frac{1}{r}$), все рассуждения те же, что и в трёхмерном случае, а сами формулы имеют вид:

$$U(M_0) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) ds - \frac{1}{2\pi} \int\int\limits_{D} \ln \frac{1}{r} \Delta U d\sigma \quad (9.9^\star)$$

и

$$U(M_0) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right) ds, \quad (9.10^\star)$$

где D – область $\Re^2$, а Γ – её граница.

ГЛАВА 10

§ 10.1. Метод функций Грина решения задачи Дирихле

Рассмотрим основную интегральную формулу (9.9) теории гармонических функций, полученную нами в предыдущей главе:

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right)d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int\int\limits_{T\setminus T_\varepsilon}\int\frac{1}{r}\Delta U d\tau. \tag{10.1}$$

Вторая формула Грина (9.7), в которой функция V предполагается гармонической в области T и дифференцируемой на границе $S,$ может быть записана в виде:

$$0=\oiint\limits_S\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma-\int\int\limits_T\int V\Delta U d\tau. \tag{10.2}$$

Складывая (10.1) и (10.2), получим

$$U(M_0)=\oiint\limits_S\left(G\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma-\int\int\limits_T\int G\Delta U d\tau, \tag{10.3}$$

где

$$G(M,M_0)\stackrel{def}{=}V(M)+\frac{1}{4\pi r_{_{MM_0}}}, \tag{10.4}$$

где

$$r_{_{MM_0}}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Функция $G(M,M_0)$ гармонична в T при $M\neq M_0.$ Потребуем, чтобы эта функция удовлетворяла граничному условию

$$G(M,M_0)|_S=0,$$

или

$$V(M)|_S=-\frac{1}{4\pi r_{_{MM_0}}}. \tag{10.5}$$

Равенство (10.4) при условии (10.5) определяет так называемую функцию Грина задачи Дирихле. Знание такой функции позволяет, применяя формулу (10.3), записать решение задачи Дирихле

$$\Delta U(M)=f(M),\quad U|_S=\varphi(M_S)$$

в явном виде:

$$U(M_0)=-\oiint\limits_S\left(\varphi(M_S)\cdot\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\right)d\sigma-\int\int\limits_T\int G(M,M_0)f(M)d\tau. \tag{10.6}$$

Если задача Дирихле решается для уравнения Лапласа, то формула (10.6) даёт

$$U(M_0)=-\oiint\limits_S\left(\varphi(M_S)\cdot\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\right)d\sigma. \tag{10.7}$$

Из формул (10.4) и (10.5), определяющих функцию Грина, следует, что для её вычисления необходимо найти функцию $V(M),$ гармоническую в T и удовлетворяющую граничному условию $V(M)|_S=-\frac{1}{4\pi r_{_{MM_0}}},$ то есть нужно опять решить задачу Дирихле, но с граничной функцией специального вида, что в целом ряде случаев оказывается значительно более простой задачей.

Так, при решении этой задачи применяется метод "электростатических изображений", идея которой состоит в следующем: второе слагаемое в формуле (10.4) трактуется как потенциал точечного единичного заряда, помещённого в точке M_0 тела $T.$ Если теперь подобрать один или несколько зарядов , расположенных вне тела T и компенсирующих на поверхности тела S действие заряда в точке $M_0,$ то потенциал этих зарядов, называемых *электростатическими изображениями,* и даст искомую функцию $V(M)$ — первое слагаемое в формуле (10.4).

Действительно, функция $V(M)$ будет гармонична всюду в T — по определению потенциала, а на S будет выполнено условие (15.5).

Пример. Построение функции Грина для полупространства.

Пусть T — полупространство $z>0$, S — плоскость $x0y$. Если в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ поместить единичный заряд, создающий в точке $M(x,y,z)$ поле с потенциалом

$$V(M)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}},$$

где

$$r_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

то его действие на S уничтожится, очевидно, таким же по величине отрицательным зарядом, помещённым в точку $M_1(x_0,y_0,-z_0)$, симметричную точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ относительно плоскости $z=0$. Следовательно, в качестве функции $V(M)$ можно взять

$$-\frac{1}{4\pi r_{MM_1}}=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}},$$

а функция Грина будет иметь вид

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}-\frac{1}{4\pi r_{MM_1}},$$

на поверхности S, то есть на плоскости $z=0$ имеем $G(M,M_0)=0$.

Вычислим

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S=-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_S=\frac{1}{4\pi}\cdot\left.\left[\frac{z-z_0}{r^3_{MM_0}}-\frac{z+z_0}{r^3_{MM1}}\right]\right|_{z=0}=$$

$$=\frac{-z_0}{2\pi\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким образом, в случае полупространства решение задачи Дирихле (10.7) для уравнения Лапласа записывается в виде

$$U(M_0)=\frac{1}{2\pi}\oiint\limits_S\varphi(M_S)\frac{z_0}{r^3_{MM_0}}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{z_0\cdot\varphi(x,y)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}dxdy. \tag{10.8}$$

§ 10.2. Свойства гармонических функций

Свойство 1. *Если функция гармонична в области T с границей S, то*

$$\oiint\limits_S\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma=0. \tag{10.9}$$

Это следует непосредственно из первой формулы Грина (9.6), если считать $V=1$ и U — гармонической функцией.

Таким образом, в задаче Неймана *всегда* должно выполняться условие о равенстве нулю суммарного потока тепла через границу области:

$$\oiint\limits_S\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma=\oiint\limits_S\mu d\sigma=0.$$

Свойство 2. (Теорема о среднем). *Если функция U гармонична в T и точка $M_0\in T$, то*

$$U(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\oiint\limits_{S_a}Ud\sigma, \tag{10.10}$$

где S_a *— сфера радиуса* a *с центром в точке* $M_0 \in T$.

Для доказательства свойства 2 достаточно положить в формуле (9.10) $S = S_a$ и воспользоваться для первого слагаемого в правой части свойством 1:

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{S_a} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot [\underbrace{\frac{1}{a} \oiint\limits_{S_a} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma}_{=0} - \oiint\limits_{S_a} U \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma] = \frac{1}{4\pi a^2} \oiint\limits_{S_a} U d\sigma.$$

Здесь мы воспользовались тем, что на S_a $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)$.

В плоском случае формула (10.10) превращается в

$$U(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint\limits_{\Gamma_a} U ds, \tag{10.10*}$$

где Γ_a — окружность радиуса a с центром в точке M_0, принадлежащая области гармоничности функции U.

Свойство 3. (Принцип максимума). *Если* U *гармонична в* T *и непрерывна в* $(T \cup S)$, *где* S *— граница* T, *то максимальные и минимальные значения* U *достигаются на границе* S.

Доказательство. Предположим противное: максимальное значение U достигается во внутренней точке M_0 области T: $\max U = U(M_0)$. Окружим точку M_0 сферой S_ρ радиуса ρ, целиком принадлежащей T. По теореме о среднем и определению максимума

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \oiint\limits_{S_\rho} U(M) d\sigma \le \frac{1}{4\pi\rho^2} \oiint\limits_{S_\rho} U(M_0) d\sigma = U(M_0).$$

Если считать, что $U(M_0)$ строго больше значений $U(M)$ на S_ρ, то предыдущее соотношение приводит к противоречию:

$$U(M_0) < U(M_0).$$

Противоречия можно избежать, если считать, что на каждой сфере, окружающей точку предполагаемого максимума, значения $U(M)$ могут быть только постоянными и равными $U(M_0)$. Построив сферу радиуса, равного расстоянию от точки M_0 до границы S, получим, что и в некоторой точке $M^\star$ границы, принадлежащей этой сфере, значение $U(M^\star) = U(M_0)$ — максимум достигается на границе.

Аналогичные рассуждения можно провести и для минимума.

§ 10.3. Теоремы единственности решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона

Теорема 1. *Если задача Дирихле*

$$\Delta U(x,y,z) = f(x,y,z), \quad U(x,y,z)|_S = \varphi(M), \quad M \in S, \tag{10.11}$$

имеет решение, то оно единственно и устойчиво.

Доказательство. Предположим противное: пусть существуют два решения поставленной выше задачи Дирихле: $U_1(x,y,z)$ и $U_2(x,y,z)$. Рассмотрим их разность $V(x,y,z) = U_1(x,y,z) - U_2(x,y,z)$. Очевидно, что

$$\Delta V(x,y,z) = \Delta U_1(x,y,z) - \Delta U_2(x,y,z) = f(x,y,z) - f(x,y,z) = 0.$$

$$V(x,y,z)|_S = U_1(x,y,z)|_S - U_2(x,y,z)|_S = \varphi(M) - \varphi(M) = 0.$$

Итак, функция $V(x,y,z)$ гармонична и на границе равна нулю. Но в силу принципа максимума и минимума ни больших, ни меньших значений во внутренних точках $V(x,y,z)$ принимать не может, следовательно, $V(x,y,z) \equiv 0$, $U_1(x,y,z) \equiv U_2(x,y,z)$ - единственность доказана.

Докажем **устойчивость** решения. Пусть

$$\Delta U_1(x,y,z) = \Delta U_2(x,y,z) = f(x,y,z),$$

$$U_1(x,y,z)|_S = \varphi_1(M),\, U_2(x,y,z)|_S = \varphi_2(M),$$

и пусть $|\varphi_1(M) - \varphi_2(M)| \le \varepsilon$.

Рассмотрим опять $V(x,y,z) = U_1(x,y,z) - U_2(x,y,z): \ \Delta V(x,y,z) = 0$, $V|_S = (\varphi_1(M) - \varphi_2(M))|_S$, то есть на границе $|V| \le \varepsilon$, или $-\varepsilon \le V \le \varepsilon$. В силу принципа максимума и всюду в области T выполнено $-\varepsilon \le U_1(x,y,z) - U_2(x,y,z) \le \varepsilon$. Это означает, что малому изменению граничных условий соответствует малое изменение решения $-$ решение задачи Дирихле устойчиво.

Теорема 2. *Решение задачи Неймана*

$$\Delta U(x,y,z) = f(x,y,z), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = \psi(M), \quad M \in S,$$

непрерывное вместе с частными производными первого порядка в $(T \cup S)$, *определяется единственным образом с точностью до произвольной постоянной.*

Доказательство. Пусть $U_1(x,y,z)$ и $U_2(x,y,z)$ – два решения задачи Неймана. Для $V(x,y,z) = U_1(x,y,z) - U_2(x,y,z)$ имеем задачу

$$\Delta V = 0, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_S = 0.$$

В первой формуле Грина (9.6) положим $V = U$:

$$\oiint_S V \underbrace{\frac{\partial V}{\partial n}}_{=0} d\sigma = \iiint_T \left[V \underbrace{\Delta V}_{=0} + (\vec{\nabla} V \cdot \vec{\nabla} V) \right] d\tau.$$

В силу условия задачи, левая часть равенства и первое слагаемое правой части равны нулю. Следовательно,

$$\iiint_T (\vec{\nabla} V \cdot \vec{\nabla} V) d\tau = 0,$$

что возможно только если

$$(\vec{\nabla} V \cdot \vec{\nabla} V) = 0,$$

или

$$(\vec{\nabla} V \cdot \vec{\nabla} V) = \left(\left(\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z} \right) \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 = 0.$$

Из этого равенства очевидно, что $V = \mathrm{const} = \mathrm{C}$, или

$$U_1(x,y,z) = U_2(x,y,z) + C.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Решение первой внешней краевой задачи для уравнения Лапласа* $\Delta U(M) = 0$, *где* $U(x,y,z)$ *– непрерывная функция, равномерно стремящаяся к нулю при* $M \to \infty$, *единственно.*

Эту теорему примем без доказательства.

ГЛАВА 11

§ 11.1. Решение первой внутренней краевой задачи для круга

Необходимо найти решение уравнения

$$\Delta U(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

внутри круга радиуса a с центром в начале координат, удовлетворяющее граничному условию:

$$U(x,y)|_{x^2+y^2=a^2} = f(x,y).$$

Функцию $f(x,y)$ будем считать непрерывной и дифференцируемой функцией.

Перейдём к полярной системе координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда это уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{11.1}$$

где $U = U(\rho,\varphi)$, с граничным условием

$$U(\rho,\varphi)|_{\rho=a} = f(\varphi),$$

причём, естественно, $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$.

Решим задачу методом разделения переменных. Положим

$$U(\rho,\varphi) = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)$$

и, подставив его в уравнение (11.1), получим

$$R''_{\rho\rho}(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho}R'_\rho(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''_{\varphi\varphi}(\varphi) = 0$$

или

$$\frac{\rho^2 R''_{\rho\rho}(\rho) + \rho R'_\rho(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''_{\varphi\varphi}(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = C,$$

где C = const. Таким образом, неизвестные функции $R(\rho)$ и $\Phi(\varphi)$ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\Phi''_{\varphi\varphi}(\varphi) + C\cdot\Phi(\varphi) = 0 \tag{11.2}$$

$$\rho^2 R''_{\rho\rho}(\rho) + \rho R'_\rho(\rho) - C\cdot R(\rho) = 0. \tag{11.3}$$

По смыслу $\Phi(\varphi)$ — периодическая функция с периодом 2π. Если $C < 0$, то есть если положить $C = -\lambda^2$, то решением уравнения (11.2) является функция

$$\Phi(\varphi) = c_1 e^{\lambda\varphi} + c_2 e^{-\lambda\varphi}$$

— заведомо непериодическая функция, такая, что $\Phi(\varphi) \to \infty$ при $\varphi \to \infty$.

Если $C = 0$ то $\Phi(\varphi) = A\varphi + B$, — тоже явно непериодическое решение.

Остаётся, следовательно, $C > 0$. Положим $C = \lambda^2$, тогда

$$\Phi(\varphi) = A\cos\lambda\varphi + B\sin\lambda\varphi. \tag{11.4}$$

Эта функция будет периодической с периодом 2π только если λ - целое число. Пусть $\lambda = n$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Решение (11.4) в этом случае имеет вид:

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi.$$

При каждом n эта функция является решением уравнения (11.2).

Уравнение (11.3) при $C = n^2$ имеет вид

$$\rho^2 R''_{\rho\rho}(\rho) + \rho R'_\rho(\rho) - n^2\cdot R(\rho) = 0.$$

Это хорошо известное из курса обыкновенных дифференциальных уравнений уравнение Эйлера; его общее решение:

$$R(\rho) = c_1\rho^n + c_2\rho^{-n}.$$

Но в центре круга, если $c_2 \neq 0$, при $\rho \to 0$, второе слагаемое имеет бесконечный разрыв $R_n(\rho) \to \infty$. Следовательно, $c_2 = 0$, и

$$R_n(\rho) = C_n\rho^n.$$

Окончательно, при каждом n имеем частное решение уравнения (11.1):

$$U_n(\rho,\varphi) = \rho^n\left(\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n\varphi\right).$$

Общее решение - есть суперпозиция всех частных решений:

$$U(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\left(\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n\varphi\right). \tag{11.5}$$

Потребуем, чтобы это решение удовлетворяло граничному условию

$$U(\rho,\varphi)|_{\rho=a} = f(\varphi),$$

или

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}a^n\left(\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n\varphi\right).$$

Разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье на интервале $[-\pi,\ +\pi]$:

$$f(\varphi) = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(p_n\cos n\varphi + q_n\sin n\varphi\right),\quad p_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\xi)d\xi,$$

$$p_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\xi)\cos n\xi d\xi,\qquad q_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\xi)\sin n\xi d\xi.$$

Сравнивая коэффициенты, получим:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\xi)d\xi,\quad \alpha_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\xi)\cos n\xi d\xi,\quad \beta_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\xi)\sin n\xi d\xi.$$

Докажем, что *при найденных значениях α_n и β_n в правой части (11.5) действительно является решением задачи Дирихле.* Для этого надо доказать равномерную сходимость ряда (11.5), то есть возможность почленного дифференцирования этого ряда внутри круга и непрерывность на границе.

Рассмотрим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^k U_n}{\partial\varphi^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\left[\hat{\alpha}_n n^k\cos\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) + \hat{\beta}_n n^k\sin\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right)\right], \tag{11.6}$$

где мы обозначили

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\xi)\cos n\xi d\xi,\quad \hat{\beta}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\xi)\sin n\xi d\xi.$$

Обозначим через M максимум модулей коэффициентов Фурье функции $f(\varphi)$, то есть $|\hat{\alpha}_n| \le M$, $\left|\hat{\beta}_n\right| \le M$. Очевидно, при этом, что для любой фиксированной внутренней точки круга $\frac{\rho}{a} \stackrel{def}{\equiv} \rho_0 < 1$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^k U_n}{\partial\varphi^k}\right| < \rho_0^n n^k\cdot 2M.$$

Числовой ряд $2M\sum\limits_{n=0}^{\infty}\rho_0^n n^k$ мажорирует функциональный ряд (11.6) и сходится (по признаку Даламбера, например). Следовательно, ряд (11.6) сходится равномерно при всех значениях $\rho < a$ и при любых значениях k. Это значит, что в любой внутренней точке круга ряд (11.5) можно почленно дифференцировать k раз по φ. Аналогично доказывается дифференцируемость ряда (11.5) по ρ.

Непрерывность решения (11.5) на границе $\rho = a$ следует из предположения о непрерывности и дифференцируемости функции $f(\varphi)$, так как в этом случае $|U(a,\varphi)| < \infty$, то есть

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\hat{\alpha}_n \cos n\varphi + \hat{\beta}_n \sin n\varphi\right)\right| < \sum_{n=0}^{\infty}\left(|\hat{\alpha}_n| + \left|\hat{\beta}_n\right|\right).$$

Этот ряд мажорирует ряд (11.5) на границе, следовательно, ряд (11.5) сходится равномерно и в точках границы, что влечёт за собой непрерывность.

Подставим теперь найденные выражения для α_0, α_n и β_n в общее решение (11.5):

$$U(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)d\xi +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\cos n\xi\cos n\varphi d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\sin n\xi \sin n\varphi d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi-\xi)\right]d\xi. \qquad (11.7)$$

Вычислим отдельно сумму, стоящую в квадратных скобках, для этого воспользуемся формулой Эйлера:

$$\cos n(\xi - \varphi) = \frac{e^{in(\varphi-\xi)} + e^{-in(\varphi-\xi)}}{2}.$$

Тогда

$$\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi-\xi)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n e^{in(\varphi-\xi)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n e^{-in(\varphi-\xi)} + \right].$$

Так как $\frac{\rho}{a} < 1$, $\left|e^{in(\varphi-\xi)}\right| = 1$, то каждая из сумм – это сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n e^{\pm in(\varphi-\xi)} = \frac{\left(\frac{\rho}{a}\right)e^{\pm i(\varphi-\xi)}}{1-\left(\frac{\rho}{a}\right)e^{\pm i(\varphi-\xi)}}.$$

Окончательно,

$$\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi-\xi)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\left(\frac{\rho}{a}\right)e^{i(\varphi-\xi)}}{1-\left(\frac{\rho}{a}\right)e^{i(\varphi-\xi)}} + \frac{\left(\frac{\rho}{a}\right)e^{-i(\varphi-\xi)}}{1-\left(\frac{\rho}{a}\right)e^{-i(\varphi-\xi)}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a^2-\rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\varphi-\xi)+\rho^2}.$$

При получении этого результата была использована формула Эйлера

$$e^{\pm i(\varphi-\xi)} = \cos(\varphi-\xi) \pm i\sin(\varphi-\xi).$$

Подставляя полученный результат в (11.7), получим решение задачи Дирихле для круга:

$$U(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\frac{a^2-\rho^2}{a^2-2a\rho\cos(\varphi-\xi)+\rho^2}d\xi. \qquad (11.8)$$

Эта формула называется **формулой Пуассона.**

ГЛАВА 12

§ 12.1. Дифференциальные уравнения свободных электрических колебаний

При прохождении по проводу электрического тока вокруг него образуется электрическое поле, которое вызывает изменения как силы тока, так и величины напряжения. Благодаря этим изменениям в проводе возникает определённый колебательный процесс, изучением которого мы сейчас и займёмся.

Проведём ось $0x$ вдоль оси провода, а начало координат поместим в один из его концов; длину провода обозначим через l. Сила тока i и напряжение v в какой-нибудь точке провода будут функциями абсциссы x и времени t. Величины i и v связаны между собой некоторыми дифференциальными уравнениями с частными производными первого порядка. При выводе этих уравнений мы будем предполагать, что ёмкость, активное сопротивление, самоиндукция и утечка распределены вдоль провода непрерывно и равномерно, и что постоянные C, R, L и G, их характеризующие, рассчитаны на единицу длины провода.

Рассмотрим часть провода, заключённую между двумя сечениями $x = x_1$ и $x = x_2$. Применяя закон Ома к этой части провода, будем иметь:

$$v(x_1,t) - v(x_2,t) = R \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} i(x,t)dx + L\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}dx. \tag{12.1}$$

Так как, с другой стороны,

$$v(x_1,t) - v(x_2,t) = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}dx,$$

то имеет место равенство

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + L\cdot\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R\cdot i(x,t)\right)dx = 0,$$

откуда, в силу произвольности x_1 и x_2, следует, что

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + L\cdot\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R\cdot i(x,t) = 0. \tag{12.2}$$

Количество электричества, протёкшего через рассматриваемый участок (x_1, x_2) провода за единицу времени

$$i(x_1,t) - i(x_2,t) = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial i(x,t)}{\partial x}dx,$$

равно сумме количества электричества, необходимого для зарядки этого участка провода, и количества электричества, теряющегося вследствие несовершенства изоляции:

$$C\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx + G\int\limits_{x_1}^{x_2} v(x,t)dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} + C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + Gv(x,t)\right)dx = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} + C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + Gv(x,t) = 0. \tag{12.3}$$

§ 12.2. Телеграфное уравнение

Если мы продифференцируем уравнение (12.2) по x, а уравнение (12.3) по t, а затем из найденных выражений исключим производную $\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x \partial t}$, то получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка относительно $v(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + (RC+GL)\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + GRv(x,t). \tag{12.4}$$

Аналогично выводится дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} + (RC+GL)\,\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + GRi(x,t), \tag{12.5}$$

которому удовлетворяет сила тока $i(x,t)$. Таким образом, получим, что напряжение $v(x,t)$ и сила тока $i(x,t)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial x^2} = a_0\frac{\partial^2 \omega(x,t)}{\partial t^2} + 2b_0\frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} + c_0\omega(x,t), \tag{12.6}$$

где

$$a_0 = LC, \quad 2b_0 = RC+GL, \quad c_0 = GR. \tag{12.7}$$

Это уравнение называют *телеграфным уравнением.*

Если ввести новую функцию $u(x,t)$, положив

$$\omega(x,t) = e^{-\frac{b_0}{a_0}t}u(x,t), \tag{12.8}$$

то уравнение (12.6) примет более простую форму:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b^2 u(x,t), \tag{12.9}$$

где

$$a = \frac{1}{\sqrt{a_0}}, \quad b = \frac{\sqrt{b_0^2 - a_0c_0}}{a_0}. \tag{12.10}$$

§ 12.3. Колебания в линии, свободной от искажения

Это название было дано Хевисайдом таким линиям, у которых постоянные G, C, L и R связаны соотношениями

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L}. \tag{12.11}$$

Для подобного рода линий телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b^2 u(x,t)$$

принимает форму волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad \left(a = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right), \tag{12.12}$$

так как в этом случае $b=0$.

Структуру общего решения волнового уравнения мы уже исследовали выше (см. лекцию 5), оно имеет вид

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at).$$

На основании соотношения (а оно — следствие (12.8))

$$v(x,t) = e^{-\frac{R}{L}t}u(x,t)$$

найдём, что величина напряжения в рассматриваемой линии определяется формулой

$$v(x,t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[f(x-at) + g(x+at)\right], \tag{12.13}$$

где f и g — произвольные функции.

Для нахождения силы тока возьмём уравнение (12.3)

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + Gv(x,t)$$

и внесём в его правую часть выражения для $v(x,t)$ и $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$, взятые из формулы (12.13).

Получим:

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = \sqrt{\frac{C}{L}}e^{-\frac{R}{L}t}\left[f'(x-at) - g'(x+at)\right].$$

Интегрируя это выражение по x, найдём

$$i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}e^{-\frac{R}{L}t}\left[f(x-at) - g(x+at) + \kappa(t)\right], \qquad (12.14)$$

где $\kappa(t)$ — произвольная функция.

Для нахождения этой произвольной функции подставим (12.13) и (12.14) в уравнение (12.2)

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + L\cdot\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R\cdot i(x,t) = 0$$

и найдём, что $\kappa'(t) = 0$, откуда $\kappa(t) = \mathrm{k} = \mathrm{const}$.

Постоянную k, не нарушая общности, можно считать равной нулю. В самом деле, допустим, что $k \neq 0$. Тогда заменив в формулах (17.13) и (17.14) функции $f(x-at)$ и $g(x+at)$ функциями $f(x-at) - \frac{k}{2}$ и $g(x+at) - \frac{k}{2}$, убедимся, что постоянной k в них уже не будет.

Итак,

$$i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}e^{-\frac{R}{L}t}\left[f(x-at) - g(x+at)\right]. \qquad (12.15)$$

Формулы (12.13) и (12.15) показывают, что процесс распространения электрических возмущений в линии без искажения имеет волновой характер. Скорость распространения этих волн, как мы уже определили ранее, равна

$$a = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (12.16)$$

Множитель $e^{-\frac{R}{L}t}$, стоящий в правых частях формул (12.13) и (12.15), показывает, что колебательный процесс, возникающий в проводе при прохождении по нему электрического тока, с течением времени затухает.

Что же касается функций f и g, от которых зависит форма волн, то они определяются из начальных условий

$$v(x,t)|_{t=0} = F(x), \qquad i(x,t)|_{t=0} = G(x), \qquad (17.17)$$

где $F(x)$ и $G(x)$ — заданные функции.

Действительно, полагая в формулах (12.13) и (12.15) $t = 0$, найдём на основании условий (12.17), что

$$f(x) + g(x) = F(x), \qquad f(x) - g(x) = G(x),$$

откуда

$$f(x) = \frac{F(x)+G(x)}{2}, \qquad g(x) = \frac{F(x)-G(x)}{2}. \qquad (12.18)$$

Если провод настолько длинен, что его можно считать простирающимся до бесконечности, то функции $F(x)$ и $G(x)$ должны быть известны на всём интервале $(-\infty, +\infty)$. Тогда по формулам, полученным нами выше, можно определить силу тока и напряжение в любой точке цепи в любой момент времени.

§ 12.4. Граничные условия для провода конечной длины

Приведём несколько примеров наиболее часто встречающихся граничных условий в случае, если провод имеет конечную длину l.

1. В начале линии включена батарея с постоянной электродвижущей силой E, конец линии заземлён.

Граничные условия:

$$v(x,t)|_{x=0} = E, \qquad v(x,t)|_{x=l} = 0.$$

2. Начало линии находится под синусоидальным напряжением с частотой ω, конец провода изолирован.

Граничные условия:

$$v(x,t)|_{x=0} = E\sin\omega t, \qquad i(x,t)|_{x=l} = 0.$$

3. В начале и в конце линии включены приёмники с омическим сопротивлением R_0 и R_l и с самоиндукцией L_0 и L_l.

Граничные условия:

$$v(x,t)|_{x=0} = E - R_0 i_0 - L_0\frac{\partial i_0}{\partial t}, \qquad v(x,t)|_{x=l} = R_l i_l + L_l\frac{\partial i_l}{\partial t},$$

где E — электродвижущая сила батареи, i_0 и i_l — сила тока в начале и в конце провода.

4. В начале и в конце провода включены разделительные конденсаторы ёмкостью C_0 и C_l.

Граничные условия:

$$v(x,t)|_{x=0} = E - \frac{1}{C}\int i_0 dt, \qquad i(x,t)|_{x=l} = C_l\frac{dv_l}{dt},$$

где v_l — напряжение на конце провода.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ (РАСПРЕДЕЛЕНИЙ)

ГЛАВА 13

Несколько упрощённо, но достаточно наглядно идея введения обобщённых функций может быть проиллюстрирована на следующем сравнении. В алгебре некоторое время считалось неразрешимым уравнение $x^2+1=0$ и другие уравнения, для решения которых приходилось извлекать квадратный корень из отрицательного числа. Введение комплексных чисел сделало разрешимыми все алгебраические уравнения. В физике и в других науках, использующих математику, постоянно приходится встречаться с необходимостью найти производную той или иной функции, но даже такая "хорошая"непрерывная функция как $|x|$ не является дифференцирунмой функцией в окрестности точки $x=0$. Введение обобщённых функций позволяет считать и указанную функцию, и ряд ещё более "плохих" функций дифференцируемыми, причём сколько угодно раз (в обобщённом смысле).

В дальнейшем понятие обощённых функций, как и комплексных чисел, получило естественное развитие и нашло многочисленные применения. Первые идеи этого понятия имеются в работах советского математика С.Л. Соболева (1936). Большой вклад в теорию обощённых функций внёс французский математик Л. Шварц (1951), он дал им первое название - "рапределения". Позднее в книгах И.М.Гельфанда и Г.Е.Шилова появится термин "обощённые функции". Далее мы чаще будем применять более короткий термин Шварца.

§ 13.1. Векторное пространство D

Определение 1. Комплекснозначная функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (при первом прочтении всюду можно считать $n=1$) называется принадлежащей пространству D, если

1) $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема ($\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$) и

2) существует ограниченное множество $K \subset \mathbb{R}^n$, вне которого $\varphi(x) \equiv 0$.

Наименьшее замкнутое множество K, вне которого функция равна нулю, называется *носителем* $\varphi(x)$ (пишут $K = \mathrm{supp}\,\varphi$).

Другими словами, пространство D — это пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$ с ограниченными носителями. Такие функции часто называют *финитными функциями*.

Пример. Пусть $n = 1$. Легко проверить, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

принадлежит D, причём $\operatorname{supp}\varphi = [-1; +1]$.

Очевидно, что если $\varphi_1 \in D$, $\varphi_2 \in D$, то $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$ тоже принадлежат D при любых комплексных α и β, следовательно, D — линейное векторное пространство.

Определение 2. Говорят, что некоторая последовательность функций $\{\varphi_k\}$, принадлежащих D, сходится при $k \to \infty$ к некоторой функции φ,

1) если носители всех φ_k содержатся в одном и том же замкнутом множестве, не зависящем от k,

2) производные любого порядка m от функций $\{\varphi_k\}$ сходятся равномерно при $k \to \infty$ к m–й производной функции φ.

Таким образом, сходимость в D — это сходимость "бесконечного порядка".

Пространство D называется *пространством основных функций* или *пространством Шварца*.

§ 13.2. Пространство распределений

Определение 1. Распределением T называется линейный функционал, непрерывный на векторном пространстве D.

Согласно этому определению, любой функции $\varphi(x) \in D$ функционал T ставит в соответствие комплексное число $T(\varphi)$ (иногда его обозначают $\langle T, \varphi \rangle$), причём

$$T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2); \quad T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi)$$

и если $\{\varphi_k(x) \to \varphi(x)\}$ при $k \to \infty$ в D, то $T(\varphi_k(x)) \to T(\varphi(x))$ в C (C — поле комплексных чисел).

Распределения сами образуют векторное пространство, его обозначают D'. Операции в D' определяются формулами

$$(T_1 + T_2)(\varphi) = T_1(\varphi) + T_2(\varphi);\,; \quad (\lambda T)(\varphi) = \lambda T(\varphi).$$

Пример 1. Пусть $f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ — функция, интегрируемая на любом ограниченном множестве в $\mathbb{R}^n$. Определим

$$T_f(\varphi) \equiv \langle T_f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\!\!\int \dots \int f(x)\varphi(x)dx.$$

Этот интеграл имеет смысл, так как он, по существу, берётся не по всему $\mathbb{R}^n$, а только по ограниченному $K = \operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n$. Функционал T_f, определяемый функцией $f(x)$, можно отождествить с функцией f и обозначить просто как $\langle f, \varphi \rangle$. В частности, функционал, который каждой функции $\varphi(x)$ ставит в соответствие её интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\!\!\int \dots \int \varphi(x)dx$, задаёт распределение, которое мы отождествим с функцией $f(x) \equiv 1$.

Пример 2. δ - распределение Дирака определяется формулой

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Можно рассматривать распределение Дирака и в точке $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Физика даёт многочисленные примеры распределений: распределение электрических зарядов, масс и так далее. Рассматриваемые здесь распределения - это их математическое описание.

Говорят, что *распределение* T *равно нулю* на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если $\langle T, \varphi \rangle = 0$ для любой $\varphi(x) \in D$, носитель которой принадлежит Ω.

Определение 2. Наименьшее замкнутое множество, вне которого распределение T равно нулю, называется *носителем распределения* T (supp T).

Носителем распределения Дирака δ_a является одна точка a; если $f(x)$ - непрерывная функция, то носитель $f(x)$ как распределения, совпадает с носителем $f(x)$ как функции.

Если пересечение носителей T и φ пусто, $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$, то $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

В дальнейшем, кроме пространства всех распределений D' будет встречаться ещё некоторое его подпространство $D'_\oplus$ — пространство распределений с носителями на положительной полуоси.

§ 13.3. Дифференцирование распределений

Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = \int\int_{\Re^n} ... \int \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \varphi(x) dx.$$

Учитывая, что область интегрирования ограничена, можно кратный интеграл записать в виде:

$$\int \int_{(x_2, x_3, ... x_n)} ... \int dx_2 dx_3 ... dx_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \varphi(x) dx_1.$$

К внутреннему интегралу применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \varphi(x) dx_1 = f(x) \cdot \varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1.$$

Так как вне ограниченного множества $\varphi(x) = 0$, то $f(x) \cdot \varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Следовательно,

$$\int\int_{\Re^n} ... \int \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \varphi(x) dx = - \int\int_{\Re^n} ... \int f(x) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx,$$

или

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle.$$

Определение. Производной $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ функционала T называется функционал, действующий по формуле

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle. \tag{13.1}$$

Легко проверить, что определённая таким образом прозводная $\frac{\partial T}{\partial x_1}$ действительно оказывается линейным непрерывным функционалом на D, то есть является распределением.

Аналогично определяются $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ для любого x_k :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle,$$

и производные высших порядков:

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle.$$

Таким образом, всякое распределение T имеет последовательные производные всех порядков, а последовательность дифференцирований можно менять. Имеет место формула:

$$\langle D^p T, \varphi \rangle = (-1)^{|p|} \langle T, D^p \varphi \rangle,$$

где

$$p = (p_1, p_2, ...p_n), \quad |p| = \sum_{i=1}^{n} p_i, \quad D^p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}.$$

Замечание. В частности, всякая интегрируемая функция $f(x)$, рассматриваемая как распределение, имеет производные всех порядков, но эти производные, вообще говоря, не являются функциями.

Пример 1. Пусть $n = 1, f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$ – обычная непрерывная и, следовательно, интегрируемая функция. Первая производная от неё, как распределения – это так называемая *единичная функция Хевисайда* или "единичная ступенька" $\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ Это всё ещё интегрируемая, хотя и разрывная, функция. Пользуясь формулой (13.1), вычислим η'_x :

$$\langle \eta'_x, \varphi \rangle = - \langle \eta, \varphi'_x \rangle =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x) \cdot \varphi'_x(x) dx = - \int_{0}^{\infty} \varphi'_x(x) dx = - \left. \varphi(x) \right|_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle .$$

Следовательно, $\eta' = \delta$.

Распределение δ в электричестве называют иногда "единичным импульсом". Таким образом, производная функции Хевисайда – это "единичный импульс". Если функция $f(x)$ имеет скачки в точках x_k, равные $f(x_k + 0) - f(x_k - 0) = c_k$, а в остальных точках непрерывно дифференцируема, то оказывается, что производная равна $f' = f'(x) + \sum\limits_k c_k \delta(x - x_k)$.

Применяя опрерацию дифференцирования к распределению δ, находим :

$$\left\langle \delta^{(m)}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(0).$$

Пример 2. Пусть $n = 3$. Найдём в $\mathbb{R}^n$ результат применения оператора Лапласа Δ к функционалу $1/r$ где $r = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$. Функция $1/r$ гармонична в любой области, не содержащей начала координат, следовательно, можно определить $\left\langle \Delta {}^1\!/_r, \varphi \right\rangle$ следующим образом:

$$\left\langle \Delta {}^1\!/_r, \varphi \right\rangle = \left\langle {}^1\!/_r, \Delta\varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \int\limits_{r \geq \varepsilon} \int \frac{\Delta\varphi}{r} dV,$$

то есть интеграл берётся по внешности шара радиуса ε при $\varepsilon \to 0$. Для этой области запишем вторую формулу Грина (9.7) из основных свойств гармонических функций:

$$\int \int\limits_{r \geq \varepsilon} \int \left(\frac{\Delta\varphi}{r} - \varphi \cdot \Delta \frac{1}{r} \right) dV = \int \int\limits_{r = \varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma.$$

Так как при $r \geq \varepsilon$ функция $1/r$ – гармоническая ($\Delta {}^1\!/_r = 0$), то

$$\int \int\limits_{r = \varepsilon} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \int \int\limits_{r = \varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma = \mathrm{O}(\varepsilon),$$

и

$$- \int \int\limits_{r = \varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma = - \frac{1}{\varepsilon^2} \int \int\limits_{r = \varepsilon} \varphi d\sigma \underset{\varepsilon \to 0}{\to} -4\pi\varphi(0),$$

то имеем

$$\left\langle \Delta {}^1\!/_r, \varphi \right\rangle = - - 4\pi\varphi(0) = -4\pi \langle \delta, \varphi \rangle ,$$

то есть $\Delta {}^1\!/_r = -4\pi\delta$ в смысле теории распределений.

§ 13.4. Действия с распределениями.

1. Умножение двух распределений. Для двух произвольных распределений S и T не всегда имеет смысл произведение $S \cdot T$. Даже когда распределение определяется интегрируемой функцией, например $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, произведение $f(x) \cdot f(x) = \frac{1}{|x|}$ уже не является интегрируемой функцией и не определяет распределения.

В случае, когда одно из распределений T — произвольно, а другое распределение α определяется бесконечно дифференцируемой функцией, произведение $\alpha \cdot T$ можно определить так: $\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle$. Для случая $T = f$, где f — интегрируемая функция, это равенство вытекает из обычных свойств интеграла:

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \int \int\limits_{\Re^n} ... \int [\alpha(x) f(x)]\varphi(x) dx = \int \int\limits_{\Re^n} ... \int f(x)[\alpha(x)\varphi(x)] dx = \langle T, \alpha\varphi \rangle .$$

Очевидно, что если $\varphi(x) \in D$ и $\alpha(x) \in C^\infty$, то $\alpha(x) \cdot \varphi(x) \in D$.

Пример.

$$T = \delta, \quad \langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle \alpha\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \alpha\varphi \rangle = \alpha(0)\varphi(0) = \langle \alpha(0)\delta, \varphi \rangle ,$$

Следовательно, $\alpha\delta = \alpha(0)\delta$, то есть всякое произведение, в которое входит δ, пропорционально δ.

Имеет место предложение: чтобы распределение T удовлетворяло соотношению $S \cdot T$ необходимо и достаточно, чтобы T было пропорционально δ ($T = c\delta$).

2. Тензорное произведение распределений.

Определение 1. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \Re^m$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \Re^n$, тогда

$$xy = (x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) \in \Re^{m+n}.$$

Пусть $f(x)$ и $g(y)$ — числовые функции на $\Re^m$ и $\Re^n$ соответственно. Тензорным произведением этих функций $f(x) \otimes g(y)$ назовём функцию $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$, определённую на $\Re^{m+n}$.

Обозначим через $(D)_x$, $(D)_y$, $(D)_{xy}$ пространства бесконечно дифференцируемых функций с ограниченными носителями на пространствах $\Re^m$, $\Re^n$ и $\Re^{m+n}$ соответственно, $(D')_x$, $(D')_y$, $(D')_{xy}$ — соответствующие пространства распределений.

Пусть $\varphi(x, y) \in (D)_{xy}$ — функция вида $U(x) \cdot V(y)$, где $U(x) \in (D)_x$, $V(y) \in (D)_y$. Тогда

$$\langle f(x) \otimes g(y), U(x) \cdot V(y) \rangle = \int \int\limits_{\Re^m \times \Re^n} ... \int [f(x)g(y)U(x)V(y)]\varphi(x) dx =$$

$$= \langle f(x), U(x) \rangle \cdot \langle g(y), V(y) \rangle .$$

Если же $\varphi(x, y)$ не имеет такого вида, то

$$\langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x, y) \rangle = \int \int\limits_{\Re^m \times \Re^n} ... \int [f(x)g(y)\varphi(x, y)] dx dy =$$

$$= \int \int\limits_{\Re^m} ... \int f(x) \left[\int \int\limits_{\Re^n} ... \int g(y)\varphi(x, y)) dy \right] dx = \langle f(x) \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle =$$

$$= \int \int\limits_{\Re^n} ... \int g(y) \left[\int \int\limits_{\Re^m} ... \int f(x)\varphi(x, y) dx \right] dy = \langle g(y) \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle .$$

Предложение: пусть $S_x \in (D')_x, T_y \in (D')_y$, тогда существует вполне определённое и единственное распределение $W_{xy} \in (D')_{xy}$ такое, что для любой $\varphi(x, y) \in (D)_{xy}$, имеющей вид $U(x) \cdot V(y)$, где $U(x) \in (D)_x$, $V(y) \in (D)_y$, справедливо равенство:

$$\langle W_{xy}, U(x) \cdot V(y) \rangle = \langle S, U \rangle \langle T, V \rangle .$$

Распределение W_{xy} называется *тензорным произведением* распределений S и T : $S_x \otimes T_y = W_{xy}$. Для любой $\varphi(x,y) \in (D)_{xy}$ имеем

$$\langle W, \varphi \rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x,y) \rangle \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x,y) \rangle \rangle .$$

Аналогично можно определить тензорное произведение трёх и любого числа распределений.

3. Свёртка распределений.

Определение 2. Пусть S и T $-$ два распределения на $\mathbb{R}^n$. Свёрткой этих распределений $S * T$ называется новое распределение на $\mathbb{R}^n$, определённое формулой

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle .$$

Правая часть этой формулы опрелена не всегда. Дело в том, что если $\operatorname{supp} S_\xi = A$, $\operatorname{supp} T_\eta = B$, то носитель $S_\xi \otimes T_\eta$ равен, очевидно, $A \times B$ $-$ множеству пар (ξ, η), где $\xi \in A, \eta \in B$; тогда как $\operatorname{supp} \varphi(\xi + \eta)$ состоит из тех ξ и η, для которых сумма $\xi + \eta \in K$. Напомним, что K $-$ это наименьшее замкнутое множество, вне которого функция φ равна нулю, называемая носителем функции φ; K $-$ ограниченное множество, но из ограниченности $\xi + \eta$ совсем не следует ограниченность множества изменения ξ и η.

Носитель $\varphi(\xi + \eta)$ - это полоса, параллельная прямой с уравнением $\xi + \eta = 0$. Приведённое определение свёртки будет иметь смысл, если только носитель $S_\xi \otimes T_\eta$ имеет ограниченное пересечение с носителем $\varphi(\xi + \eta)$, то есть если множество точек (ξ, η), где $\xi \in A, \eta \in B$; и $\xi + \eta \in K$, ограничено. В частности, свёртка $S * T$ существует, если хотя бы одно из распределений S или T имеет ограниченный носитель.

Можно показать, что если $S \in D'_\oplus$ и $T \in D'_\oplus$, где $D'_\oplus$ - пространство распределений с носителями на положительной полуоси, то свёртка $S * T$ существует и тоже принадлежит $D'_\oplus$.

Легко проверить, что имеет место свойство симметрии свёртки:

$$S * T = T * S.$$

Если S и T определяются локально интегрируемыми функциями $f(x)$ и $g(x)$, то свёртка $S * T$ тоже определяется локально интегрируемой функцией

$$h(x) = \int \int_{\Re^n} ... \int f(t) g(x - t) dt.$$

Действительно:

$$\langle f_\xi g_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle = \int \int_{\Re^n} ... \int f(\xi) g(\eta) \varphi(\xi + \eta) d\xi d\eta =$$

(после замены переменных $\xi + \eta = x$, $\eta = t$, получим)

$$= \int \int_{\Re^n} ... \int f(x - t) g(t) \varphi(x) d\xi d\eta = \langle h(x), \varphi(x) \rangle .$$

Вычислим свёртку $\delta * T$:

$$\langle \delta * T, \varphi \rangle = \langle \delta_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle \langle T_\eta \langle \delta_\xi, \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle = \langle T_\eta, \varphi(\eta) \rangle .$$

Таким образом,

$$\delta * T = T, \tag{13.2}$$

а это означает, что распределение δ является единицей свёртки.

Установим формулу дифференцирования свёртки

$$D^p (T * S) = D^p T * S = T D^p * S,$$

здесь приняты обозначения

$$p = (p_1, p_2, ..., p_n), \quad D^p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{p_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{p_n} .$$

Действительно,

$$\langle D^p(T*S),\varphi\rangle = \left\langle T*S,(-1)^{|p|}D^p\varphi\right\rangle = \left\langle S_\xi\left\langle T_\eta,(-1)^{|p|}D^p\varphi(\xi+\eta)\right\rangle\right\rangle =$$

$$= \langle S_\xi\langle D^pT_\eta,\varphi(\xi+\eta)\rangle\rangle = \langle D^pT*S,\varphi\rangle\,.$$

Аналогично проверяется и второе равенство:

$$D^p(T*S) = T*D^pS.$$

В частности

$$\delta'*T = \delta*T' = T'$$

и

$$P(D)\delta*T = P(D)T, \tag{13.3}$$

где $P(D)$ — дифференциальный оператор.

Операцию свёртки можно определить и для нескольких распределений. Пусть $R,$ S и T - три распределения на $\Re^n$ с носителями $A,$ B и $C.$ Свёртка $R*S*T$ определяется формулой

$$\langle R*S*T,\varphi\rangle = \langle R_\xi\otimes S_\eta\otimes T_\zeta,\varphi(\xi+\eta+\zeta)\rangle\,,$$

при условии, что сумма $\xi+\eta+\zeta$ ($\xi\in A,\ \eta\in B,\ \zeta\in C$) остаётся ограниченной только когда все три переменные ограничены. В этом случае

$$(R*S)*T = R*(S*T) = R*S*T.$$

§ 13.5. Уравнения в свёртках.

Уравнением в свёртках называется уравнение вида

$$T*X = S, \tag{13.4}$$

где известные распределения T и S предполагаются принадлежащими некоторому подпространству $A'\in D'$ такому, что свёртка двух или любого конечного числа распределений из A' всегда определена и снова принадлежит A' (то есть A' — это так называемая "свёрточная алгебра"). Неизвестное распределение X также ищется в A'.

Единицей в алгебре A' является, как уже отмечалось выше (см. формулу (13.2)), распределение $\delta.$ Если $\in A',$ то естественно определить обратный к T элемент T^{-1} равенством

$$T*T^{-1} = T^{-1}*T = \delta.$$

Легко проверить, что для разрешимости уравнения (18.4) необходимо и достаточно, чтобы распределение T имело обратный элемент $T^{-1}\in A'.$ Тогда $T^{-1}*(T*X) = T^{-1}*S$ и решение уравнения (18.4) представляется в виде

$$X = T^{-1}*S. \tag{13.5}$$

Другими словами: чтобы решить уравнение (13.4) при любой правой части $S,$ достаточно решить уравнение $T*Y=\delta,$ то есть найти обратный к T элемент $Y=T^{-1},$ называемый элементарным решением уравнения (13.4).

Решение уравнения (13.4) — это есть свёртка (13.5) элементарного решения с правой частью уравнения.

Многие уравнения математической физики могут рассматриваться как уравнения в свёртках. В частости, любое дифференциальное уравнение (обыкновенное или в частных производных)

$$P(D)X = \mu, \tag{13.6}$$

где $P(D)$ — дифференциальный оператор, μ — известное, а X — неизвестное распределение, пользуясь равенством (18.3) можем записать в виде:

$$P(D)\delta*X = \mu. \tag{13.7}$$

Для решения этого уравнения при любом μ достаточно найти обратный элемент к $P(D)\delta$ или решить уравнение

$$P(D)\delta * E = P(D)E = \delta.$$

Распределение E называют ещё фундаментальным решением уравнения (13.7).

Фундаментальное решение для уравнения Пуассона $\Delta X = \mu$ в $\Re^3$ найдено по существу в примере 2 параграфа 3 этой лекции.

Действительно, как следует из приведённых там вычислений,

$$\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta,$$

то есть

$$E = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Если $P(D)$ – обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$P(D) = a_0 D^m + a_1 D^{m-1} + ... + a_{m-1} D + a_m,$$

то можно показать (см., например, [7]), что обратным элементом к $P(D)\delta$ служат произведение $\eta(x)Y$, где Y – решение однородного уравнения $P(D)Y = 0$, удовлетворяющего условиям

$$Y(0) = Y'(0) = ... = Y^{(m-2)}(0) = 0; \;\; Y^{(m-1)}(0) = 1.$$

К виду (13.4) приводится и интегральное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) + \int\limits_0^x K(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{13.8}$$

где известные функции $f(x)$ и $K(x)$ и неизвестная $\varphi(x)$ считаются равными нулю на отрицательной полуоси. В этом случае уравнение (13.8) можно записать как

$$(\delta + K) * \varphi = f. \tag{13.9}$$

Обратный элемент к $\delta + K$ и решение уравнения (13.9)

$$\varphi = (\delta + K)^{-1} * f \tag{18.10}$$

принадлежат к пространству $D'_{\oplus}$.

§ 13.6. Преобразование Лапласа

При решении уравнений в свёртках часто пользуются преобразованием Лапласа. По существу, это знакомый операционный метод, "продолженный" на пространство распределений.

Считая известным классическое операционное исчисление, приведём здесь некоторые сведения о его применении в пространстве обощённых функций.

Определение. Преобразованием Лапласа распределения $T \in D'_{\oplus}$ называется голоморфная функция комплексной переменной p, определяемая формулой

$$\Gamma(p) = \left\langle T_x, e^{-px} \right\rangle. \tag{13.11}$$

Обозначение:

$$\Gamma(p) \risingdotseq T.$$

Известно, что классическое преобразование Лапласа определено не для всех функций $f(x)$, а лишь для так называемых функций-оригиналов, то есть функций, удовлетворяющих некоторым условиям. Причём условия эти сводятся, по существу, к тому, что должен существовать интеграл

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(x)e^{-px}dx.$$

Выражение (18.11) тоже имеет смысл не для всех распределений из $D'_{\oplus}$, но строгое описание множества "распределений-оригиналов"потребует введения дополнительных пространств и новых определений. Мы не будем этим заниматься, отметим только, что для обычных функций оригиналов всё остаётся без изменений. Сохраняются и известные свойства преобразования Лапласа. В частности, если $\Sigma(p) \risingdotseq S, \mathrm{T}(p) \risingdotseq T$, а $U = S * T$, то

$$\tilde{U} = \Im(p) \cdot \Gamma(p) \risingdotseq U.$$

Действительно,

$$\Omega(p) = \left\langle S * T, e^{-px} \right\rangle = \left\langle S_\xi \otimes T_\eta, e^{-p(\xi-\eta)} \right\rangle =$$

$$= \left\langle S_\xi, e^{-p\xi} \right\rangle \left\langle T_\eta, e^{-p\eta} \right\rangle = \Sigma(p) \cdot \mathrm{T}(p).$$

Единичная функция $\eta(x)$, как обычно, имеет изображение

$$\eta(x) \risingdotseq \left\langle \eta(x), e^{-px} \right\rangle = \int\limits_0^\infty e^{-px} dx = \frac{1}{p},$$

$$\eta(x) e^{\alpha x} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}, \quad \eta(x) \sin \alpha x \risingdotseq \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}, \quad \eta(x) \cos \alpha x \risingdotseq \frac{p}{p^2+\alpha^2}.$$

Кроме того, таблица изображений дополняется формулами:

$$\delta(x) \risingdotseq \left\langle \delta_x, e^{-px} \right\rangle = 1;$$

$$\delta'(x) \risingdotseq \left\langle \delta'_x, e^{-px} \right\rangle = -\left\langle \delta_x, (e^{-px})' \right\rangle = p;$$

....

$$\delta^{(k)}(x) \risingdotseq p^k.$$

Проиллюстрируем применение преобразования Лапласа двумя примерами.

Пример 1. Найти фундаментальное решение уравнения

$$P(D)U \equiv \frac{d^2U}{dx^2} + \omega^2 U = \mu.$$

Применим к равенству $P(D)\delta * E = \delta$, определяющему фундаментальное решение, преобразование Лапласа:

$$\left(\delta'' + \omega^2 \delta\right) * E \risingdotseq \left(p^2 + \omega^2\right) \cdot \mathrm{E}(p) = 1,$$

откуда $\mathrm{E}(p) = \frac{1}{(p^2+\omega^2)}$ и $E = \eta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega}$.

Пример 2. Решить уравнение $\int\limits_0^x \cos(x-t) f(t) dt = g(x)$. Запишем это уравнение в виде (13.4):

$$\eta(x) \cos x * f = g$$

и применим к нему преобразование Лапласа:

$$\frac{p}{p^2+1} \cdot F(p) = G(p).$$

Получим:

$$F(p) = \left(p + \frac{1}{p}\right) G(p),$$

откуда

$$f(x) = (\delta' + \eta) * g = g'(x) + \eta(x) \int\limits_0^x g(t) dt.$$

Производная $g'(x)$ здесь понимается в обобщённом смысле. Если функция $g(x)$ не дифференцируема как обычная функция, то решение $f(x)$ является уже обобщённой функцией.

ПРИЛОЖЕНИЕ I. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

ГЛАВА 14

§ 1.1. Понятие о краевых задачах

При изучении теории обыкновенных дифференциальных уравнений зачастую приходится решать так называемые *краевые,* или *граничные* задачи. В этих задачах значение искомой функции, её производных или их линейных комбинаций задаётся не в одной, а в двух точках, ограничивающих отрезок, на котором требуется определить решение. Например, в задаче о движении материальной точки массы m под действием силы $\vec{F}(t,\vec{r},\dfrac{d\vec{r}}{dt})$ нужно найти закон движения $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, если в начальный момент времени t_0 точка находилась в положении $\vec{r}_0$, а в момент t_1 – в положении $\vec{r}_1$. Задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения $m\,\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t,\ \vec{r},\ \dfrac{d\vec{r}}{dt})$ с краевыми условиями $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$.

С самого начала отметим, что краевая задача, вообще говоря, может иметь не единственное решение, или может вообще не иметь решения.

Пример. Найдём решение уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющее граничным условиям $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$. Общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$. Исходя из граничных условий, попробуем определить постоянные интегрирования C_1 и C_2. Из первого граничного условия следует, что $C_1 = 0$, тогда $y(x) = C_2\sin x$.

Если $x_1 \neq n\pi$, то из второго граничного условия находим $y_1 = C_2\sin x_1$, $C_2 = \dfrac{y_1}{\sin x_1}$, $y(x) = y_1\,\dfrac{\sin x}{\sin x_1}$. В этом случае решение поставленной задачи существует и единственно.

Если $x_1 = n\pi$, и $y_1 = 0$, то все кривые пучка $y(x) = C_2\sin x$ являются графиками решения этой задачи. Решение существует, но оно не единственно.

Если $x_1 = n\pi$, $y_1 \neq 0$, то решения задачи не существует.

При изучении уравнений математической физики особый интерес представляют краевые задачи для линейных уравнений второго порядка

$$y'' + p_1(x)\,y' + \ y = \varphi(x), \tag{14.1}$$

где функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $x_0 \le x \le x_1$, с линейными граничными условиями вида

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(x_0) + \beta_1 y(x_0) = u_0 \\ \alpha_2 y'(x_1) + \beta_2 y(x_1) = u_1 \end{cases} \qquad x_0 \le x \le x_1, \tag{14.2}$$

где α_i, β_i $(i = 1,2)$, u_0, u_1 - заданные числа, некоторые из которых могут быть равны нулю, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$, $(i = 1,2)$.

Если $\alpha_i = 0$ $(i = 1,2)$, то соответствующее граничное условие обычно называется условием *первого рода*, если $\beta_i = 0$ $(i = 1,2)$ - условием *второго рода*, а если α_i, β_i $(i = 1,2)$ одновременно отличны от нуля – условием *третьего рода*.

Краевые задачи, в которых правая часть уравнения не равна тождественно нулю, будем называть *неоднородными* краевыми задачами.

Краевые задачи для однородного уравнения с нулевыми граничными условиями ($u_0 = u_1 = 0$) будем называть *однородными* краевыми задачами.

Если мы рассматриваем краевую задачу первого рода с ненулевыми граничными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \tag{14.3}$$

то легко показать, что линейной заменой переменных

$$z = y - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) \tag{1.4}$$

граничные условия (14.3) сводятся к нулевым $z(x_0) = 0,\ z(x_1) = 0,$ причём линейность уравнения не нарушается и уравнение после замены сохранит свой линейный вид:

$$z'' + p_1(x)\ z' + \hat{p}_2(x)\ z = \hat{\varphi}(x). \tag{14.5}$$

Вернёмся к исходному уравнению (14.1). Для решения краевой задачи удобно переписать это уравнение в другом виде. Умножим его на $e^{\int p_1(x)dx}$, получим

$$y'' \cdot e^{\int p_1(x)dx} + p_1(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx} \cdot y' + p_2(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx} \cdot y = \varphi(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx}.$$

Легко видеть, что

$$y'' \cdot e^{\int p_1(x)dx} + p_1(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx} \cdot y' = \frac{d}{dx}\left(e^{\int p_1(x)dx} \cdot y'\right).$$

Обозначим

$$e^{\int p_1(x)dx} \overset{def}{=} p(x),$$

$$p_2(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx} \overset{def}{=} -\hat{q}(x),$$

$$\varphi(x) \cdot e^{\int p_1(x)dx} \overset{def}{=} f(x).$$

(Заметим, что функция $p(x)$ положительна: $p(x) > 0$). В результате получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\,[\ p(x)\ y'\ ] - \hat{q}(x)y = f(x). \tag{14.6}$$

Обозначим

$$\hat{L}[\ y\ ] \overset{def}{=} \frac{d}{dx}\,[\ p(x)\ y'\ ] - \hat{q}(x)y,$$

тогда уравнение (14.6) примет вид

$$\hat{L}[\ y\ ] = f(x).$$

§ 14.2. Задача Штурма - Лиувилля

Очевидно, что однородная краевая задача

$$\hat{L}[\ y\ ] = 0, \qquad \begin{cases} \alpha_1 y'(x_0) + \beta_1 y(x_0) = 0, \\ \alpha_2 y'(x_0) + \beta_2 y(x_0) = 0, \end{cases} \qquad x_0 \le x \le x_1,$$

всегда имеет тождественно равное нулю (так называемое *тривиальное*) решение $y(x) \equiv 0$. А когда такая задача имеет *нетривиальные*, то есть отличные от нуля решения?

Важным случаем решения таких однородных краевых задач являются так называемые *задачи на собственные значения*, состоящие в определении значений параметров, входящих в дифференциальное уравнение, при которых существуют *нетривиальные* решения однородной краевой задачи.

Для удобства дальнейшего рассмотрения переобозначим функцию $\hat{q}(x)$, входящую в уравнение (1.6),следующим образом: $-\hat{q}(x) \overset{def}{=} -q(x) + \lambda\rho(x)$, где $q(x)$ и $\rho(x)$ − заданные функции, непрерывные на сегменте $x_0 \le x \le x_1$, а λ − числовой параметр. Сохраняя обозначение

$$L[\ y\ ] \overset{def}{=} \frac{d}{dx}\,[\ p(x)\ y'\ ] - q(x)y,$$

перепишем однородное уравнение (14.6) в виде

$$L[\ y\ ] + \lambda\ \rho(x)\ y(x) = 0.$$

Типичной задачей на *собственные значения* для линейного дифференциального уравнения второго порядка является задача определения значений параметра λ, при которых существуют нетривиальные на $x_0 \le x \le x_1$ решения задачи

$$L[\ y\ ] + \lambda\ \rho(x)\ y(x) = 0, \qquad \begin{cases} \alpha_1 y'(x_0) + \beta_1 y(x_0) = 0, \\ \alpha_2 y'(x_1) + \beta_2 y(x_1) = 0, \end{cases} \tag{14.7}$$

где $\rho(x) > 0$ — известная непрерывная на $[\ x_0,\ x_1\ ]$ функция.

Такая задача на собственные значения называется *задачей Штурма - Лиувилля.*

Значения параметра λ, при которых задача (14.7) имеет нетривиальные решения, называются *собственными значениями*, а вся их совокупность — *спектром* этой задачи, соответствующие им нетривиальные решения — *собственными функциями* краевой задачи на собственные значения.

Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля обладают рядом замечательных свойств, которые широко используются не только при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, но и при решении краевых задач уравнений в частных производных.

Имеют место следующие свойства собственных значений и собственных функций краевой задачи (14.7).

Свойство 1. *Существует бесконечное счётное множество* $\{\lambda_n\}$ *собственных значений и соответствующая им бесконечная последовательность* $\{y_n(x)\}$ *собственных функций*. Это свойство мы доказывать не будем.

Ясно, что все собственные значения можно занумеровать в порядке возрастания их абсолютной величины $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots$.

Свойство 2. *Каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция.*

Доказательство. Предположим противное: пусть одному собственному значению λ_n соответствует две линейно независимые собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$. (Более двух линейно независимых решений существовать не может, т.к. порядок уравнения равен двум.) Используя граничные условия задачи (14.7), можем записать: $\begin{cases} \alpha_1 y_1'(x_0) + \beta_1 y_1(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_2'(x_0) + \beta_1 y_2(x_0) = 0. \end{cases}$ Рассмотрим эту систему как линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно α_1 и β_1. Поскольку заведомо известно, что $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \ne 0$, определитель этой однородной системы, совпадающий с определителем Вронского, должен равняться нулю: $W[\ y_1(x),\ y_2(x)\ ] = 0$. Но это невозможно, т.к. $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые функции, а определитель Вронского линейно независимых функций ни в одной точке не может обратиться в нуль. Полученное противоречие доказывает свойство.

Свойство 3. *В случае граничных условий* $y(x_0) = y(x_1) = 0$ *и при выполнении условия* $q \ge 0$ *все собственные значения краевой задачи (14.7) положительны:* $\lambda_n > 0$.

Доказательство. Умножим уравнение для собственной функции $y_n(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right] - q(x)y_n(x) + \lambda_n \rho(x) y_n(x) = 0$$

на функцию $y_n(x)$ и проинтегрируем результат по $[\ x_0,\ x_1\ ]$. Получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right] y_n(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} q(x)y_n^2(x)dx + \lambda_n \int_{x_0}^{x_1} \rho(x) y_n^2(x)dx = 0.$$

Преобразуем первый интеграл, интегрируя по частям:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_n}{dx}\right] y_n(x)dx = \underbrace{p(x)\frac{dy_n}{dx}\cdot y_n(x)\Big|_{x_0}^{x_1}}_{=0} - \int_{x_0}^{x_1} p(x)\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 dx.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю в силу граничных условий. Окончательно получим

$$\lambda_n \int_{x_0}^{x_1} \rho(x) y_n^2(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} p(x)\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 dx + \int_{x_0}^{x_1} q(x)y_n^2(x)dx,$$

что и доказывает утверждение.

Свойство 4. *Собственные функции* $y_n(x)$ *образуют на* $[\ x_0,\ x_1\ ]$ *ортогональную с весом* $\rho(x)$ *систему* $\{y_n(x)\}$:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} y_n(x)\ y_m(x)\ \rho(x)\ dx = 0, \qquad m \neq n.$$

Доказательство. Поскольку каждому собственному значению отвечает только одна собственная функция, то необходимо рассмотреть только случай, когда собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ соответствуют различным собственным значениям $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Запишем для этих собственных функций уравнения

$$L[y_n(x)] + \lambda_n\ \rho(x)\ y_n(x) = 0, \quad L[y_m(x)] + \lambda_m\ \rho(x)\ y_m(x) = 0.$$

Умножим первое из этих уравнений на $y_m(x)$, второе – на $y_n(x)$, потом проинтегрируем каждое получившееся уравнение по $[\ x_0,\ x_1\ ]$, а результат интегрирования вычтем почленно один из другого:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} (y_m L[y_n] - y_n L[y_m])dx + (\lambda_n - \lambda_m) \int\limits_{x_0}^{x_1} \rho(x) y_m y_n dx = 0.$$

Преобразуя первый интеграл, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \left(y_m \frac{d}{dx}\,(p(x)y_n') - y_n \frac{d}{dx}\,(p(x)y_m') \right) dx +$$

$$+(\lambda_n - \lambda_m) \int\limits_{x_0}^{x_1} \rho(x) y_m y_n dx = 0.$$

Прямым вычислением легко показать, что это выражение можно представить в виде:

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\,[(y_m y_n' - y_n y_m')\,p(x)]dx + (\lambda_n - \lambda_m) \int\limits_{x_0}^{x_1} \rho(x) y_m y_n dx = 0,$$

откуда

$$\underbrace{[(y_m y_n' - y_n y_m')\,p(x)]\big|_{x_0}^{x_1}}_{=0} + (\lambda_n - \lambda_m) \int\limits_{x_0}^{x_1} \rho(x) y_m y_n dx = 0.$$

Первое слагаемое в этом выражении равно нулю вследствие граничных условий. Поскольку $\lambda_n \neq \lambda_m$, заключаем, что

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} y_n(x)\ y_m(x)\ \rho(x)\ dx = 0, \qquad m \neq n.$$

Таким образом, собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (а их бесконечно много) образуют ортогональную с весом $\rho(x)$ систему.

Теорема разложимости В.А. Стеклова. *Если функция* $f(x)$ *дважды непрерывно дифференцируема на* $[\ x_0,\ x_1\ ]$ *и удовлетворяет однородным граничным условиям*

$$\begin{cases} \alpha_1 f'(x_0) + \beta_1 f(x_0) = 0, \\ \alpha_2 f'(x_1) + \beta_2 f(x_1) = 0, \end{cases}$$

то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на $[\ x_0,\ x_1\ ]$ *ряд по собственным функциям* $y_n(x)$ *задачи Штурма-Лиувилля:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(x). \tag{14.8}$$

Доказательства теоремы Стеклова мы приводить не будем. Укажем только, что свойство ортогональности собственных функций позволяет легко определить коэффициенты разложения a_n. Действительно, умножая обе части формулы (14.8) на $y_m(x)\ \rho(x)$ и интегрируя результат по $[\ x_0,\ x_1\ ]$ (почленное интегрирование ряда возможно в силу его равномерной сходимости), получим

$$a_m = \frac{\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x) y_m(x)\rho(x)dx}{\int\limits_{x_0}^{x_1} y_m^2(x)\rho(x)dx}. \tag{14.9}$$

Выражение, стоящее в знаменателе, в пространстве квадратично интегрируемых с весом ρ функций, называется *квадратом нормы* собственной функции и обозначается

$$\|y_m\|^2 = N_m^2 = \int\limits_{x_0}^{x_1} y_m^2(x)\rho(x)dx. \tag{14.10}$$

Так как собственные функции определены с точностью до постоянного множителя, то во многих случаях их нормируют так, чтобы $N_m = 1$. В этом случае система $\{y_n(x)\}$ является ортонормированной.

Пример. Хорошо знакомое нам уравнение

$$y'' + a^2 y = 0, \tag{14.11}$$

очевидно, является частным случаем более общего, только что исследованного нами, уравнения (14.7)

$$\frac{d}{dx}\,[\ p(x)\ y'\ ] - q(x)y + \lambda\ \rho(x)\ y(x) = 0,$$

которое получается из него, если положить $p(x) = 1,\ q(x) = 0,\ \rho(x) = 1,\ \lambda = a^2$.

Найдём решение уравнения (14.11), удовлетворяющее граничным условиям $y(0) = y(l) = 0$. иначе говоря, решим для этого уравнения задачу Штурма-Лиувилля.

Отметим, что с решением этого уравнения с данными граничными условиями мы уже встречались в главе 6 при решении задачи о свободных колебаниях струны с закреплёнными концами.

Общее решение имеет вид $y(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$. Из первого граничного условия следует, что $C_1 = 0$, следовательно, $y(x) = C_2 \sin ax$. Вследствие второго граничного условия $y(x) = C_2 \sin al = 0$. Так как C_2 уже нельзя полагать равным нулю, потребуем, чтобы $\sin al = 0$. Тогда $al = \pi n$, $a = \frac{\pi n}{l}$, $a^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \stackrel{def}{=} \lambda_n$. Ясно, что этот результат является очевидным отражением свойств 1 и 3 краевой задачи (14.7).

Решение нашего уравнения, удовлетворяющее поставленным граничным условиям, имеет вид $y(x) = C_2 \sin \frac{n\pi}{l} x$. Легко видеть, что такой вид решения является отражением свойства 2: каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция.

Из курса математического анализа известно, что функции $\sin \frac{n\,\pi}{l}\ x$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ образуют на интервале $(0,\ l)$ ортогональную систему функций с весом, равным 1, по которой заданную на интервале $(0,\ l)$ функцию $f(x)$, удовлетворяющую определённым требованиям, можно разложить в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

где

$$\beta_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

– этот результат, очевидно, является отражением доказанного нами ранее свойства 4 и теоремы разложимости В. А. Стеклова.

ПРИЛОЖЕНИЕ II. СВЕДЕНИЯ О СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

ЛЕКЦИЯ 15

§ 15.1. Функции Бесселя

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d}{dx}\,[\ p(x)\ y'\ ] - q(x)y + \lambda\ \rho(x)\ y(x) = 0.$$

С этим уравнением мы уже встречались в первой главе, когда мы рассматривали задачу Штурма-Лиувилля (14.7). Напомним, что в этом уравнении $p(x) > 0$, $\rho(x) > 0$. Далее, мы положим, что $q(x) \geq 0$, а λ – действительный или комплексный числовой параметр.

Если в этом уравнении мы положим $p(x) = \rho(x) = 1$, $q(x) = 0$, $\lambda = a^2$, получим уравнение $y'' + a^2 y = 0$, исследованное нами в конце предыдущей главы.

При $p(x) = x$, $\rho(x) = x$, $q(x) = \frac{\nu^2}{x}$, $(\nu \in R)$, имеем:

$$xy'' + y' + (\lambda x - \frac{\nu^2}{x})y = 0, \tag{15.1}$$

или

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (\lambda - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0.$$

Полученное уравнение называется уравнением Бесселя. Поделив это уравнение на λ и полагая $\lambda > 0$, получим

$$\frac{d}{d(\sqrt{\lambda}x)}\left(\frac{dy}{d(\sqrt{\lambda}x)}\right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}x}\frac{dy}{d(\sqrt{\lambda}x)} + \left(1 + \frac{\nu^2}{(\sqrt{\lambda}x)^2}\right)y = 0.$$

Заменяя переменные по правилу $\sqrt{\lambda}x \to x$, получим:

$$y'' + \frac{1}{x}y + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0. \tag{15.2}$$

Умножив это уравнение на x^2, получим окончательный вид искомого уравнения:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0. \tag{15.3}$$

Уравнение (15.3) – альтернативный вид уравнения Бесселя.

Решение этого уравнения будем искать в виде обобщённого степенного ряда:

$$y = x^\sigma(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k + ...) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\sigma+k}. \tag{15.4}$$

Здесь σ – вещественное число, пока нам неизвестное. Не уменьшая общности, можно считать, что $a_0 \neq 0$.

Подставим y из (15.4), его первую и вторую производные в уравнение Бесселя (15.3) и потребуем его тождественного удовлетворения. Из этого требования найдем условия на коэффициенты a_k этого ряда и на величину σ.

Имеем:

$y = a_0 x^\sigma + a_1 x^{\sigma+1} + a_2 x^{\sigma+2} + ... + a_k x^{\sigma+k} + ...$,

$y' = a_0 \sigma x^{\sigma-1} + a_1(\sigma+1)x^\sigma + a_2(\sigma+2)x^{\sigma+1} + ... + a_k(\sigma+k)x^{\sigma+k-1} + ...$,

$y'' = a_0\sigma(\sigma-1)x^{\sigma-2} + a_1(\sigma+1)\sigma x^{\sigma-1} + ... + a_k(\sigma+k)(\sigma+k-1)x^{\sigma+k-2} + ...$.

После подстановки получим:

$a_0\sigma(\sigma-1)x^\sigma + a_1(\sigma+1)\sigma x^{\sigma+1} + a_2(\sigma+2)(\sigma+1)x^{\sigma+2} + ...$
$... + a_k(\sigma+k)(\sigma+k-1)x^{\sigma+k} + a_0\sigma x^\sigma + a_1(\sigma+1)x^{\sigma+1} + a_2(\sigma+2)x^{\sigma+2} + ...$
$... + a_k(\sigma+k)x^{\sigma+k} + ... + a_0 x^{\sigma+2} + a_1 x^{\sigma+3} + a_2 x^{\sigma+4} + ...$
$... + a_{k-2}x^{\sigma+k} + a_{k-1}x^{\sigma+k+1} + a_k x^{\sigma+k+2} - \nu^2 a_0 x^\sigma - \nu^2 a_1 x^{\sigma+1} - \nu^2 a_2 x^{\sigma+2} - ...$
$... - \nu^2 a_k x^{\sigma+k} - \nu^2 a_{k+1}x^{\sigma+k+1} - \nu^2 a_{k2}x^{\sigma+k+2} = 0.$

Приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях x :

При x^σ : $a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0 \Rightarrow \sigma = \pm\nu$.

При $x^{\sigma+1}$: $a_1\left[(\sigma+1)^2 - \nu^2\right] = 0 \Rightarrow a_1 = 0$, так как иначе $\sigma = -\frac{1}{2} = \pm\nu$, а ν – это параметр уравнения Бесселя, который может быть любой величиной, в том числе и не равной $-\frac{1}{2}$.

При $x^{\sigma+2}$: $a_2\left[(\sigma+2)^2 - \nu^2\right] + a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{(\sigma+2-\nu)(\sigma+2+\nu)}$.

При $x^{\sigma+k}$: $a_k\left[(\sigma+k)^2 - \nu^2\right] + a_{k-2} = 0 \Rightarrow a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma+k-\nu)(\sigma+k+\nu)}$.

Далее необходимо рассматривать два различных случая:

1. ν не является целым числом,
2. ν - целое число. Необходимость различать эти два случая мы поясним чуть позже.

1. Пусть ν не является целым числом. Пусть $\sigma = +\nu$.

Поскольку $a_1 = 0$, то из формулы для a_k следует, что $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, и, далее, все $a_{2m-1} = 0$. Из той же формулы:

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m)(2\nu+2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(m+\nu)}.$$

$$a_{2m-2} = -\frac{a_{2m-4}}{(2m-2)(2\nu+2m-2)} = -\frac{a_{2m-4}}{2^2(m-1)(m-1+\nu)}.$$

Подставляя последнюю формулу в предыдущую, получим:

$$a_{2m} = (-1)^2 \frac{a_{2m-4}}{2^2 2^2 m(m-1)(m+\nu)(m-1+\nu)}.$$

Затем, a_{2m-4} можно выразить через a_{2m-6}, и так далее. Окончательно:

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m!(m+\nu)(m-1+\nu)...(1+\nu)}.$$

Вспомним свойства Γ - функции Эйлера, а именно: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, и, в частности, $\Gamma(m+1) = m!$ Тогда можно записать

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0 \Gamma(\nu+1)}{2^{2m}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}. \quad (m = 1, 2, 3...)$$

Здесь a_0 – произвольная постоянная. Пользуясь этой произвольностью, положим

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}.$$

Тогда

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}. \quad (m = 1, 2, 3...)$$

При этом решение уравнения Бесселя (2.3), которое мы искали в виде $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{\sigma+k}$, примет вид:

$$y \overset{def}{=} J_\nu = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m+\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}. \tag{15.5}$$

При $\sigma = -\nu$ все коэффициенты a_{2m-1} по-прежнему равны нулю, а коэффициенты a_{2m} вычисляются заменой $\nu \to -\nu$:

$$J_{-\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}. \tag{15.6}$$

Таким образом, мы получили два частных решения уравнения Бесселя (2.3) : J_ν – *функцию Бесселя с положительным индексом,* $J_{-\nu}$ – *функцию Бесселя с отрицательным индексом.* При нецелом индексе ν функции J_ν и $J_{-\nu}$ – это линейно независимые решения линейного дифференциального уравнения второго порядка. Его общим решением является линейная комбинация с постоянными коэффициентами двух линейно независимых решений этого уравнения:

$$y = C_1 J_\nu + C_2 J_{-\nu}. \tag{15.7}$$

Функции J_ν и $J_{-\nu}$ называются *цилиндрическими функциями первого рода.*

2. Пусть теперь ν – целое число: $\nu = l$ и пусть $l > 0$; если $l < 0$, то ν и $-\nu$ поменяются местами.

По-прежнему, формула (15.5) имеет место:

$$J_l = \left(\frac{x}{2}\right)^l \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}, \tag{15.8}$$

но в формуле (15.6) первые l слагаемых при $m = 0, 1, 2, ..., (l-1)$ имеют в знаменателе $\Gamma(m-l+1) = \infty$, поэтому суммирование в этой формуле начинается с $m = l$, то есть

$$J_{-l} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-l} \sum_{m=l}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

Сделаем замену: положим $m - l = k$, $m = k + l$. Тогда

$$J_{-l} = (-1)^l \left(\frac{x}{2}\right)^{+l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = (-1)^l J_l.$$

Отсюда видно, что функции Бесселя с положительным целым и отрицательным целым индексами *линейно зависимы.*

ГЛАВА 16

§ 16.1. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя

Вычислим сумму: $J'_\nu(x) + J_{\nu+1}(x) =$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}\right) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu+1}\right).$$

Далее возьмём производную в первой сумме и отдельно запишем первое слагаемое при $m = 0$, а во второй сумме сделаем замену индекса суммирования $m+1 = k$, $m = k-1$, и воспользуемся известным свойством Γ -функции Эйлера: $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$. Получим: $J'_\nu(x) + J_{\nu+1}(x) =$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+\nu)}{2\Gamma(m+1)\Gamma(m+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{\Gamma(k+1)\Gamma(K+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} =$$

$$= \frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+\nu)}{2\Gamma(m+1)\Gamma(m+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{\Gamma(k+1)\Gamma(K+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} =$$

$$= \frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{2k+\nu}{2} - k\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} =$$

$$= \nu \frac{x^{\nu-1}}{2^\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\nu \frac{x^{\nu-1}}{2^\nu}\right) \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{\nu}{x}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{\nu}{x}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{\nu}{x}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \frac{\nu}{x} J_\nu.$$

Таким образом,

$$J'_\nu(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \tag{16.1}$$

Аналогично:

$$J'_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x). \tag{16.2}$$

Вычитая из формулы (16.1) формулу (16.2), получим:

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x). \tag{16.3}$$

Полученная формула (16.3) выражает каждую функцию Бесселя индекса $(\nu + 1)$ через функции Бесселя двух предыдущих индексов.

§ 16.2. Функции Бесселя полуцелого индекса

Воспользуемся формулой (16.3) и найдём выражения для функций Бесселя с полуцелым индексом. Положив $\nu = 1/2$, имеем:

$$J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x). \tag{16.4}$$

Но

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

Поскольку $\Gamma(m+1) = m!$, $2^m \cdot m! = (2m)!!$ и
$\Gamma(m+3/2) = (m+1/2)\cdot(m-1/2)\cdot(m-3/2)\cdot \ldots \cdot 1/2 \cdot \Gamma(1/2) = \frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}}\sqrt{\pi}$, то
$J_{1/2}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m} 2^{m+1}}{(2m)!!(2m+1)!!2^m\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m+1)!} =$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Итак:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \tag{16.5}$$

Аналогично

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \tag{16.6}$$

В таком случае формула (16.4) даёт:

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x} \sin x - \cos x \right). \tag{16.7}$$

Положив $\nu = 3/2$ в формуле (16.3), имеем:

$$J_{5/2}(x) = \frac{3}{x} J_{3/2}(x) - J_{1/2}(x) = \frac{3}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x} \sin x - \cos x \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Окончательно,

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right]. \tag{16.8}$$

Положив в формуле (16.3) $\nu = -1/2$, имеем:

$$J_{1/2}(x) = -\frac{1}{x} J_{-1/2}(x) - J_{-3/2}(x) \;\Rightarrow\; J_{-3/2}(x) = -J_{1/2}(x) - \frac{1}{x} J_{-1/2}(x).$$

Окончательно:

$$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin x + \frac{1}{x} \cos x \right], \tag{16.9}$$

и так далее.

§ 16.3. Функции Неймана и Ханкеля

Наряду с функциями Бесселя – цилиндрическими функциями первого рода – в приложениях часто употребляют и другие функции, составленные из функций Бесселя посредством линейных комбинаций и, следовательно, удовлетворяющих уравнению Бесселя. Например, при *нецелом* ν можно составить такую комбинацию:

$$N_\nu(x) = (\operatorname{ctg} \pi\nu) \cdot J_\nu(x) - \frac{1}{\sin \pi\nu} J_{-\nu}(x) = \frac{J_\nu(x) \cdot \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}. \tag{16.10}$$

Эта функция называется функцией Неймана или цилиндрической функцией второго рода.

Для вычисления $N_\nu(x)$ при *целом* ν, то есть при $\nu = l$, рассмотрим предельный переход при $\nu \to l$ к целому числу и воспользуемся при этом правилом Лопиталя. Имеем:

$$N_l(x) = \lim_{\nu \to l} \frac{J_\nu(x) \cdot \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} = \lim_{\nu \to l} \frac{\frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} \cdot \cos \pi\nu - \pi \sin \pi\nu - \frac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu}}{\pi \cos \pi\nu} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{dJ_\nu(x)}{d\nu} - (-1)^l \frac{dJ_{-\nu}(x)}{d\nu} \right] \Big|_{\nu = l}.$$

Окончательно:

$$N_l(x) = \frac{1}{\pi} \left[(J_\nu(x))'_\nu - (-1)^l \, (J_{-\nu}(x))'_\nu \right] \big|_{\nu = l}. \tag{16.11}$$

В чём преимущество функции Неймана? Дело в том, что при *любом* ν в отличие от функций Бесселя, совокупность функций Бесселя и функций Неймана дают два линейно независимых решения уравнения Бесселя, поэтому

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_l(x) \tag{16.12}$$

есть общее решение уравнения Бесселя (доказательство этого факта мы пропускаем).

Часто употребляются следующие две комбинации, называемые функциями Ханкеля (1-я и 2-я функции Ханкеля):

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \tag{16.13}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x), \tag{16.14}$$

Их также называют цилиндрическими функциями третьего рода.

При достаточно больших x, то есть когда $x \to \infty$, асимптотическое поведение изучаемых нами функций следующее:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \tag{16.15}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \tag{16.16}$$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + O(x^{-3/2}), \tag{16.17}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4})} + O(x^{-3/2}). \tag{16.18}$$

Эти формулы мы приводим без доказательства.

§ 16.4. Ортогональность функций Бесселя. Ряды по функциям Бесселя

Из приведённой выше асимптотической формулы (16.15) для функции Бесселя $J_\nu(x)$ следует, что $J_\nu(x) = 0$ при $x = \mu_k^{(\nu)} = k\pi + \frac{3}{4}\pi + \pi\nu$. Иначе говоря, при достаточно больших значениях аргумента функция Бесселя имеет бесконечное множество корней $\mu_k^{(\nu)}$, причем все корни вещественные и простые. Этот результат позволяет думать, что и в общем случае уравнение $J_\nu(x) = 0$ также имеет бесконечное множество корней $\mu_k^{(\nu)}$, причем все корни вещественные и простые. В дальнейших записях мы будем опускать верхний индекс нулей функции $J_\nu(x)$.

Итак, пусть μ_k – нули функции Бесселя $J_\nu(x)$. В предыдущей главе указывалась замена переменных $\sqrt{\lambda}x \to x$, приводящая уравнение Бесселя

$$xy'' + y' + (\lambda x - \frac{\nu^2}{x})y = 0, \tag{16.19}$$

к виду

$$xy'' + y' + (x - \frac{\nu^2}{x})y = 0. \tag{16.20}$$

Из этой замены следует, что если $J_\nu(x)$ – решение уравнения (16.19), то $J_\nu(\sqrt{\lambda}x)$ – решение уравнения (16.20).

Типичные краевые задачи для уравнения (16.19) состоят в нахождении таких значений параметра λ, при которых это уравнение имеет нетривиальное, ограниченное на заданном промежутке $(0,\ l)$ решение, удовлетворяющее краевому условию вида $\alpha y'(l) + \beta y(l) = 0$ на правом конце. К задачам такого типа относятся задачи Штурма - Лиувилля, рассмотренные нами выше. Возникает вопрос: будут ли ортогональными на промежутке $(0,\ l)$ решения (16.20), удовлетворяющие краевым условиям $\alpha y'(l) + \beta y(l) = 0$, то есть функции Бесселя $J_\nu(\sqrt{\lambda_1}x)$ и $J_\nu(\sqrt{\lambda_2}x)$, в которых значения λ_1 и λ_2 параметра λ определяются из краевого условия $\alpha y'(l) + \beta y(l) = 0$? При этом естественно ожидать ортогональности с весом $\rho(x) = x$, как это видно из уравнения (16.20).

Теорема. *Функции Бесселя $J_\nu(\mu_k x)$ обладают свойством ортогональности на промежутке $(0,\ 1)$ с весом $\rho(x) = x$:*

$$\int_0^1 x J_\nu(\mu_i x) J_\nu(\mu_j x) dx = 0, \tag{16.21}$$

где μ_i и μ_j – корни уравнения $J_\nu(\mu) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функции $J_\nu(\mu_i x)$ и $J_\nu(\mu_j x)$ и выпишем уравнения Бесселя вида (15.1), которым соответственно эти функции удовлетворяют:

$$x\left(J_\nu(\mu_i x)\right)'' + \left(J_\nu(\mu_i x)\right)' + \left(\mu_i^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu_i x) = 0,$$

$$x\left(J_\nu(\mu_j x)\right)'' + \left(J_\nu(\mu_j x)\right)' + \left(\mu_j^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(\mu_j x) = 0.$$

Умножим первое из этих равенств на $J_\nu(\mu_j x)$, второе — на $J_\nu(\mu_i x)$ и вычтем:

$$x\left(J_\nu(\mu_i x)\right)'' \cdot J_\nu(\mu_j x) + \left(J_\nu(\mu_i x)\right)' \cdot J_\nu(\mu_j x) - x\left(J_\nu(\mu_j x)\right)'' \cdot J_\nu(\mu_i x) -$$
$$- \left(J_\nu(\mu_j x)\right)' \cdot J_\nu(\mu_i x) = \left(\mu_j^2 - \mu_i^2\right) x J_\nu(\mu_i x) J_\nu(\mu_j x). \tag{16.22}$$

Нетрудно убедиться в том, что равенство (16.22) может быть переписано в виде:

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(J_\nu(\mu_i x)\right)' \cdot J_\nu(\mu_j x) - x\left(J_\nu(\mu_j x)\right)' \cdot J_\nu(\mu_i x)\right] =$$
$$= \left(\mu_j^2 - \mu_i^2\right) x J_\nu(\mu_i x) J_\nu(\mu_j x). \tag{16.23}$$

(Это проверяется непосредственным дифференцированием в левой части (3.22)). Проинтегрируем (16.23) от нуля до единицы:

$$\int\limits_0^1 x J_\nu(\mu_i x) J_\nu(\mu_j x) dx =$$
$$= \frac{1}{\left(\mu_j^2 - \mu_i^2\right)}\left[x\left(J_\nu(\mu_i x)\right)' \cdot J_\nu(\mu_j x) - x\left(J_\nu(\mu_j x)\right)' \cdot J_\nu(\mu_i x)\right]\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{\left(\mu_j^2 - \mu_i^2\right)}\left(\mu_i\left(J_\nu(\mu_i)\right)' \cdot J_\nu(\mu_j) - \mu_j\left(J_\nu(\mu_j)\right)' \cdot J_\nu(\mu_i)\right). \tag{16.24}$$

Так как μ_i и μ_j — нули функции $J_\nu(\mu)$, то при $\mu_i \neq \mu_j$ из равенства (16.24) имеем $\int\limits_0^1 x J_\nu(\mu_i x) J_\nu(\mu_j x) dx = 0$ — ортогональность функций Бесселя с весом x, что и утверждалось.

Если же в (16.24) перейти к пределу при $\mu_i \to \mu_j$, то раскрывая неопределённость в правой части с помощью правила Лопиталя, найдём скалярный квадрат (норму) функции $J_\nu(\mu_j)$:

$$\int\limits_0^1 x J_\nu^2(\mu_j x) dx = \frac{\left(J_\nu(\mu_j)\right)' J_\nu(\mu_j) + \mu_j\left(J_\nu(\mu_j)\right)'' J_\nu(\mu_j) - \left(J_\nu(\mu_j)\right)'\left(J_\nu(\mu_j)\right)'}{-2\mu_j}. \tag{16.25}$$

Далее, из тождества

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right) J_\nu(x) \equiv 0$$

находим

$$-J_\nu''(\mu_j) = \frac{1}{\mu_j} J_\nu'(\mu_j) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_j^2}\right) J_\nu(\mu_j).$$

Подставляя это значение производной $J_\nu''(\mu_j)$ в формулу (16.25), получим

$$\int\limits_0^1 x J_\nu^2(\mu_j x) dx = \frac{1}{2}\left(J_\nu'(\mu_j)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_j^2}\right) J_\nu^2(\mu_j).$$

Учтём теперь, что $J_\nu(\mu_j) = 0$, а из формулы (16.1) следует, что

$$\left(J_\nu'(\mu_j)\right)^2 = \left(\frac{\nu}{\mu_j} J_\nu(\mu_j) - J_{\nu+1}(\mu_j)\right)^2 = J_{\nu+1}^2(\mu_j).$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^1 x J_\nu^2(\mu_j x) dx \stackrel{def}{=} \left\|J_{\nu+1}(\mu_j x)\right\|^2 = \frac{1}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_j). \tag{16.26}$$

Ортогональность функций Бесселя позволяет произвольную функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0,\ 1)$, представить функциональным рядом

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\nu(\mu_i x), \tag{16.27}$$

где

$$a_i = \frac{2}{J^2_{\nu+1}(\mu_j)} \int\limits_0^1 x f(x) J_\nu(\mu_i x) dx.$$

Этот ряд называется рядом Фурье - Бесселя функции $f(x)$.

Имеет место теорема: если функция $\sqrt{x} f(x)$ абсолютно интегрируема на $[0,\ 1]$ и $\nu \geq -\frac{1}{2}$, то ряд Фурье - Бесселя функции $f(x)$ при $x \in (0,1)$ сходится одновременно с обычным рядом Фурье функции $f(x)$.

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем.

ЛЕКЦИЯ 17

§ 17.1. Уравнение Лежандра и полиномы Лежандра

Вспомним основное уравнение, от которого мы исходим:

$$\frac{d}{dx}\,[\ p(x)\ y'\ ] - q(x) y + \lambda\ \rho(x)\ y(x) = 0$$

и рассмотрим следующий частный случай: $p(x) = 1 - x^2$, $\rho = 1$, $q(x) = 0$, $\lambda = n(n+1)$, $n \in N$. Тогда уравнение примет вид:

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1) = 0. \tag{17.1}$$

Это — *уравнение Лежандра.*

Сейчас мы укажем способ нахождения счётного числа решений уравнения Лежандра при $n = 0, 1, 2, \ldots$. С этой целью рассмотрим вспомогательную функцию $W(x,t)$, которую принято называть "производящей функцией", смысл такого названия станет ясным из дальнейшего рассмотрения:

$$W(x,t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2tx + 1}}, \quad |t| < 1, \tag{17.2}$$

и разложим эту функцию в ряд Тейлора:

$$W(x,t) = W(x,0) + \left.\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} t + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} t^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n W(x,t)}{\partial t^n}\right|_{t=0} t^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \tag{17.3}$$

При $|t| < 1$ ряд (17.3) сходится, коэффициенты его вычисляются по формуле:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n W(x,t)}{\partial t^n}\right|_{t=0}$$

и называются *полиномами Лежандра.*

Легко вычислить несколько первых коэффициентов этого разложения:

$$P_0(x) = W(x,0) = 1,$$

$$P_1(x) = \left.\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{2}\left.\frac{2t - 2x}{(t^2 - 2tx + 1)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=0} = \left.\frac{x - t}{(t^2 - 2tx + 1)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=0} = x.$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{2!}\left.\left[\frac{-1}{(t^2 - 2tx + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2}\,\frac{2(x-t)^2}{(t^2 - 2tx + 1)^{\frac{5}{2}}}\right]\right|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Для вычисления остальных полиномов Лежандра получим рекуррентную формулу и с её помощью покажем, что эти полиномы являются *решениями уравнения Лежандра.* Для этого:

1. Продифференцируем равенство

$$W(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t^2-2tx+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \tag{17.4}$$

по t:

$$\frac{x-t}{(t^2-2tx+1)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)P_{k+1}(x)t^k,$$

2. Умножим обе части этого равенства на $(t^2-2tx+1)$:

$$\frac{x-t}{(t^2-2tx+1)^{\frac{1}{2}}}=(x-t)W(x,t)=$$

$$=(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=(t^2-2tx+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n.$$

Раскрывая скобки, видим, что

$$x\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^{n+2}-$$

$$-2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n.$$

3. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t^n:

$$xP_n(x)-P_{n-1}(x)=(n-1)P_{n-1}(x)-2xnP_n(x)+(n+1)P_{n+1}(x).$$

Окончательно:

$$(n+1)P_{n+1}(x)=x(2n+1)P_n(x)-nP_{n-1}(x). \tag{17.5}$$

Это и есть искомая рекуррентная формула.

Очевидно, что нами получено тождество, поскольку равенство удовлетворяется при любых значениях аргумента x.

Из этой формулы:
при $n=1$: $2P_2(x)=3xP_1(x)-P_0(x)$,
при $n=2$: $3P_3(x)=5xP_2(x)-2P_1(x)$,
при $n=3$: $4P_4(x)=7xP_3(x)-3P_2(x)$, и так далее...

4. Покажем теперь, что $P_n(x)$ удовлетворяет уравнению Лежандра. Предварительно получим ещё одно полезное соотношение.

Из формулы (17.4) следует, что

$$(x-t)W(x,t)=(t^2-2xt+1)W'_t(x,t). \tag{17.6}$$

Продифференцируем (4.4) по x:

$$\frac{1}{2}\frac{2t}{(t^2-2xt+1)^{\frac{3}{2}}}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n\right)'_x=W'_x(x,t).$$

Умножим это равенство на $(t^2-2xt+1)$. Преобразуя, получим:

$$t\cdot W(x,t)=(t^2-2xt+1)\cdot W'_x(x,t). \tag{17.7}$$

Сравнивая равенства (17.6) и (17.7), видим, что

$$t\cdot W'_t(x,t)=(x-t)\cdot W'_x(x,t), \tag{17.8}$$

или

$$t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(x)t^n-t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}P'_n(x)t^n.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t^n :

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x). \tag{17.9}$$

Равенство (17.9) — и есть то самое полезное соотношение, необходимое нам для дальнейших вычислений.

Продифференцируем рекуррентное соотношение (17.5):

$$(n+1)P'_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x) + x(2n+1)P'_n(x) - nP'_{n-1}(x).$$

В последнем слагаемом данного соотношения воспользуемся равенством (17.9). После приведения подобных получим:

$$(n+1)P'_{n+1}(x) - (n+1)^2 P_n(x) - x(n+1)P'_n(x) = 0.$$

Сократим равенство на $(n+1)$ и заменим $(n+1)$ на n :

$$P'_n(x) - nP_{n-1}(x) - xnP'_{n-1}(x) = 0.$$

В последнем слагаемом опять воспользуемся равенством (17.9) и приведём подобные:

$$(1-x^2)P'_n(x) + nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0. \tag{17.10}$$

Продифференцируем (17.10) по x. После очевидных преобразований получим:

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \tag{17.11}$$

Поскольку рекуррентное соотношение (17.5) выполняется при любых значениях аргумента x, то есть является тождеством, то и полученное равенство (17.11) тоже является тождеством. Сравнивая (17.11) с уравнением Лежандра (17.1), видим, что полиномы Лежандра $P_n(x)$ тождественно удовлетворяют уравнению Лежандра (17.1), то есть являются их решениями, что и требовалось доказать.

Легко показать, что $P_n(x)$ — решение уравнения (17.1), ограниченное в точках $x = \pm 1$. Действительно: $W(1,t) = \frac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$, то есть $P_n(1) = 1$. Аналогично: $W(-1,t) = \frac{1}{1+t} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(-1)t^n$, $P_n(-1) = (-1)^n$.

Иначе говоря, $P_n(x)$ действительно ограничена в точках $x = +1$ и $x = -1$, где коэффициент при старшей производной в уравнении (17.1) обращается в нуль. Аналогично уравнению Бесселя, существует второе линейно независимое решение уравнения Лагранжа, обращающееся в бесконечность в этих точках. Этим решением мы заниматься не будем.

§ 17.2. Формула Родрига

Для вычисления полиномов Лежандра существует очень удобная формула

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n \right],$$

которая называется *формулой Родрига*.

Докажем эту формулу. Выше мы уже видели, что

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n W(x,t)}{\partial t^n} \right|_{t=0}.$$

С другой стороны, согласно одному из следствий интегральной формулы Коши, производная n-го порядка $\frac{\partial^n W(x,t)}{\partial t^n}$ от функции $W(x,t)$ при $t=0$ вычисляется по формуле

$$\left. \frac{\partial^n W(x,t)}{\partial t^n} \right|_{t=0} = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{W(x,\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

где C − замкнутый контур, охватывающий точку $\zeta = 0$. В этом интеграле произведём замену переменной интегрирования $\zeta \to z$:

$$\sqrt{\varsigma^2 - 2\varsigma x + 1} = 1 - \varsigma z.$$

Получим

$$P_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{\frac{1}{2^n n!}(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz,$$

где C_1 − замкнутый контур, охватывающий точку $\zeta = x$.

Используя формулу для n-й производной интеграла Коши, получим:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

Формула доказана. Из этой формулы видно, что $P_n(x)$ действительно является многочленом, и притом n-го порядка.

В приложениях бывает полезно интегральное представление полиномов Лежандра, которое мы здесь приведём без доказательства:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^n d\varphi, \qquad x \in [-1, +1].$$

Пользуясь интегральным представлением, легко увидеть ограниченность полиномов Лежандра на всём отрезке $\in [-1, +1]$.

Действительно: так как $\left|x + i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right| = \sqrt{x^2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} \le 1$, то $|P_n(x)| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} 1^n d\varphi = 1$, что и утверждалось.

§ 17.3. Ортогональность полиномов Лежандра

Докажем, что

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \ne n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}.$$

Для этого запишем тот факт, что $P_n(x)$ и $P_m(x)$ удовлетворяют уравнениям Лежандра:

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0,$$

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

Первое из этих уравнений умножим на $P_m(x)$, второе − на $P_n(x)$ и вычтем:

$$(1-x^2)\left[P_n''(x)P_m(x) - P_m''(x)P_n(x)\right] - 2x\left[P_n'(x)P_m(x) - P_m'(x)P_n(x)\right] +$$
$$+ \left[n(n+1) - m(m+1)\right]P_n(x)P_m(x) = 0.$$

Проинтегрируем это равенство от -1 до $+1$, заметив, что первые два слагаемых являются производной от выражения $(1-x^2)\left[P_n'(x)P_m(x) - P_m'(x)P_n(x)\right]$:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left[P_n'(x)P_m(x) - P_m'(x)P_n(x)\right]\right]dx +$$

$$+ \left[n(n+1) - m(m+1)\right]\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0,$$

$$\left[(1-x^2)\left[P_n'(x)P_m(x) - P_m'(x)P_n(x)\right]\right]\Big|_{-1}^{+1} +$$

$$+ \left[n(n+1) - m(m+1)\right]\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0.$$

Ясно, что первое слагаемое равно нулю, и если $m \neq n$, то

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \tag{17.12}$$

а если $m = n$, имеем тождество.

Для того чтобы вычислить $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)dx = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$ при $m = n$, воспользуемся рекуррентным соотношением (17.5), заменив в нём $(n+1) \mapsto n$:

$$nP_n(x) = x(2n-1)P_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x).$$

Умножим это равенство на $P_n(x)$ и проинтегрируем полученное равенство от -1 до $+1$:

$$n\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)\left[x(2n-1)P_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)\right]dx,$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(2n-1)}{n}\int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)P_n(x)dx - \frac{(n-1)}{n}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n-2}(x)P_n(x)dx}_{=0}.$$

Последнее слагаемое в этом равенстве, вследствие ортогональности полиномов Лежандра, равно нулю. Воспользуемся ещё раз рекуррентным соотношением (17.5):

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x).$$

Получим:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(2n-1)}{n}\frac{n+1}{2n+1}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx}_{=0} +$$

$$+\frac{(2n-1)}{n}\frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(2n-1)}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx.$$

Из этого равенства следует, что

$$\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = \frac{(2n-3)}{2n-1}\int_{-1}^{1} P_{n-2}^2(x)dx.$$

Поскольку $\int_{-1}^{1} P_0^2(x)dx = \int_{-1}^{1} dx = 2,$ последовательное применение этих равенств даёт:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{17.13}$$

Тем самым мы доказали, что

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} \quad 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} \overset{def}{=} \left\|P_n(x)\right\|^2, & m = n \end{cases}. \tag{17.14}$$

Как и в случае с функциями Бесселя, ортогональность полиномов Лежандра позволяет произвольную функцию $f(x)$, заданную на интервале $(-1,\ +1)$, представить функциональным рядом

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x), \tag{17.15}$$

где коэффициенты разложения имеют вид

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}f(x)\cdot P_n(x)dx \tag{17.16}$$

и называются коэффициентами *Эйлера - Фурье - Лежандра*.

Можно доказать (мы этого делать не будем), что если функция $f(x)$ − кусочно-гладкая, то ряд (17.15) сходится.

ЛЕКЦИЯ 18

§ 18.1. Присоединённые функции Лежандра

Наряду с уравнением Лежандра (17.1) и его решениями − полиномами Лежандра в приложениях часто встречается *присоединённое уравнение Лежандра*

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y-\frac{m^2}{1-x^2}y=0, \tag{18.1}$$

из которого уравнение (17.1) получается при $m=0$. Решения этого уравнения, ограниченные при $x=\pm1$, называются *присоединёнными функциями Лежандра* и обозначаются $P_n^m(x)$.

Теорема. *Присоединённые функции Лежандра связаны с полиномами Лежандра формулой*

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x). \tag{18.2}$$

Доказательство. В уравнении (18.1) сделаем замену переменной: положим $y(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot z(x)$. Тогда уравнение (18.1) приведётся к виду:

$$(1-x^2)z''(x)-2x(m+1)z'(x)+\left[n(n+1)-m(m+1)\right]z(x)=0. \tag{18.3}$$

Теперь подставим $P_n(x)$ в уравнение Лежандра. Получим тождество:

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)\equiv0. \tag{18.4}$$

Продифференцируем по x полученное тождество (18.4) m раз. Используя формулу Лейбница, получим:

$$(1-x^2)\left(\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right)''+m\left(\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)\right)''\cdot(-2x)+$$
$$+\frac{m(m+1)}{2}\left(\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}P_n(x)\right)''\cdot2-2x\left(\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right)'-$$
$$-m\left(\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)\right)'\cdot2+n(n+1)\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\equiv0.$$

Собирая подобные, получим:

$$(1-x^2)\left(\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right)''-2x(m+1)\left(\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right)'+$$
$$+\left[n(n+1)-m(m+1)\right]\left(\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right)\equiv0. \tag{18.5}$$

Сравнивая уравнение (18.3) с тождеством (18.5), видим, что $z(x) = \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ является решением уравнения (18.3), и, следовательно,

$$y(x) = P_n^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$$

является решением присоединённого уравнения Лежандра.

Из этого равенства следует, в частности, что поскольку $P_n(x)$ – многочлен порядка n, все $P_n^m(x)$ при $n > m$ равны нулю.

Аналогично тому, как это делалось для многочленов Лежандра, можно показать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \stackrel{def}{=} \|P_n^m\|^2, & n = k. \end{cases} \tag{18.6}$$

и всякую кусочно-гладкую на $(-1, \ +1)$ функцию $f(x)$ можно разложить в сходящийся ряд Фурье по присоединённым функциям Лежандра.

§ 18.2. Сферические функции

Важным классом специальных функций являются сферические функции. Они возникают, например, при решении уравнения Лапласа методом разделения переменных в сферических координатах. Так как непрерывные решения уравнения Лапласа называют *гармоническими функциями,* то сферические функции называют также *сферическими гармониками.*

Найдём внутри шаровой области (Ω), границей которой служит сфера радиуса a, ограниченные решения уравнения Лапласа $\Delta U = 0$, где $\Delta U \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.

Введём сферическую систему координат: $\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta. \end{cases}$

Оператор Лапласа в этой системе координат имеет следующий вид:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \tag{18.7}$$

Следовательно, для шаровой области (Ω) необходимо найти решение $U = U(r, \theta, \varphi)$ уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{18.8}$$

Будем искать частные решения этого уравнения методом разделения переменных, полагая $U(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\theta, \varphi)$. Подставим это выражение в уравнение Лапласа (18.8):

$$2rR'(r) \cdot Y(\theta, \varphi) + r^2 R''(r) \cdot Y(\theta, \varphi) + \frac{R(r)}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) +$$

$$+ \frac{R(r)}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{18.9}$$

Поскольку мы ищем нетривиальные решения уравнения Лапласа, полагаем $R(r) \cdot Y(\theta, \varphi) \neq 0$. Поделим уравнение (18.9) на $R(r) \cdot Y(\theta, \varphi)$ и, разделяя переменные, получим:

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + 2r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{1}{Y(\theta, \varphi)} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right].$$

В левой части этого равенства – величины, зависящие только от радиальной переменной, тогда как в правой части – величины, содержащие только угловые переменные. Следовательно, левая и правая части этого равенства зависят от разных переменных. Эти переменные могут меняться независимо друг от друга, и, тем не менее, левая и правая части равны друг другу. Это может быть только в том случае, если они равны одной и той же постоянной:

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + 2r \frac{R'(r)}{R(r)} = \lambda,$$

$$-\frac{1}{Y(\theta,\varphi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]=\lambda,$$

или

$$r^2R''(r)+2rR'(r)-\lambda R(r)=0, \tag{18.10}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\lambda Y(\theta,\varphi)=0. \tag{18.11}$$

В уравнении (18.10) легко узнать уравнение Эйлера, а уравнение (18.11) принято записывать в виде

$$\Delta_{(\theta,\varphi)}Y(\theta,\varphi)+\lambda Y(\theta,\varphi)=0. \tag{18.12}$$

Так как область (Ω) − шаровая и её границей служит сфера радиуса a, то при $r=a$ должны выполняться следующие три условия: **(1)** $Y(\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi+2\pi)$, **(2)** $|Y(0,\varphi)|<\infty$, **(3)** $|Y(\pi,\varphi)|<\infty$. Из требования однозначности решения вытекает условие периодичности (1). Смысл последних двух требований также очевиден: решения должны быть ограничены, в том числе и на полюсах сферы, при $\theta=0$ и при $\theta=\pi$.

Определение. Ограниченные решения уравнения (18.11), имеющие непрерывные частные производные до второго порядка включительно, называются *сферическими функциями*.

Уравнение (18.11) решаем опять методом разделения переменных, то есть решение $Y(\theta,\varphi)$ ищем в виде $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$:

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\cdot\Theta(\theta)\right)+\frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda\Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi)=0.$$

Разделяя в этом уравнении переменные, получим:

$$\sin\theta\frac{\Theta''(\theta)\cdot\sin\theta+\Theta'(\theta)\cdot\cos\theta}{\Theta(\theta)}+\lambda\sin^2\theta=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\mu,$$

где μ − пока произвольная постоянная, или:

$$\Phi''(\varphi)+\mu\cdot\Phi(\varphi)=0, \tag{18.13}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[\Theta''(\theta)\cdot\sin\theta+\Theta'(\theta)\cdot\cos\theta\right]+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta)=0. \tag{18.14}$$

Таким образом, разделяя переменные, мы вместо одного дифференциального уравнения в частных производных (18.8) получили три обыкновенных дифференциальных уравнения: (18.10), (18.13) и (18.14).

Очевидно, что уравнение (18.13) имеет периодические решения с периодом 2π только когда $\mu=m^2$, где m − целое число:

$$\Phi(\varphi)=C_1\cos m\varphi+C_2\sin m\varphi.$$

Теперь необходимо решить обыкновенное дифференциальное уравнение (18.14)

$$\frac{1}{\sin\theta}\left[\Theta''(\theta)\cdot\sin\theta+\Theta'(\theta)\cdot\cos\theta\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta)=0. \tag{18.15}$$

Введём новую переменную: $t=\cos\theta$ (или $\sin\theta=\sqrt{1-t^2}$) и обозначим $X(t)|_{t=\cos\theta}=\Theta(\theta)$. Легко подсчитать, что

$$\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}=\frac{d\Theta(\theta)}{dt}\frac{dt}{d\theta}=\frac{d\Theta(\theta)}{dt}(-\sin\theta),$$

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}=\frac{d^2\Theta(\theta)}{dt^2}\sin^2\theta+\frac{d\Theta(\theta)}{dt}(-\cos\theta).$$

Подставив эти замены в уравнение (18.15), после очевидных преобразований получим

$$(1-t^2)\frac{d^2X(t)}{dt^2}-2t\frac{dX(t)}{dt}+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-t^2}\right)X(t)=0. \tag{18.16}$$

Легко видеть, что уравнение (18.16) является присоединённым уравнением Лежандра, которое при $\lambda=n(n+1)$ имеет ограниченное решение − функцию Лежандра $X(t)=P_n^m(t)=$

$P_n^m(\cos\theta) = \Theta(\theta)$, где m – любое целое число, не превосходящее n. (При $m > n$ все $P_n^m(t) = 0$.) Тогда любое решение уравнения (18.12) можно записать в виде:

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\cdot(C_{1n}\cos m\varphi + C_{2n}\sin m\varphi)\,. \tag{18.17}$$

Так как (18.12) – линейное уравнение, то линейная комбинация $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m Y_n^m(\theta,\varphi)$ решений этого уравнения с постоянными коэффициентами a_m – решение того же уравнения. Переобозначая коэффициенты, принято писать:

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}(A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta) \tag{18.18}$$

Ясно, что функция $Y_n(\theta,\varphi)$ – *тоже сферическая функция.*

Принято сферическим функциям $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ приписывать отрицательный индекс, когда функция Лежандра $P_n^m(t)$ умножается на $\cos m\varphi$, и положительный индекс, когда функция Лежандра $P_n^m(t)$ умножается на $\sin m\varphi$, то есть принято писать:

$$Y_n^{(0)}(\theta,\varphi) = P(\cos\theta);$$

$$\begin{gathered}
Y_n^{(1)}(\theta,\varphi) = P_n^1(\cos\theta)\sin\varphi; \qquad Y_n^{(-1)}(\theta,\varphi) = P_n^1(\cos\theta)\cos\varphi;\\
Y_n^{(2)}(\theta,\varphi) = P_n^1(\cos\theta)\sin 2\varphi; \qquad Y_n^{(-2)}(\theta,\varphi) = P_n^1(\cos\theta)\cos 2\varphi;\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi; \qquad Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi.
\end{gathered}$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что система сферических функций $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ ортогональна на сфере:

$$\int\limits_S Y_{n_1}^{m_1}(\theta,\varphi)Y_{n_2}^{m_2}(\theta,\varphi)dS =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\cos m_1\varphi\cos m_2\varphi d\varphi\int\limits_0^{\pi}P_{n_1}^{m_1}(\cos\theta)P_{n_2}^{m_2}(\cos\theta)\sin\theta d\theta =$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
0, & n_1 \neq n_2; \quad m_1 \neq m_2,\\
\frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \overset{def}{=} \left\|Y_n^m(\theta,\varphi)\right\|^2, & n_1 = n_2 = n; \quad m_1 = m_2 = m \neq 0,\\
\frac{4\pi}{2n+1}, & n_1 = n_2 = n; \quad m_1 = m_2 = 0.
\end{array}\right.$$

Вследствие ортогональности сферических функций произвольную дважды дифференцируемую функцию $f(\theta,\varphi)$ можно разложить в сходящийся ряд:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nY_n(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\hat{A}_{nm}\cos m\varphi + \hat{B}_{nm}\sin m\varphi\right)P_n^m(\cos\theta).$$

В некоторых случаях сферические функции $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ и $Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi)$, которые можно рассматривать как базисные функции, бывает удобно представить в несколько отличном виде:

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\cdot e^{im\varphi}P_n^m(\cos\theta).$$

Это представление удобно тем, что полученный базис $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ не просто ортогональный, а ортонормированный, то есть

$$\int\limits_S Y_n^m(\theta,\varphi)(Y_n^m)^*(\theta,\varphi)dS = \delta_{nn_1}\cdot\delta_{mm_1} = \left\{\begin{array}{ll} 1, n = n_1, & m = m_1,\\ 0, n \neq n_1, & m \neq m_1.\end{array}\right.$$

Здесь $(Y_n^m)^*(\theta,\varphi)$ – комплексно сопряжённая к $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$ функция.

§ 18.3. Шаровые функции

Осталось решить уравнение (18.10) - уравнение Эйлера:

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0.$$

Решение его ищем в виде $R(r) = r^\sigma$. Подставляя, получим характеристическое уравнение $\sigma(\sigma - 1) + 2\sigma - n(n+1) = 0$, которое, очевидно, имеет два решения: $\sigma_1 = n$ и $\sigma_2 = -(n+1)$. Какое из этих двух решений нужно выбрать?

Если мы решаем *внутреннюю задачу* — о нахождении решения уравнения Лапласа внутри шара радиуса a, то $0 \le r \le a$, и для того, чтобы получить ограниченное решение, необходимо положить $R(r) = r^n$. Тогда при каждом $n = 0, 1, 2, 3...$ функция $U_n(r, \theta, \varphi) = r^n \cdot Y_n(\theta, \varphi)$ - частное решение уравнения Лапласа внутри шара.

В случае же *внешней задачи* — о нахождении решения уравнения Лапласа вне сферы, когда $a \le r < \infty$, для получения ограниченного решения необходимо положить $R(r) = r^{-(n+1)}$. Тогда при каждом $n = 0, 1, 2, 3...$ функция $U_n(r, \theta, \varphi) = r^{-(n+1)} \cdot Y_n(\theta, \varphi)$ — частное решение уравнения Лапласа вне шара.

Найденные нами частные решения уравнения Лапласа $r^n \cdot Y_{nm}(\theta, \varphi)$ и $\frac{1}{r^{n+1}} \cdot Y_{nm}(\theta, \varphi)$, первое из которых применяется при решении внутренних, а второе — при решении внешних задач для шаровой области, называются *шаровыми функциями.*

Поскольку уравнение Лапласа — линейное уравнение, то линейная комбинация всех его решений с постоянными коэффициентами — тоже решение. Если же наложить очевидное требование — что на сфере радиуса a внутреннее и внешнее решения должны совпадать, то очевидно, что решение уравнения Лапласа внутри шара радиуса a можно записать в виде

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta, \varphi), \tag{18.19}$$

тогда как внешнее решение имеет вид

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi). \tag{18.20}$$

Мы видим, что при $r = a$, $U(a, \theta, \varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi)$ как для внутренней, так и для внешней задачи, то есть оба решения "сшиваются" на $r = a$. Иначе говоря, сшивка решений на $r = a$ — непрерывная и дифференцируемая функция.

Напомним определение: $U_n(x, y, z)$ называется однородной функцией n-го порядка, если функция удовлетворяет тождеству $U_n(tx, ty, tz) \equiv t^n U_n(x, y, z)$.

С более общей точки зрения *шаровые функции — это однородные гармонические полиномы* вида

$$U_n(x, y, z) = \sum_{p,q,r} a_{pqr} x^p y^q z^r, \quad (p + q + r = n), \tag{18.21}$$

удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta U = 0$, то есть уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Рассмотрим некоторые примеры: пусть $n = 1 : U_1(x, y, z) = Ax + By + Cz$. Здесь три независимых коэффициента. A, B и C.

При $n = 2$ имеем $U_2(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$. Требование гармоничности этого полинома накладывает условие на коэффициенты: $C = -(A + B)$ — из шести коэффициентов, входящих в полином, независимы только пять.

Ясно, что число независимых шаровых функций совпадает с числом независимых коэффициентов, определяющих полином. Зададимся вопросом: сколько существует независимых шаровых функций? Для этого надо подсчитать число независимых коэффициентов, определяющих данную шаровую функцию. Из определения:

$$U_n(x, y, z) = \sum_{p,q,r} a_{pqr} x^p y^q z^r = a_{00n} z^n + \left(a_{10(n-1)} x + a_{01(n-1)} y\right) z^{n-1} +$$
$$+ \left(a_{20(n-2)} x^2 + a_{11(n-2)} xy + a_{02(n-2)} y^2\right) z^2 + ...$$
$$... + \left(a_{n00} x^n + a_{(n-1)10} x^{n-1} y + ... + a_{1(n-1)0} x y^{n-1} + a_{0n0} y^n\right) z^0.$$

Отсюда легко видеть, что общее число коэффициентов полинома равно

$$1 + 2 + 3 + ... n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

При двухкратном дифференцировании порядок полинома понизится на две единицы. Поэтому уравнение Лапласа $\Delta U_n = 0$ приведёт к $\frac{n(n-1)}{2}$ условиям на коэффициенты, поскольку при произвольных значениях $x,\ y,\ z$ полином равен нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Следовательно, остаётся всего $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1$ произвольных коэффициентов. Это означает, что всего существует $2n+1$ линейно независимых шаровых функций.

С указанной выше точки зрения *сферической функцией порядка* n называется однородный гармонический полином степени n, рассматриваемый на единичной сфере S, то есть

$$Y_n(s) = U_n\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{U_n(x,y,z)}{r^n}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{18.22}$$

где $s \in S, \quad \Delta U_n = 0.$ Переходя в сферическую систему координат, запишем (18.22) в виде

$$U_n(r,\theta,\varphi) = r^n Y_n(\theta,\varphi)$$

и применим к нему оператор Лапласа:

$$\Delta U_n = \Delta\left[r^n Y_n(\theta,\varphi)\right] =$$
$$= r^{n-2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} + n(n+1)Y_n(\theta,\varphi)\right],$$

следовательно,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} + n(n+1)Y_n(\theta,\varphi) = 0;$$

это знакомое нам уравнение для сферических функций.

ПРИЛОЖЕНИЕ III. ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ГЛАВА 19

§ 19.1. Линейные нормированные пространства

Линейным векторным пространством L называется пара (L,K), где L −множество векторов, K − числовое множество (либо $\mathcal{C}$, либо $\mathbb{R}$), если определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее следующим 8 аксиомам:

1) $x+y=y+x$, 2) $(x+y)+z=x+(y+z)$, 3) $x+0=x$, 4) $x+x'=0$, 5) $1\cdot x = x$, 6) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$, 7) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$, 8) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.

В дальнейшем мы будем иметь дело с вещественными линейными пространствами.

Примеры

(I). Пространства K^n и $(K^n)^*$ − пространства матриц-столбцов и матриц-строк. Это конечномерные (n -мерные) линейные пространства. Известно, что любое n -мерное линейное пространство L изоморфно пространствам K^n и $(K^n)^*$. Точками этих пространств являются столбцы $x = \begin{bmatrix}\xi^1\\ \xi^2\\ \ldots\\ \xi^n\end{bmatrix}$ и строки $u = [\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n]$ соответственно.

(II). $C_{[a,b]}$ −пространство функций $y=y(x)$, непрерывных на сегменте $[a,b]$, получающееся, если операции сложения функций и умножения функций на число введены обычным образом. Такое пространство является бесконечномерным, поскольку *любой* набор функций $e_0 = 1,\ e_1 = x,\ e_2 = x^2,\ \ldots, e_n = x^n, \ldots$ является линейно независимым, ибо из линейной комбинации $\lambda_0\cdot 1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n + \ldots = 0$ (равенство нулю достигается на всём сегменте $[a,b]$), следует $\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \ldots, \lambda_n = 0, \ldots$. Функции $y = y(x)$, называют *точками* пространства $C_{[a,b]}$.

(III). $C^k_{[a,b]}$ − пространство функций $y=y(x)$, непрерывных вместе со своими производными до k -порядка включительно на сегменте $[a,b]$. Очевидна следующая цепочка включений: $C_{[a,b]} \supset C^1_{[ab]} \supset \ldots \supset C^k_{[a,b]} \supset \ldots$. Точками этого пространства также являются функции $y=y(x)$, но только такие, для которых $y,\ y',\ \ldots, y^{(k)}$ − непрерывные функции на $[a,b]$.

(IV). $\vec{C}_{[a,b]}$ − пространство непрерывных на сегменте $[a,b]$ наборов функций $\vec{y} = (\ y_1,\ y_2,\ \ldots, y_n\ )$. Точками такого пространства являются векторы $\vec{y}$.

(V). $\vec{C}^k_{[a,b]}$ – пространство наборов функций $\vec{y} = (\ y_1,\ y_2,\ \dots\ , y_n\ )$, где $y_1, y_2,\ \dots\ , y_n$ – функции, непрерывные на сегменте $[a, b]$ вместе со своими производными до k -го порядка включительно. Очевидна цепочка включений: $\vec{C}_{[a,b]} \supset \vec{C}^1_{[a,b]} \supset \vec{C}^2_{[a,b]} \supset \dots \supset \vec{C}^k_{[a,b]} \supset \dots$.

(VI). C_Ω – пространство функций U, непрерывных в области $\Omega \subseteq E_m$ (евклидова прстранства). Точками такого пространства являются функции m переменных.

(VII). C^1_Ω – пространство функций U, непрерывных в области $\Omega \subseteq E_m$ вместе со своими производными первого порядка. Ясно, что $C_\Omega \supset C^1_\Omega$.

(VIII). $\vec{C}_\Omega$ – пространство наборов функций $\vec{U} = (U_1,\ U_2,\ \dots\ , U_n)$. Здесь $\vec{U}$– функциональная матрица-строка и $U_1,\ U_2,\ \dots\ , U_n$ – непрерывные на $\Omega \subseteq E_m$ функции m переменных. Точками $\vec{C}_\Omega$ являются наборы $\vec{U}$.

(IX). $\vec{C}^1_\Omega$ – пространство наборов функций $\vec{U}$, где $U_1,\ U_2,\ \dots\ , U_n$ и все их частные производные первого порядка - непрерывные на $\Omega \subseteq E_m$ функции.

Этот список можно было бы продолжить, вводя в рассмотрение вторые, третьи и более высокого порядка производные.

Вспомним определение *нормы вектора* и *линейного нормированного пространства*.

Определение 1. Линейное пространство L называется нормированным , если каждому $x \in L$ поставлено в соответствие вещественное число, называемое *нормой* x и обозначаемое $\|x\|$, причём выполнены следующие аксиомы (справедливые для всех $x,\ y \in L$ и скаляров λ):

1) $\|x\| > 0$, причём $\|x\| = 0$ влечёт $x = 0$,
2) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$,
3) $\|\lambda\, x\| = |\ \lambda|\, \|x\|$.

Примеры.

(I). Пространство K^n является линейным нормированным пространством с нормой $\|x\| = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + \dots + (\xi^n)^2}$.

(II). Пространство $C_{[a,b]}$ является линейным нормированным пространством с нормой $\|y\| = \max |y(x)|\ ,\ \ x \in [a, b]$.

(III). Пространство $C^k_{[a,b]}$ является линейным нормированным пространством с нормой $\|\ y\ \| = \max\{|\ y(x)\ |\ , |\ y'(x)\ |\ , |\ y''(x)\ |\ ,\ \dots\ , \left|\ y^{(k)}(x)\ \right|\}, x \in [a, b]$.

(IV). Пространство $\vec{C}_{[a,b]}$ является линейным нормированным пространством с нормой $\|y\| = \max \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2(x)},\ \ x \in [a, b]$.

Всякое нормированное пространство $(L, \|.\|)$ автоматически становится метрическим с расстоянием $\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|$. Очевидно, что все аксиомы расстояния выполняются, а именно:
1° $\rho(y_1, y_2) \ge 0$, причём $\rho(y_1, y_2) = 0$ влечёт $y_1 = y_2$;
2° $\rho(y_1, y_2) = \rho(y_2, y_1)$;
3° $\rho(y_1, y_3) \le \rho(y_1, y_2) + \rho(y_2, y_3)$.

Примеры.

(I). В пространстве K^n расстояние между точками x_1 и x_2 определяется формулой

$$\rho(x_1, x_2) = \sqrt{(\xi^1 - \eta^1)^2 + (\xi^2 - \eta^2)^2 + \dots + (\xi^n - \eta^n)^2}.$$

(II). В пространстве $C_{[a,b]}$ расстояние между точками y_1 и y_2 определяется формулой

$$\rho(y_1, y_2) = \max |y_1(x) - y_2(x)|\ ,\ \ x \in [a, b].$$

(III). В пространстве $C^k_{[a,b]}$ расстояние между точками y_1 и y_2 определяется формулой

$$\rho(y_1, y_2) =$$

$$= \max\{|y_1(x) - y_2(x)|\,,\ |y_1'(x) - y_2'(x)|\,,\ \dots\,,\ \left|y_1^{(k)}(x) - y_2^{(k)}(x)\right|\},$$
$$x \in [a,b].$$

(IV). В пространстве $\vec{C}_{[a,b]}$ расстояние между двумя точками y и z определяется формулой

$$\rho(y,z) = \max\sqrt{[y_1(x) - z_1(x)]^2 + \ \dots\ + [y_n(x) - z_n(x)]^2},\ \ x \in [a,b].$$

Определение. Открытым шаром в метрическом пространстве M радиуса r с центром в точке y_0 называется множество $y \in M$, таких, что $\|y - y_0\| < r$, или, что то же самое, $\rho(y, y_0) < r$.

Определение. Подмножество $\tilde{M} \subseteq M$ называется *линейным многообразием,* если для любых точек y_1 и y_2 из $\tilde{M}$ все точки $y_1 + t(y_1 - y_2)$, где $t \in (-\infty, +\infty)$, снова принадлежит $\tilde{M}$.

Введём понятие расстояния *нулевого порядка* между точками в пространстве $C^k_{[a,b]}$:

$$\rho_0(y_1, y_2) = \max|y_1(x) - y_2(x)|\,,\ \ x \in [a,b], \tag{19.1}$$

расстояния *первого порядка* между точками в пространстве $C^k_{[a,b]}$:

$$\rho_1(y_1, y_2) = \max\{|y_1(x) - y_2(x)|\,, |y_1'(x) - y_2'(x)|\},\ \ x \in [a,b]. \tag{19.2}$$

и так далее, расстояния *k-го порядка*(собственно расстояние в $C^k_{[a,b]}$:) между точками в пространстве $C^k_{[a,b]}$:

$$\rho_k(y_1, y_2) =$$
$$= \max\{|y_1(x) - y_2(x)|\,,\ |y_1'(x) - y_2'(x)|\,,\ \dots\,,\ \left|y_1^{(k)}(x) - y_2^{(k)}(x)\right|\},\quad x \in [a,b]. \tag{19.3}$$

Определение. Кривые y имеют близость к кривой y_0 нулевого порядка, если для заданного $\varepsilon > 0,\ \rho_0\,(y,\ y_0) < \varepsilon$.

Определение. Кривые y имеют близость к кривой y_0 первого порядка, если для заданного $\varepsilon > 0,\ \rho_1\,(y,\ y_0) < \varepsilon$, или, что то же

$$\rho_1(y, y_0) = \max\{|y(x) - y_0(x)|\,, |y'(x) - y_0'(x)|\} < \varepsilon,\ \ x \in [a,b].$$

Кривые, близкие в смысле расстояния нулевого порядка, близки только по координатам, тогда как направления касательных в соответствующих точках могут сильно отличаться. Если же кривые близки в смысле расстояния первого порядка, то в этом случае близки не только сами функции, но и их производные. Очевидно, что если близки в смысле близости первого порядка (k-го)порядка, то они тем более близки в смысле близости нулевого (любого меньшего) порядка.

Лемма. *Если* $f \in C_{[a,b]}$, *и для любой функции* $h \in C_{[a,b]}$ *выполнено* $\int\limits_a^b f(x)h(x)dx = 0$, *то* $f = 0$.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует точка $x_0 \in [a,b]$, такая, что $f(x_0) \neq 0$ (пусть $f(x_0) > 0$). В силу непрерывности функции $f(x)$ существует такая окрестность точки x_0, а именно $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что в ней функция $f(x)$ сохраняет знак: $f(x) > 0$. Выберем тогда функцию h так, чтобы $h(x) = \begin{cases} > 0, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ = 0, x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases}$.

Тогда $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)h(x)dx = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)h(x)dx > 0$. Пришли к противоречию.

Эта лемма верна и тогда, когда $h \in C^k_{[a,b]}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Для доказательства достаточно выбрать

$$h(x) = \begin{cases} 1 + \cos\dfrac{\pi(x - x_0)}{\delta},\ \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ 0,\ \ x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

ГЛАВА 20

§ 20.1. Функционалы в линейном нормированном пространстве. Первая вариация функционала

Определение 1. Функционалом на подмножестве M^* линейного нормированного пространства M $(M^* \subseteq M)$ называется функция $F(y)$, где y пробегает всё множество M^*, принимающая действительные (вещественные) значения.

Говоря другими словами, это отображение $F : M^* \to \mathbb{R}$.

Пример. В пространстве $C^1_{[a,b]}$ рассмотрим длину дуги

$$l(y) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}dx.$$

Каждой кривой $y = y(x)$ этим соотношением ставится в соответствие число — длина дуги.

Определение 2. Функционал F называется непрерывным в точке y_0, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon, y_0) > 0$, что как только $\|y - y_0\| < \delta$, так сразу $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon$.

Если функционал непрерывен в каждой точке M^*, то он непрерывен на всём множестве M^*.

В этом определении участвует расстояние нулевого порядка $\rho_0\,(y,\ y_0) < \delta$, то есть рассматривается δ −близость нулевого порядка. Поэтому функционал непрерывен в точке $y_0(x)$ в смысле близости нулевого порядка. Очевидно, что аналогичным образом можно ввести в рассмотрение понятие непрерывности функционала в данной точке в смысле близости любого порядка.

Определение 3. Функционал F называется непрерывным в точке y_0, в смысле близости s-го порядка, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta(\varepsilon, y_0) > 0$, что как только $\rho_s\,(y,\ y_0) < \delta$, так сразу $|F(y) - F(y_0)| < \varepsilon$.

Из курса математического анализа известно, что к понятию непрерывности можно подойти с точки зрения приращения аргумента функции. В вариационном исчислении приращение аргумента называется *вариацией* аргумента.

Определение 4. Вариацией δy аргумента y функционала F в точке y_0 называется разность между двумя функциями $\delta y = y - y_0$. При этом предполагается, что $y(x)$ меняется произвольно в некотором классе функций. Аналогично, вариацией $\delta y'$ называется разность $\delta y' = y' - y_0', ...,$ и так далее, $\delta y^{(s)} = y^{(s)} - y_0^{(s)}$, $(s = 0, 1, 2, ..., k)$.

Выражение $F\,(y) - F\,(y_0) \overset{def}{=} \Delta F\,(y_0)$ называется приращением функционала в точке y_0. Условие непрерывности функционала в точке y_0 в смысле близости нулевого порядка можно записать так: $\lim\limits_{\|\delta y\| \to 0} \Delta F(y_0) = 0$. Аналогично можно дать определение непрерывности функционала в точке y_0 в смысле близости s-го порядка.

Определение 5. Функционал H называется линейным, если

1) $H(y_1 + y_2) = H(y_1) + H(y_2)$, и

2) $H(\lambda y) = \lambda H(y)$ $\forall\ y,\ y_1,\ y_2\ \in M^*$, и $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Определение 6. Если приращение функционала $\Delta F(y_0) = F(y) - F(y_0) \equiv F(y_0 + \delta y) - F(y_0)$ в точке y_0 можно представить в виде

$$\Delta F(y_0) = A(y_0, \delta y) + \alpha(y_0, \delta y)\rho_0,$$

где $A(y_0, \delta y)$ — линейный относительно δy функционал, а $\alpha(y_0, \delta y) \to 0$ при $\rho_0 = \|\delta y\| \to 0$, то $A(y_0, \delta y)$ называется *вариацией функционала* и обозначается символом $\delta F(y_0)$.

Таким образом, $\delta F(y_0) = A(y_0, \delta y)$.

На языке математического анализа δF — есть ни что иное, как дифференциал функции F, заданной в линейном нормированном пространстве. Напомним, что в курсе математического анализа дифференциал функции $y = f(x)$ всегда можно представить в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = \frac{d}{dt}\ f(x_0 + t\Delta x)|_{t=0}\,,$$

а дифференциал функции многих переменных $U(x_1, x_2, ..., x_m)$ в виде

$$dU(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, ..., \overset{0}{x}_m) = \frac{d}{dt}\, U(\overset{0}{x}_1 + t\Delta x_1, \overset{0}{x}_2 + t\Delta x_2, ..., \overset{0}{x}_m + t\Delta x_m)\Big|_{t=0}.$$

Покажем, что *вариация функционала* F *всегда представима в виде*

$$\delta F(y_0) \;=\; \frac{d}{dt}\, F(y_0 + t\,\delta y)|_{\,t=0}. \tag{20.1}$$

Действительно, вследствие линейности функционала $A(y, \delta y)$ по вариации аргумента δy, имеем:

$$\frac{d}{dt}\, F(y_0 + t\delta y)|_{\,t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta F}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{F(y_0 + t\Delta y) - F(y_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{A(y_0, t\delta y) + \alpha(y_0, t\delta y)\cdot\rho_0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{A(y_0, t\delta y)}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{\alpha(y_0, t\delta y)\cdot\rho_0}{t} =$$

$$= A(y_0, \delta y) + \lim_{t\to 0}\frac{\alpha(y_0, t\delta y)}{t}\cdot\rho_0 = A(y_0, \delta y) \overset{def}{=} \delta F(y_0).$$

Рассуждения, аналогичные приведённым выше, показывают, что

$$\delta F(y_1, y_2, ..., y_m) = \frac{d}{dt}F(y_1 + t\delta y_1, y_2 + t\delta y_2, ..., y_m + t\delta y_m)\Big|_{t=0} \tag{20.2}$$

Далее мы затронем вопрос о необходимых условиях экстремума функционала.

Определение 7. Функционал F достигает на кривой y_0 максимума (минимума), если $\Delta F(y_0) = F(y) - F(y_0) < 0$ $(\Delta F(y_0) > 0)$ для любой кривой $y(x)$, близкой к кривой Є y_0.

Экстремум, который достигается на кривой y_0, по отношению к кривым $y(x)$, близким к y_0 в смысле близости нулевого порядка, называется *сильным*. Если же экстремум имеет место только для кривых, близких к y_0 в смысле близости первого порядка, то он называется *слабым*.

Совершенно очевидно, что если на кривой y_0 достигается сильный экстремум, то и подавно достигается и слабый экстремум, ибо $C_{[ab]} \supset C^1_{[ab]}$, но если на кривой y_0 достигается слабый экстремум, то сильного экстремума может и не быть.

Теорема (о необходимом условии экстремума). *Если для функционала* F *существует вариация* δF *в точке* y_0 *и при* $y = y_0$ *функционал имеет экстремум, то* $\delta F(y_0) = 0$.

Доказательство. Для фиксированной кривой y_0 и вариации $\delta y = y - y_0$, функция $F(y_0 + t\,\delta y) \overset{def}{=} g(t)$ имеет производную по t при $t = 0$, согласно формуле (7.1) и условию существования вариации в точке y_0. Но при $t = 0$ функция $g(t)$ имеет экстремум, ибо $g(0) = F(y_0)$. Тогда по теореме Ферма

$$g'(0) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}F(y_0 + t\delta y)_{|t=0} = 0,$$

то есть $\delta F(y_0) = 0$. Это и есть необходимое условие экстремума.

Замечание. Все приведённые выше определения и доказанная теорема без каких либо изменений переносятся на функционалы $F(\vec{y}) = F\,(y_1, y_2, ..., y_n)$ в пространстве $\vec{C}_{[a,b]}$, функционалы $F\,(u)$ в пространстве C^s_Ω, функционалы $F(\vec{u}) = F\,(u_1, ..., u_n)$ в пространстве $\vec{C}^s_\Omega$.

Например, пусть задан функционал $F\,(u)$ функции $z = u(x, y)$. Тогда $\delta u = u - u_0$, $\delta u'_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u_0}{\partial x}$, $\delta u'_y = \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u_0}{\partial y}$.

$$\delta F(u_0) = \frac{d}{dt}F\,(u_0 + t\delta u)_{|t=0} \tag{20.3}$$

и если на поверхности $z = u_0(x, y)$ достигается экстремум, то $\delta F(u_0) = 0$ на $z = u_0(x, y)$.

§ 20.2. Функционалы виде $F(y) = \int\limits_a^b \Phi\left(x, y(x), y'(x)\right) dx$

Найдём условия выявления подозрительных на экстремум кривых. Будем решать эту задачу для множества кривых с закреплёнными концами: $\begin{cases} y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta, \end{cases}$ то есть наш функционал задан на линейном многообразии $\tilde{M} \subset C^1_{[ab]}$. Воспользуемся соотношением

$$\delta F(y_0) = \left.\frac{dF(y_0 + t\delta y)}{dt}\right|_{t=0}.$$

Получим:

$$\delta F(y_0) = \left.\frac{d}{dt}\left(\int\limits_a^b \Phi(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y')dx\right)\right|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\delta y'\right]dx = \int\limits_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y \cdot dx + \int\limits_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\delta y' dx =$$

(вычисляя по частям, получим)

$$= \int\limits_a^b \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y \cdot dx + \underbrace{\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\delta y\right|_a^b}_{=0} - \int\limits_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)\delta y dx = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx = 0.$$

Равенство нулю этого интеграла достигается при любых значениях δy. Поэтому, на основании основной леммы вариационного исчисления, заключаем, что должно равняться нулю выражение в квадратных скобках:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) = 0,$$

и из граничных условий следует, что $y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$. Выражение в квадратных скобках называется уравнением Эйлера.

Таким образом, *необходимым условием* достижения экстремума функционалом

$$F(y) = \int\limits_a^b \Phi\left(x, y(x), y'(x)\right) dx \tag{20.4}$$

является

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) = 0 \\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta. \end{cases} \tag{20.5}$$

Всякая кривая, удовлетворяющая уравнению Эйлера называется *экстемалью*. Она является подозрительной на экстремум.

20.3. Функционалы вида $F(y) = \int\limits_a^b \Phi\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(k)}(x)\right) dx,$

Для функционала, зависящего о вторых производных и производных более высокого порядка

$$F(y) = \int\limits_a^b \Phi\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(k)}(x)\right) dx \tag{20.6}$$

вычисления, аналогичные проведённым выше, показывают, что уравнение Эйлера будет иметь вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y''}\right) - ... + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(k)}}\right) = 0 \tag{7.7}$$

с граничными условиями:

$$y(a)=\alpha_0,\ y(b)=\beta_0,\ y'(a)=\alpha_1,\ y'(b)=\beta_1,\ \dots,y^{(k-1)}(a)=\alpha_{k-1},$$
$$y^{(k-1)}(b)=\beta_{k-1}. \tag{20.8}$$

Разница в вычислениях заключается лишь в том, что интегралы, в которых участвуют $\delta y'',\ \dots,\delta y^{(k)}$ необходимо брать два раза, ... ,k раз.

ГЛАВА 21

§ 21.1. Функционалы вида $F(\vec{y})=\int\limits_a^b \Phi\left(x,y_1(x),y_1'(x),y_2(x),y_2'(x),...,y_n(x),y_n'(x)\right)dx.$

Для получения необходимых условий для функционала $F(\vec{y})$, $\vec{y}(a)\in\vec{C}^1_{[a,b]}$, при заданных граничных условиях

$$\vec{y}(a)=\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n),\ \ \vec{y}(b)=\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n), \tag{21.1}$$

будем варьировать лишь одну из функций y_i, оставляя все остальные функции без изменения. В результате получим исследованный нами ранее функционал, зависящий только от одной функции y_i,

$$F\left(\overset{0}{y}_1,\ \dots,\overset{0}{y}_{i-1},\ y_i,\ \overset{0}{y}_{i+1},\ \dots,\overset{0}{y}_n\right)=\tilde{F}\left(y_i\right).$$

Функция, реализующая экстремум такого функционала, удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y_i'}\right)=0. \tag{21.2}$$

Меняя i от 1 до n, получим систему (21.2) дифференциальных уравнений с означенными выше краевыми условиями (21.1). Экстремали представляют собой $2n$-параметрическое семейство интегральных кривых в пространстве $E_{n+1}:\ x=x, y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x),\ \dots,y_n=y_n(x)$.

Пример 1. Рассмотрим функционал от двух функций $y(x)$ и $z(x)$:

$$F\left(y,z\right)=\int\limits_a^b \Phi\left(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\right)dx.$$

Его экстремали реализуются на интегральных кривых системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y'}\right)=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z'}\right)=0,\end{cases} \tag{21.3}$$

и геометрически представляют собой пространственные кривые в $E_3:\ x=x,\ \ y=y(x),\ z=z(x),\ x\in[a,b]$.

Пример 2. Принцип Ферма.

Требуется найти дифференциальное уравнение линий распространения света в оптически неоднородной среде, в которой свет идёт из точки A в точку B по кривой, для которой время T распространения света будет наименьшим.

Если $y=y(x),\ z=z(x)$ – уравнения искомой кривой, то

$$T=\int\limits_a^b \frac{\sqrt{1+y'(x)^2+z'(x)^2}}{v(x,y(x),z(x))}\,dx,$$

где $v = |\vec{v}|$ – скорость распространения света в описываемой среде. Уравнения Эйлера (3.3) приводят к искомым уравнениям:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+y'(x)^2+z'(x)^2}}{v(x,y(x),z(x))^2}\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y(x),z(x))+ \\ \qquad +\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2+z'(x)^2}\cdot v(x,y(x),z(x))}\right)=0, \\ \dfrac{\sqrt{1+y'(x)^2+z'(x)^2}}{v(x,y(x),z(x))^2}\dfrac{\partial v}{\partial z}(x,y(x),z(x))+ \\ \qquad +\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2+z'(x)^2}\cdot v(x,y(x),z(x))}\right)=0. \end{cases}$$

§ 21.2. Функционалы вида $F(\vec{y}) = \int\limits_a^b \Phi\left(x, y_1(x), y_1'(x), ..., y_1^{(k)}(x), ..., y_n(x), y_n'(x), ..., y_n^{(k)}(x)\right)dx$

К функционалам,содержащим производные высших порядков, применим те же рассуждения, что и предыдущем параграфе. Будем варьировать функционал только по одной функции, оставляя остальные без изменения, при этом интегралы, где участвуют $\delta y_i''$, ... ,$\delta y_i^{(k)}$, будем брать по частям два раза, ... ,k раз. Меняя i от 1 до n , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i''}\right) - ... + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_i^{(k)}}\right) = 0$$

с граничными условиями $y_i(a) = \alpha_{i,0},\ y_i(b) = \beta_{i,0},\ y_i'(a) = \alpha_{i,1},\ y_i'(b) = \beta_{i,1},\ \dots\ ,\ y_i^{(k-1)}(a) = \alpha_{i,k-1},\ y_i^{(k-1)}(b) = \beta_{i,k-1}$.

§ 21.3. Функционалы, зависящие от функций многих переменных. Уравнение Остроградского

Рассмотрим функционал, зависящий от функции двух переменных

$$F(u) = \int\limits_\Omega \Phi\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) dxdy.$$

Будем считать, что на границе Γ заданной области Ω все значения функции $u(x,y)$ заданы: $u(x,y)|_\Gamma = \varphi(x,y)$. Это означает, что задан пространственный контур, через который должны проходить все допустимые поверхности.

Примем стандартные обозначения:

$$\begin{cases} \delta u(x,y) = u(x,y) - u_0(x,y), \\ \delta u_x'(x,y) = u_x'(x,y) - u_{0x}'(x,y), \\ \delta u_y'(x,y) = u_y'(x,y) - u_{0y}'(x,y). \end{cases}$$

Подсчитаем вариацию такого функционала и приравняем эту вариацию нулю:

$$\delta F(u_0) = \left.\frac{d}{dt}F\left(u_0 + t\delta u\right)\right|_{t=0} =$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \Phi(x, y, u_0 + t\delta u, u_{0x}' + t\delta u_x', u_{0y}' + t\delta u_y')dxdy\right|_{t=0} =$$

$$= \int\limits_\Omega \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_x'}\delta u\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_x'}\right)\delta u\right]dxdy +$$

$$+ \int\limits_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_y'}\delta u\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_y'}\right)\delta u\right]dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_y}\right)\right] \delta u dx dy +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_x}\delta u\right)}_{\equiv Q} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_y}\delta u\right)}_{\equiv -P} \right] dx dy = 0.$$

К последнему интегралу применим формулу Грина:

$$\oint\limits_{\Gamma} P dx + Q dy = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy.$$

Имеем:

$$\int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_x}\delta u\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_y}\delta u\right)\right] dx dy = \oint\limits_{\Gamma} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial u'_y} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial u'_x} dy\right) \delta u ds = 0.$$

Последний интеграл равен нулю, поскольку $\delta u|_{\Gamma} = 0$. Таким образом, для $\delta F = 0$ получим:

$$\delta F = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_y}\right)\right] \delta u dx dy = 0.$$

На основании основной леммы вариационного исчисления, при произвольном δu данный интеграл может равняться нулю только если

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'_y}\right) = 0. \tag{21.4}$$

Это уравнение называется уравнением *Остроградского*, оно является дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Пример. Задача о минимальной поверхности.

Требуется среди поверхностей $z = u(x, y)$, проходящих через заданный контур Γ, выделить те поверхности, которые имеют минимальную площадь.

Из курса математического анализа известно, что в трёхмерном пространстве площадь поверхности $z = u(x, y)$ описывается интегралом

$$S(u) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + u'_x(x, y)^2 + u'_y(x, y)^2} dx dy.$$

Будем рассматривать этот интеграл как функционал, зависящий от функции двух переменных и удовлетворящий условию, что на границе Γ заданной области Ω все функции $u(x, y)$ принимают заданные значения $\varphi(x, y) : \forall\ u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$. Уравнение Остроградского имеет вид:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u'_x}{\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u'_y}{\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}}\right) = 0.$$

После несложных вычислений получим:

$$u''_{xx}\left(1 + (u'_y)^2\right) + u''_{yy}\left(1 + (u'_x)^2\right) - 2u''_{xy}u'_x u'_y = 0.$$

Геометрически это уравнение означает, что средняя кривизна поверхности в любой её точке равна нулю.

Физической реализацией минимальных поверхностей являются мыльные плёнки, натянутые на заданный контур Γ.

§ 21.4. Более сложные виды функционалов, зависящих от функций многих переменных

Если задан функционал

$$F(u)=\int\limits_{\Omega}\Phi\left(x_1,...,x_n,u(x_1,...,x_n),\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)dx_1\,dx_2,...\,dx_n$$

то, аналогично тому, как это мы сделали в параграфе 8.2, нетрудно показать, что уравнение Остроградского имеет вид:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u'_{x_k}}\right)=0.$$

Граничные условия имеют прежний вид: $\delta u|_{\Gamma}=0$, где $\Gamma-$ граница области Ω.

Для функционалов вида

$$F(\vec{u})=\int\limits_{\Omega}\Phi\left(x_1,...,x_n,\overset{(1)}{u},\ ...\ ,\overset{(m)}{u},\frac{\partial\overset{(1)}{u}}{\partial x_1},\ ...\ ,\frac{\partial\overset{(m)}{u}}{\partial x_n}\right)dx_1dx_2\,...\,dx_n$$

имеем систему дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\overset{(l)}{u}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial(\overset{(l)}{u})'_{x_k}}\right)=0,\quad l=1,2,...,m.$$

с условиями на границе $\delta\left.\overset{(l)}{u}\right|_{\Gamma}=0.$

§ 21.5. Вариационные принципы физики

Основным вариационным принципом в классической механике является *принцип наименьшего действия* Гамильтона - Остроградского, утверждающий, что среди вожможных, то есть согласованных со связями движений механической системы осуществляются только такие движения, которые дают *стационарное значение* функционалу $S=\int\limits_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt$, где T - кинетическая энергия, а U - потенциальная энергия механической системы.

Под стационарным значением понимается значение функционала S (называемого *действием*), соответствующего аргументу, для которого первая вариация равна нулю, $\delta S=0$.

Для того, чтобы проиллюстрировать этот принцип, рассмотрим систему N материальных точек с массами m_k $(k=1,2,...,N)$, с координатами в прямоугольной системе $(x_k,\ y_k,\ z_k)$, или, что то же самое, с радиус-векторами $\vec{r}_k(t)$. На k-ю частицу действует силовое поле

$$\vec{F}_k=\vec{i}\,P_k(x_k,y_k,z_k)+\vec{j}\,Q_k(x_k,y_k,z_k)+\vec{k}\,R_k(x_k,y_k,z_k),$$

которое для простоты будем считать потенциальным. Это значит, что сила, действующая на k-ю частицу, записывается в виде:

$$\vec{F}_k=-\frac{\partial U}{\partial x_k}\,\vec{i}-\frac{\partial U}{\partial y_k}\,\vec{j}-\frac{\partial U}{\partial z_k}\,\vec{k},$$

где $U=U(x_1,y_1,z_1,\ ...\ ,x_N,y_N,z_N)-$ потенциал.

Найдём дифференциальные уравнения движения системы. В данном случае кинетическая энергия

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\dot{x}_k^2+\dot{y}_k^2+\dot{z}_k^2\right),$$

а потенциальная энергия равна U.

Интеграл действия запишется в виде функционала, зависящего от $3N$ функций $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$, ... , $x_N(t)$, $y_N(t)$, $z_N(t)$:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\dot{x}_k(t)^2 + \dot{y}_k(t)^2 + \dot{z}_k(t)^2 \right) - U(x_k(t), y_k(t), z_k(t)) \right] dt.$$

Система уравнений Эйлера для этого функционала имеет вид:

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_k}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_k} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_k}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_k} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}_k}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\dfrac{\partial U}{\partial x_k} - \dfrac{d}{dt}\left(m_k \dot{x}_k\right) = 0 \\ -\dfrac{\partial U}{\partial y_k} - \dfrac{d}{dt}\left(m_k \dot{y}_k\right) = 0 \\ -\dfrac{\partial U}{\partial z_k} - \dfrac{d}{dt}\left(m_k \dot{z}_k\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} m_k \ddot{x}_k = P_k \\ m_k \ddot{y}_k = Q_k \\ m_k \ddot{z}_k = R_k \end{array} \right\} \Rightarrow m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k$$

- второй закон Ньютона.

В классической физике выдвинутый и проверенный на практике принцип Гамильтона-Остроградского обобщается и называется *Лагранжевым формализмом* . В частности, если речь идёт об уравнениях движения частиц в силовом поле, то строится функция Лагранжа $L\left(t, q(t), \dot{q}(t)\right)$, где $q(t) \overset{def}{=} q_1(t), q_2(t), ..., q_r(t)$, и рассматривается действие $S = \int\limits_{t_0}^{t_1} L\left(t, q(t), \dot{q}(t)\right) dt$. Полагая затем $\delta S = 0$, придём к уравнениям движения

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аминова А.В., Сочнева В.А. "Методы математической физики. Часть I." Издательство Казанского университета, 1978 г.

2. Сочнева В.А. "Методы математической физики. Часть II." Издательство Казанского университета, 1975 г.

3. Даишев Р.А., Даньшин А.Ю. "Дифференциальные уравнения." Издатель- ство Казанского университета, 2009 г.

4. Кошляков Н.С., Глинер Н.С., Смирнов М.М. "Уравнения в частных производных математической физики". Москва, "Высшая школа", 1970 г.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. "Уравнения математической физики", Москва, "Наука", 1972 г.

6. Владимиров В.С. "Уравнения математической физики", Москва, "Наука", 1971 г.

7. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М., "Мир", 1965.

8. Эльсгольц Л.Э. "Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление", М.: Наука, 1969.

9. Карташёв А.П., Рождественский Б.Л. "Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления", М.: Наука, 1980.

СОДЕРЖАНИЕ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ГЛАВА 1. 3

§ 1.1. Вывод уравнения малых свободных поперечных колебаний струны........ 3
§ 1.2. Вывод уравнения малых вынужденных поперечных колебаний струны........ 4
§ 1.3.Вывод уравнения малых поперечных колебаний мембраны........ 5

ГЛАВА 2. 6

§ 2.1. Вывод уравнения малых продольных колебаний стержня........ 6
§ 2.2. Постановка краевых задач для уравнения колебаний........ 7
§ 2.3. Теорема единственности решения первой краевой задачи........ 8

ГЛАВА 3. 9

§ 3.1. Вывод уравнения распространения тепла в теле........ 9
§ 3.2. Распределение тепла в тонком стержне
и постановка краевых задач для уравнения теплопроводности........ 11

ГЛАВА 4. 13

§ 4.1. Классификация линейных дифференциальных уравнений
в частных производных и приведение их к каноническому виду........ 13
§ 4.2. Дифференциальные уравнения со многими независимыми переменными........ 15

ГЛАВА 5. 16

§ 5.1. Колебания бесконечной струны (задача Коши)........ 16
§ 5.2. Решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве........ 18

ГЛАВА 6. 21

§ 6.1. Решение задачи о свободных колебаниях закреплённой струны
методом Фурье........ 21
§ 6.2. Решение задачи о вынужденных колебаниях струны с
закреплёнными концами........ 24
§ 6.3. Решение задачи о вынужденных колебаниях струны с
незакреплёнными концами........ 26

ГЛАВА 7. 26

§ 7.1. Колебания прямоугольной мембраны........ 26
§ 7.2. Колебания круглой мембраны........ 28

ГЛАВА 8. 30

§ 8.1. Решение первой краевой задачи
для уравнения теплопроводности без источников........ 30
§ 8.2. Решение первой краевой задачи
для уравнения теплопроводности с источниками........ 31
§ 8.3. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности........ 32

ГЛАВА 9. 35

§ 9.1. Уравнения эллиптического типа и краевые задачи........ 35
§ 9.2. Формулы Грина и основные свойства гармонических функций........ 36

ГЛАВА 10. 38

§ 10.1. Метод функций Грина решения задачи Дирихле........ 38
§ 10.2. Свойства гармонических функций........ 39
§ 10.3. Теоремы единственности решения
задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона........ 40

ГЛАВА 11. 42

§ 11.1. Решение первой внутренней краевой задачи для круга ... 42

ГЛАВА 12. ... 45

§ 12.1. Дифференциальные уравнения свободных электрических колебаний. ... 45
§ 12.2. Телеграфное уравнение. ... 46
§ 12.3. Колебания в линии, свободной от искажения. ... 46
§ 12.4. Граничные условия для провода конечной длины. ... 48

ГЛАВА 13. ... 48

§ 13.1. Векторное пространство D. ... 48
§ 13.2. Пространство распределений. ... 49
§ 13.3. Дифференцирование распределений. ... 50
§ 13.4. Действия с распределениями. ... 52
§ 13.5. Уравнения в свёртках. ... 54
§ 13.6. Преобразование Лапласа. ... 55

ПРИЛОЖЕНИЕ I. ... 57

ГЛАВА 14. ... 57

§ 14.1. Понятие о краевых задачах. ... 57
§ 14.2. Задача Штурма - Лиувилля. ... 58

ПРИЛОЖЕНИЕ II. ... 61

ГЛАВА 15. ... 61

§ 15.1. Функции Бесселя. ... 61

ГЛАВА 16. ... 64

§ 16.1. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя. ... 64
§ 16.2. Функции Бесселя полуцелого индекса. ... 64
§ 16.3. Функции Неймана и Ханкеля. ... 65
§ 16.4. Ортогональность функций Бесселя. Ряды по функциям Бесселя. ... 66

ГЛАВА 17. ... 68

§ 17.1. Уравнения Лежандра и полиномы Лежандра. ... 68
§ 17.2. Формула Родрига. ... 70
§ 17.3. Ортогональность полиномов Лежандра. ... 71

ГЛАВА 18. ... 73

§ 18.1. Присоединённые функции Лежандра. ... 73
§ 18.2. Сферические функции. ... 74
§ 18.3. Шаровые функции. ... 77

ПРИЛОЖЕНИЕ III. ... 78

ГЛАВА 19. ... 78

19.1. Линейные нормированные пространства ... 78

ГЛАВА 20. ... 81

§ 20.1. Функционалы в линейном нормированном пространстве. Первая вариация функционала ... 81

§ 20.2. Функционалы вида $F(y) = \int\limits_a^b \Phi\left(x, y(x), y'(x)\right) dx$. ... 83

ГЛАВА 21. ... 84

§ 21.1. Функционалы вида
$F(\vec{y}) = \int\limits_a^b \Phi\,(x, y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), ..., y_n(x), y_n'(x))dx.$ 84
§ 21.2. Функционалы вида
$F(\vec{y}) = \int\limits_a^b \Phi\left(x, y_1(x), y_1'(x), ..., y_1^{(k)}(x), ..., y_n(x), y_n'(x), ..., y_n^{(k)}(x)\right)dx.$ 85
§ 21.3. Функционалы, зависящие от функций многих переменных.
Уравнение Остроградского.... 85
§ 21.4. Более сложные виды функционалов,
зависящих от функций многих переменных 87
§ 21.5. Вариационные принципы физики 87
ЛИТЕРАТУРА. 88

Даишев Ринат Абдурашидович
Сочнева Валентина Алексеевна

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Подписано в печать ...