КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.А. ХАМЗИН

ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Учебное пособие

Казань 2017

УДК 536-1
ББК 22.317
Х

Принято на заседании кафедры теоретической физики КФУ
Протокол № 8 от 12 апреля 2017 года
Утверждено на заседании учебно-методической комиссии
Института Физики КФУ
Протокол № 8 от 30 июня 2017 года

Рецензент:
доктор физико-математических наук, профессор КНИТУ им. А.Н. Туполева - КАИ **Нигматуллин Р.Р.**

Хамзин А.А.
Х **Элементы физической кинетики. Учебное пособие** / А.А. Хамзин. – Казань: Казан. ун-т, 2017. – 43 с.

В учебном пособии представлены примеры задач с подробными решениями, основные положения, формулы и задачи для самостоятельного решения раздела “Физическая кинетика” дисциплины “Термодинамика и статистическая физика”, читаемой студентам Института Физики.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и аспирантов физических специальностей университетов.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящего учебного пособия – познакомить студентов с одним из основных методов описания неравновесных явлений – методом управляющих кинетических уравнений. При этом основной акцент делается на широко употребляемые кинетические уравнения – уравнения Больцмана, Планка и Фоккера-Планка.

В пособии собраны и систематизированы задачи, представленные в различных учебниках, учебных пособиях и статьях. Выбор их тематики определялся уровнем образования в классических университетах и значимостью в прикладных разделах физики, включая радиофизику, электронику, спектроскопию и т.п.

Активному усвоению материала способствует структура пособия. В начале каждого раздела наряду с фундаментальными положениями, законами, методами физической кинетики представлены основные формулы и соотношения. Для развития культуры и приобретения навыков самостоятельной работы приведены подробные решения с анализом характерных типовых задач. Завершает пособие набор задач для самостоятельного решения различной трудности, которые могут быть предложены как на аудиторных занятиях, так и в качестве домашнего задания.

Автор считает, что работа с пособием закрепит теоретические знания студентов и подготовит их к изучению специальных дисциплин, сессионным и государственным экзаменам.

1. Кинетическое уравнение Больцмана

Неравновесное состояние макроскопической системы описывается одночастичной функцией распределения ее частиц в момент времени t по скоростям $\mathbf{v}$ и в пространстве – $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$. Выражение $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)\mathrm{d}\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{r}$ имеет смысл плотности частиц (атомов, электронов, фононов и т.д.), находящихся в момент времени t в элементе фазового объема $d\mathbf{v}d\mathbf{r}=dv_x dv_y dv_z dxdydz$. Функция распределения удовлетворяет условию нормировки

$$\int f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d\mathbf{v}d\mathbf{r} = N, \tag{1.1}$$

где N – полное число частиц. Если она известна, то можно найти термодинамические параметры изучаемой системы, в частности, плотность числа частиц в точке $\mathbf{r}$

$$n(\mathbf{r},t) = \int f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d\mathbf{v}. \tag{1.2}$$

В состоянии статистического равновесия функция $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{v}, \mathbf{r})$ не зависит от времени и совпадает с равновесной функцией распределения системы.

Процессы переноса физического качества (тепла, массы, заряда, энергии и т.д.) осуществляются не только при движении частиц, но и за счет их взаимодействия. Так, передача энергии и импульсов в газе происходит в результате столкновений молекул. Число столкновений за единицу времени молекул разреженного газа, находящихся в объеме $d\mathbf{r}$ и имеющих скорости в интервалах $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathrm{d}\mathbf{v}_1)$ и $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathrm{d}\mathbf{v}_2)$, равно

$$d\nu = f(\mathbf{v}_1,\mathbf{r},t)f(\mathbf{v}_2,\mathbf{r},t)|\mathbf{u}|\sigma(u,\theta)d\Omega d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ – относительная скорость, $\sigma(u,\theta)$ - дифференциальное эффективное сечение рассеяния сталкивающихся частиц (для одинаковых упругих сфер $\sigma=d^2\cos\theta$, где d – диаметр молекул, θ - угол между относительной скоростью и линией центров молекул), $\mathrm{d}\Omega$ - элемент телесного угла.

Замкнутое уравнение для одночастичной функции распределения $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ называется *кинетическим уравнением*.

Изменение функции распределения $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ со временем обусловлено движением частиц под действием сил внешнего поля (дрейфовая производная $\left(\partial f / \partial t\right)_{\text{дрейф}}$) и их взаимными столкновениями ($\left(\partial f / \partial t\right)_{\text{столк}} = \mathrm{St}\, f$ - интеграл столкновений):

$$\partial f / \partial t = \left(\partial f / \partial t\right)_{\text{дрейф}} + \left(\partial f / \partial t\right)_{\text{столк}}. \tag{1.4}$$

Поскольку изменение f во времени для газа невзаимодействующих частиц определяется уравнением Лиувилля, то получим

$$\left(\partial f / \partial t\right)_{\text{дрейф}} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}}, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ - сила, действующая на частицу. Подстановка (1.5) в (1.4) приводит нас к *кинетическому уравнению Больцмана* в самом общем виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \mathrm{St} f. \tag{1.6}$$

Интеграл столкновений $\mathrm{St}\, f$ представляет собой разность между количеством частиц, поступающих в данный объем $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ в результате прямых столкновений и покидающих его в результате обратных столкновений. Если пренебречь корреляциями динамических состояний сталкивающихся молекул, то можно получить следующее выражение для интеграла столкновений

$$\mathrm{St}\, f = \int \left(f' \cdot f_1' - f \cdot f_1 \right) \left| \boldsymbol{u} \right| \sigma(u, \theta) d\Omega d\boldsymbol{v}_1, \tag{1.7}$$

где $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, $f_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t)$, $f' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t)$, $f_1' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1', t)$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ - скорости частиц до столкновения, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}_1'$ - скорости частиц после столкновения. Интеграл столкновений в виде (1.7) носит название *интеграла столкновений Больцмана*.

Разработаны различные приближенные методы решения кинетического уравнения. Среди наиболее распространенных подходов – это исследование стационарных систем, у которых градиенты и поля не изменяются со временем, а неравновесная функция распределения $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ слабо отличается от ее равновесного значения $f_0 = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\partial(f - f_0)/\partial\mathbf{r} \ll \partial f_0/\partial\mathbf{r}$, $\partial(f - f_0)/\partial\mathbf{v} \ll \partial f_0/\partial\mathbf{v}$. В этом случае интеграл столкновений принимает простой вид

$$\mathrm{St}\, f = -\frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\tau_c(v)}, \tag{1.8}$$

где $\tau_c(v)$ - время релаксации. Выбор интеграла столкновений в форме (1.8) носит название *приближения времени релаксации*. В этом приближении кинетическое уравнение Больцмана в стационарном режиме примет вид

$$\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}} = -\frac{f - f_0}{\tau_c}. \tag{1.9}$$

Формальное решение кинетического уравнения в форме (1.9) имеет вид

$$f = f_0 - \tau_c\left(\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right). \tag{1.10}$$

Если отклонение f от f_0 слабое, то производные в правой части (1.10) заменяются на их значения для равновесной функции, т.е. $\partial f/\partial(...) = \partial f_0/\partial(...)$.

Примеры решения задач

Задача 1.1. Показать, что кинетическое уравнение Больцмана приводит к возрастанию плотности энтропии (H-теорема Больцмана)

$$\sigma = -\int f \ln f \, d\mathbf{v} \tag{1.11}$$

однородного газа.

Решение. Вычисляем производную по времени от плотности энтропии

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -\int \frac{\partial\left(f \ln f\right)}{\partial t} d\mathbf{v} = -\int (1 + \ln f)\frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v}. \tag{1.12}$$

Подставляем сюда выражение для $\partial f/\partial t$ из уравнения (1.6), получаем

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\int(1+\ln f)\left(\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}}+\frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}\text{-St}f\right)d\mathbf{v}. \qquad (1.13)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части (1.13) по отдельности.

$$\int(1+\ln f)\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}}\,d\mathbf{v}=\int\mathbf{v}\frac{\partial\left(f\ln f\right)}{\partial\mathbf{r}}\,d\mathbf{v}=0, \qquad (1.14)$$

$$\int(1+\ln f)\frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}\,d\mathbf{v}=\frac{\mathbf{F}}{m}\int\frac{\partial(f\ln f)}{\partial\mathbf{v}}\,d\mathbf{v}=\frac{\mathbf{F}}{m}(f\ln f)\Big|_{v_x,v_y,v_z=-\infty}^{v_x,v_y,v_z=\infty}=0. \quad (1.15)$$

Здесь мы приняли во внимание однородность газа ($\partial f/\partial\mathbf{r}=0$) и равенство f=0 при $|\mathbf{v}|=\infty$. Выбирая интеграл столкновений в форме Больцмана (1.7), получим из (1.13)

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=-\int(1+\ln f)\text{St}f\,d\mathbf{v}=-\int(1+\ln f)\left(f'\cdot f_1'-f\cdot f_1\right)|\mathbf{u}|\sigma(u,\theta)d\Omega\,d\mathbf{v}_1d\mathbf{v}. \qquad (1.16)$$

Этот интеграл не изменяется при замене $\mathbf{v}\to\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_1\to\mathbf{v}$, поэтому

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=-\frac{1}{2}\int(2+\ln f+\ln f_1)\left(f'\cdot f_1'-f\cdot f_1\right)|\mathbf{u}|\sigma(u,\theta)d\Omega\,d\mathbf{v}_1d\mathbf{v}. \quad (1.17)$$

Из закона сохранения импульса и энергии при попарных упругих столкновениях одинаковых частиц следует, что относительные скорости до и после столкновения равны $|\mathbf{v}-\mathbf{v}_1|=|\mathbf{v}'-\mathbf{v}_1'|$, а $d\mathbf{v}d\mathbf{v}_1=d\mathbf{v}'d\mathbf{v}_1'$. Поэтому при замене $\mathbf{v}',\mathbf{v}_1'\to\mathbf{v},\mathbf{v}_1$ выражение $f'\cdot f_1'-f\cdot f$ изменит знак, и вместо последнего равенства получим

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\frac{1}{2}\int(2+\ln f'+\ln f_1')\left(f'\cdot f_1'-f\cdot f_1\right)|\mathbf{u}|\sigma(u,\theta)d\Omega\,d\mathbf{v}_1d\mathbf{v}. \quad (1.18)$$

Беря полусумму предыдущих равенств, находим

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\frac{1}{4}\int(\ln f'+\ln f_1'-\ln f-\ln f_1)\left(f'\cdot f_1'-f\cdot f_1\right)|\mathbf{u}|\sigma(u,\theta)d\Omega\,d\mathbf{v}_1d\mathbf{v}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\ln\frac{f'\cdot f_1'}{f\cdot f_1}\left(f'\cdot f_1'-f\cdot f_1\right)|\mathbf{u}|\sigma(u,\theta)d\Omega\,d\mathbf{v}_1d\mathbf{v}. \qquad (1.19)$$

Поскольку при любом x, y функция $(x\text{-}y)\ln(x/y)\geq 0$, то, следовательно, выражение $\left(f'\cdot f_1'-f\cdot f_1\right)\ln\dfrac{f'\cdot f_1'}{f\cdot f_1}\geq 0$, поэтому, принимая во внимание, что интеграл от положительной функции также положителен, получаем монотонное возрастание плотности энтропии во времени: $\partial\sigma/\partial t\geq 0$.

Задача 1.2. Вычислить для невырожденного электронного газа коэффициенты электропроводности и теплопроводности металла, если вдоль оси OX существует стационарный градиент температуры $\partial\tau/\partial x=\text{const}$ и приложено электрическое поле **E**, а время релаксации $\tau_c = Av^l$ (A>0, l>-7).

Решение. Определяем плотность тока j и поток тепла j_Q вдоль оси OX

$$j = e\int v_x f d\mathbf{v}\,, \tag{1.20}$$

$$j_Q = \int\frac{mv^2}{2}v_x f d\mathbf{v}\,. \tag{1.21}$$

Функция распределения f находится из кинетического уравнения в приближении времени релаксации (1.9)

$$f = f_0 - \tau_c\left(\frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v_x} + v_x\frac{\partial f_0}{\partial x}\right), \tag{1.22}$$

где f_0 – равновесная функция распределения

$$f_0 = n\left(\frac{m}{2\pi\tau}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2\tau}\right), \tag{1.23}$$

при этом предполагается, что электрическое поле E и $\partial\tau/\partial x$ слабо изменяют f_0. Принимая во внимание формулу (1.23), непосредственно вычисляем следующие производные

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_x} = n\left(\frac{m}{2\pi\tau}\right)^{3/2}\frac{\partial}{\partial v_x}\exp\left(-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_x^2)}{2\tau}\right) = -\frac{mv_x}{\tau}f_0, \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{mv^2}{2}-\frac{3}{2}\tau\right)f_0\frac{\partial\tau}{\partial x}. \tag{1.25}$$

Подставляя найденные производные в (1.22), находим выражение для функции распределения

$$f = f_0 \left\{ 1 + \frac{e\tau_c E}{\tau} v_x - \frac{\tau_c v_x}{\tau^2} \left(\frac{mv^2}{2} - \frac{3}{2}\tau \right) \frac{\partial \tau}{\partial x} \right\}. \tag{1.26}$$

Используя полученное выражение для функции распределения, вычисляем плотность тока

$$j = e\int v_x f_0 d\mathbf{v} + \frac{e^2 E}{\tau}\int \tau_c v_x^2 f_0 d\mathbf{v} - \frac{e}{\tau^2}\int \tau_c v_x^2 \left(\frac{mv^2}{2} - \frac{3}{2}\tau \right) f_0 d\mathbf{v} \frac{\partial \tau}{\partial x} =$$

$$= \frac{Ae^2 E}{3\tau}\int v^{l+2} f_0 d\mathbf{v} - \frac{Ae}{3\tau^2}\int v^{l+2} \left(\frac{mv^2}{2} - \frac{3}{2}\tau \right) f_0 d\mathbf{v} \frac{\partial \tau}{\partial x} =$$

$$= \frac{Ae^2 E}{3\tau} < v^{l+2} > - \frac{Ae}{3\tau} \left(\frac{m}{2\tau} < v^{l+4} > - \frac{3}{2} < v^{l+2} > \right) \frac{\partial \tau}{\partial x}, \tag{1.27}$$

где

$$< v^k > = \int v^k f_0 d\mathbf{v}. \tag{1.28}$$

Здесь мы приняли во внимание, что, поскольку пределы интегрирования симметричны относительно проекций скоростей электронов, то обнуляется слагаемое с нечетной подынтегральной функцией, а также что значение интеграла сохраняется, если v_x заменить на v_y или v_z, поэтому для подынтегральной функции можно считать $v_x^2 = v^2/3$ ($v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$). Переходя в сферическую систему координат для скоростей и используя формулу (П27) математического приложения, находим

$$< v^k > = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi\tau} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^{k+2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\tau} \right) dv = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\tau}{m} \right)^{k/2} \Gamma\left(\frac{k+3}{2} \right) \Rightarrow$$

$$< v^{l+2} > = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \frac{4\tau}{m} \left(\frac{2\tau}{m} \right)^{l/2} \Gamma\left(\frac{l+5}{2} \right), \quad < v^{l+4} > = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \frac{8\tau^2}{m^2} \left(\frac{2\tau}{m} \right)^{l/2} \Gamma\left(\frac{l+7}{2} \right). \tag{1.29}$$

Подстановка выражений (1.29) в (1.27) приводит нас к следующему выражению для плотности тока

$$j = \frac{4enA}{3m\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{l+5}{2}\right)\left(\frac{2\tau}{m}\right)^{l/2}\left\{eE - \left(\frac{l}{2}+1\right)\frac{\partial\tau}{\partial x}\right\}, \qquad (1.30)$$

где мы приняли во внимание, что

$$\Gamma\big((l+7)/2\big) = (l/2+5/2)\Gamma\big((l+5)/2\big).$$

Аналогично находим поток тепла (1.21).

$$j_Q = \int \frac{mv^2}{2} v_x f_0 d\mathbf{v} + \frac{meE}{2\tau}\int \tau_c v^2 v_x^2 f_0 d\mathbf{v} - \frac{m}{2\tau^2}\int \tau_c v^2 v_x^2 \left(\frac{mv^2}{2} - \frac{3}{2}\tau\right) f_0 d\mathbf{v} =$$

$$= \frac{AmeE}{6\tau}\int v^{l+4} f_0 d\mathbf{v} - \frac{Am}{6\tau^2}\int v^{l+4}\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{3}{2}\tau\right) f_0 d\mathbf{v} =$$

$$= \frac{AmeE}{6\tau} < v^{l+4} > - \frac{Am}{6\tau^2}\left(\frac{m}{2} < v^{l+6} > - \frac{3}{2}\tau < v^{l+4} >\right) =$$

$$= \frac{4nA}{3m\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{l+7}{2}\right)\left(\frac{2\tau}{m}\right)^{l/2}\tau\left\{eE - \left(\frac{l}{2}+2\right)\frac{\partial\tau}{\partial x}\right\}. \qquad (1.31)$$

Представим найденные потоки в виде

$$j = L_{11}E + L_{12}\frac{\partial\tau}{\partial x}, \qquad (1.32)$$

$$j_Q = L_{21}E + L_{22}\frac{\partial\tau}{\partial x}, \qquad (1.33)$$

где кинетические коэффициенты L_{ik} легко восстановить, используя выражения (1.30) и (1.31). Из этих соотношений находим коэффициент электропроводности (j=σE), полагая $\partial\tau/\partial x \equiv 0$

$$\sigma = L_{11} = \frac{4e^2nA}{3m\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{l+5}{2}\right)\left(\frac{2\tau}{m}\right)^{l/2}. \qquad (1.34)$$

Коэффициент теплопроводности (j_Q=-$\kappa\partial\tau/\partial x$) определяем из (1.31), полагая j=0

$$0 = L_{11}E + L_{12}\frac{\partial\tau}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{L_{12}}{L_{11}}\frac{\partial\tau}{\partial x} \Rightarrow$$

$$j_Q = \left(L_{22} - \frac{L_{12}L_{21}}{L_{11}}\right)\frac{\partial\tau}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \kappa = -L_{22} + \frac{L_{12}L_{21}}{L_{11}} =$$

$$=\frac{4nA\tau}{3m\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{l+7}{2}\right)\left(\frac{2\tau}{m}\right)^{l/2}. \qquad (1.35)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1) l=0 (время релаксации τ_c=A=const), тогда из (1.34) и (1.35) следует

$$\sigma=\frac{e^2nA}{m}, \quad \kappa=\frac{5nA}{2m}\tau. \qquad (1.36)$$

2) l=-1 (время релаксации τ_c=λ_0/v, λ_0 – средняя длина свободного пробега электрона).

$$\sigma=\frac{4e^2n\lambda_0}{3}\sqrt{\frac{1}{2\pi m\tau}}=\frac{e^2n\lambda_0}{3\tau}<v>, \quad \kappa=\frac{8n\lambda_0}{3}\sqrt{\frac{\tau}{2\pi m}}=\frac{2n\lambda_0}{3}<v>, \qquad (1.37)$$

где $<v>=\sqrt{8\tau/\pi m}$ - средняя арифметическая скорость молекул газа.

Задача 1.3. Определить тензор электропроводности вырожденного электронного газа, помещенного в скрещенные однородные электрическое **E** и магнитное **H** поля.

Решение. Решение (1.10) стационарного уравнения Больцмана в приближении времени релаксации для однородного электронного газа при наличии постоянных электрического **E** и магнитного **H** полей имеет вид

$$f=f_0+\frac{e\tau_c}{m}\left(\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{H}\right)\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}. \qquad (1.38)$$

Если $\varepsilon(v)=mv^2/2$, то $\partial f_0/\partial\mathbf{v}=\left(\partial f_0/\partial\varepsilon\right)m\mathbf{v}$, а

$$\left(\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)\cdot\partial f_0/\partial\mathbf{v}=m\partial f_0/\partial\varepsilon\cdot\left(\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{v}=0. \qquad (1.39)$$

Поэтому для учета влияния эффекта магнитного поля нельзя в правой части (1.38) всюду заменять f на f_0. Учитывая (1.39), запишем выражение (1.38) в виде

$$f=f_0+e\tau_c\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}+\frac{e\tau_c}{mc}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)\frac{\partial(f-f_0)}{\partial\mathbf{v}}. \qquad (1.40)$$

Будем искать решение данного уравнения в виде

$$f = f_0 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}, \tag{1.41}$$

где $\mathbf{a}(\varepsilon)$ – неизвестный вектор. Подставляя предполагаемое решение для f (1.41) в уравнение (1.40), получаем уравнение для вектора $\mathbf{a}$

$$-e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} + (\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})\cdot\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{\tau_c} \Rightarrow \left(-e\mathbf{E} + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}) - \frac{\mathbf{a}}{\tau_c}\right)\mathbf{v} = 0 \Rightarrow$$

$$-e\mathbf{E} + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}) - \frac{\mathbf{a}}{\tau_c} = 0, \tag{1.42}$$

где $\boldsymbol{\omega} = e\mathbf{H}/mc$. Умножая поочередно обе части этого уравнения на $\boldsymbol{\omega}$ сначала скалярно, а потом векторно, получаем уравнения

$$-e\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a})\cdot\boldsymbol{\omega} - \frac{\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega}}{\tau_c} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega} = -e\tau_c\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{1.43}$$

$$-e(\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a})\times\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\tau_c}(\mathbf{a}\times\boldsymbol{\omega}) = 0 \Rightarrow \text{(раскрываем двойное}$$

векторное произведение) $\Rightarrow (\mathbf{a}\times\boldsymbol{\omega}) = \tau_c\left(-e(\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{a}\omega^2\right).$

(1.44)

Подставляем сюда $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{a}$ из (1.43), получаем

$$(\mathbf{a}\times\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{a}\tau_c\omega^2 + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\omega})e\tau^2{}_c - e\tau_c(\mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}). \tag{1.45}$$

Исключаем векторное произведение из уравнения (1.42), используя (1.45), находим

$$\mathbf{a} = -e\tau_c\mathbf{E} - e\tau_c^3\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{E}) - e\tau_c^2(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E}) - \omega^2\tau_c^2\mathbf{a} \Rightarrow$$

$$\mathbf{a} = -\frac{e\tau_c}{1+\omega^2\tau_c^2}\left(\mathbf{E} + \tau_c^2\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{E}) + \tau_c(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E})\right). \tag{1.46}$$

Вычисляем плотность тока по формуле

$$\mathbf{j} = e\int\mathbf{v}fd\mathbf{v} = e\int\mathbf{v}f_0d\mathbf{v} + e\int\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)\mathbf{v}(\mathbf{va})d\mathbf{v} =$$

$$= -e^2\int\frac{\tau_c\mathbf{v}\left\{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}) + \tau_c^2(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v})(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{E}) + \tau_c(\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E}))\right\}}{1+\omega^2\tau_c^2}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)d\mathbf{v}. \tag{1.47}$$

Если $\mathbf{E} = E\mathbf{e_x}$, $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$, то $(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{E}) = 0$, $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E}) = \omega E\mathbf{e}_y$, поэтому

$$j_\alpha = -e^2 E \int \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\tau_c v_\alpha \left\{ v_x + \tau_c \omega v_y \right\}}{1+\omega^2 \tau_c^2} d\mathbf{v} \quad \Rightarrow$$

$$j_x = -e^2 E \int \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\tau_c v_x^2}{1+\omega^2\tau_c^2} d\mathbf{v} = -\frac{e^2 E}{3} \int \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\tau_c v^2}{1+\omega^2\tau_c^2} d\mathbf{v},$$

$$j_y = -e^2 \omega E \int \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\tau_c v_y^2}{1+\omega^2\tau_c^2} d\mathbf{v} = -\frac{e^2 \omega E}{3} \int \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\tau_c^2 v^2}{1+\omega^2\tau_c^2} d\mathbf{v},$$

$$j_z = 0. \qquad (1.48)$$

Воспользуемся первым приближением для фермиевского интеграла (П25), положив

$$-\partial f_0 / \partial \varepsilon \approx \left(2m^3 / h^3 \right) \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_F \right), \; d\mathbf{v} = 4\pi v^2 dv = \frac{4\pi}{m} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} d\varepsilon . \qquad (1.49)$$

В результате из (1.48) получим

$$j_x = -\frac{16\pi\sqrt{2} m^{3/2} e^2 E}{3mh^3} \int \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_F \right) \frac{\tau_c(\varepsilon)\varepsilon^{3/2}}{1+\omega^2\tau_c^2(\varepsilon)} d\varepsilon = -\frac{8\pi e^2}{3m} \left(\frac{2m\varepsilon_F}{h^2} \right)^{3/2} \frac{\tau_c(\varepsilon_F)}{1+\omega^2\tau_c^2(\varepsilon_F)} E,$$

$$j_y = -\frac{16\pi\sqrt{2} m^{3/2} e^2 \omega E}{3mh^3} \int \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_F \right) \frac{\tau_c^2(\varepsilon)\varepsilon^{3/2}}{1+\omega^2\tau_c^2(\varepsilon)} d\varepsilon = -\frac{8\pi e^2}{3m} \left(\frac{2m\varepsilon_F}{h^2} \right)^{3/2} \frac{\omega\tau_c^2(\varepsilon_F)}{1+\omega^2\tau_c^2(\varepsilon_F)} E.$$

$$(1.50)$$

Принимая во внимание выражение для энергии Ферми электронного газа (П24) $\varepsilon_F = \left(h^2 / 2m \right) \left(3n / 8\pi \right)^{2/3}$, окончательно получим

$$j_x = -\frac{ne^2}{m} \frac{\tau_c(\varepsilon_F)}{1+\omega^2\tau_c^2(\varepsilon_F)} E, \quad j_y = -\frac{ne^2}{m} \frac{\tau_c^2(\varepsilon_F)\omega}{1+\omega^2\tau_c^2(\varepsilon_F)} E . \qquad (1.51)$$

Из приведенных выражений непосредственно восстанавливаем искомый тензор электропроводности

$$\sigma_{xx} = -\frac{ne^2}{m} \frac{\tau_c(\varepsilon_F)}{1+\omega^2\tau_c^2(\varepsilon_F)}, \sigma_{yx} = -\frac{ne^2}{m} \frac{\tau_c^2(\varepsilon_F)\omega}{1+\omega^2\tau_c^2(\varepsilon_F)},$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0. \qquad (1.52)$$

Задача 1.4. Вычислить продольную диэлектрическую проницаемость бесстолкновительной плазмы. Рассмотреть случаи высоких и низких частот.

Решение. Широкую область применения кинетической теории представляет *плазма*, под которой понимается полностью ионизованный газ. Как правило, плазму считают двухкомпонентной – содержащей лишь электроны и положительные ионы одного сорта. Если масса ионов много больше массы электронов, то движением ионов можно пренебречь. Тогда ионы образуют только неподвижный положительный ”фон”, компенсирующий плотность заряда электронов в состоянии равновесия.

Если эффективная частота столкновений ν мала по сравнению с частотой ω изменения макроскопических полей **E** и **B**, а также и в случае, если длина пробега частиц $l \sim \overline{v}/\nu$ велика по сравнению с расстоянием L, на котором меняется поле, столкновениями можно пренебречь (Stf=0). В таких случаях говорят о *бесстолкновительной плазме*. Тогда получаем уравнение, называемое в теории плазмы *уравнением Власова*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \qquad (1.53)$$

где электрическое поле определяется уравнением Максвелла

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad (1.54)$$

Для слабого поля ищем функцию распределения электронов в виде $f=f_0+\Delta f$, где f_0 – невозмущенная полем стационарная изотропная и пространственно-однородная функция распределения (например, равновесная функция распределения), а Δf – ее изменение под влиянием поля, которое считается малым, причем одного порядка с **E**. В линейном приближении уравнение (1.53) приобретает вид

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \Delta f}{\partial \mathbf{r}} - e\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0. \qquad (1.55)$$

Пусть поле **E** имеет вид $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$, тогда $\Delta f \sim \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$. Из уравнения (1.55) находим

$$\Delta f = \frac{e\mathbf{E}}{i(\mathbf{kv} - \omega)}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \qquad (1.56)$$

Как было сказано выше, в невозмущенной плазме плотность зарядов электронов компенсируется в каждой точке зарядами ионов, а плотность тока равна нулю, поэтому плотность зарядов и плотность тока, возникающих в плазме при ее возмущении полем, будут равны

$$\rho = -e\int \Delta f d\mathbf{p}, \quad \mathbf{j} = -e\int \mathbf{v}\Delta f d\mathbf{p}. \tag{1.57}$$

Введем в рассмотрение вектор электрической поляризации **P**, который удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\mathbf{P} = -\rho. \tag{1.58}$$

Очевидно, что вектор **P** также будет пропорционален $\exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$, поэтому, как это следует из (1.58), имеем

$$i\mathbf{kP} = -\rho, \quad -i\omega\mathbf{P} = \mathbf{j}. \tag{1.59}$$

Воспользуемся первым соотношением в (1.59) и формулами (1.57) и (1.56), в результате найдем

$$i\mathbf{kP} = -e^2\mathbf{E}\int \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{i(\mathbf{kv} - \omega)}. \tag{1.60}$$

Нетрудно заметить, что у подынтегральной функции имеется полюс при $\omega = \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$. Чтобы придать интегралу смысл, вместо строго гармонического поля $(\sim \exp(-i\omega t))$ рассматривают поле, которое бесконечно медленно включается, начиная от времени $t = -\infty$. Такое описание поля соответствует добавлению к его частоте бесконечно малой положительной мнимой части, т.е. замена $\omega \to \omega + i\delta$, где $\delta \to +0$.

Пусть поле **E** (а с ним и **P**) направлено вдоль **k**, тогда $4\pi\mathbf{P} = (\varepsilon_l - 1)\mathbf{E}$. Таким образом, принимая во внимание (1.60), получаем следующую формулу для продольной диэлектрической проницаемости плазмы

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{k^2}\int \mathbf{k}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{\mathbf{kv} - \omega - i\delta}. \tag{1.61}$$

Для определенности выберем направление **k** вдоль оси *x*, тогда из (1.61) получим

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e^2}{k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0(p_x)}{\partial p_x} \frac{dp_x}{kv_x - \omega - i\delta}, \tag{1.62}$$

где

$$f_0(p_x) = \int f_0(p) dp_y dp_z \tag{1.63}$$

Отметим, что интеграл в (1.62) вычисляется по теореме Сохоцкого-Племеля (П20), поэтому диэлектрическая проницаемость бесстолкновительной плазмы оказывается комплексной величиной

$$\varepsilon_l = \varepsilon_l' + i\varepsilon_l'', \quad \varepsilon_l' = 1 - \frac{4\pi m e^2}{k^2} \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0(p_x)}{\partial p_x} \frac{dp_x}{p_x - m\omega / k},$$

$$\varepsilon_l'' = -\frac{4\pi^2 e^2}{k} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0(p_x)}{\partial p_x} \delta(\omega - kp_x / m) dp_x = -\frac{4\pi^2 e^2 m}{k^2} \left. \frac{\partial f_0(p_x)}{\partial p_x} \right|_{p_x = m\omega/k}. \tag{1.64}$$

Как известно, комплексная диэлектрическая проницаемость означает наличие диссипации энергии электрического поля в среде. Средняя в единицу времени в единице объема энергия диссипации монохроматического продольного электрического поля определяется выражением [3]

$$Q = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon_l'' |\mathbf{E}|^2. \tag{1.65}$$

Подставив сюда ε'' из (1.64), получим

$$Q = -|\mathbf{E}|^2 \frac{\pi e^2 m\omega}{2k^2} \left. \frac{\partial f_0(p_x)}{\partial p_x} \right|_{p_x = m\omega/k}. \tag{1.66}$$

Таким образом, диссипация возникает уже в бесстолкновительной плазме. Это явление было предсказано Л.Д. Ландау (1946), и поэтому его называют *затуханием Ландау*. Поскольку оно не связано со столкновениями, оно принципиально отличается от диссипации в обычных поглощающих средах: бесстолкновительная диссипация не связана с возрастанием энтропии и поэтому представляет собой термодинамически обратимый процесс.

Подробно рассмотрим случай с максвелловским равновесным распределением электронов

$$f_0(p_x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi m\tau}} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m\tau}\right). \qquad (1.67)$$

Подстановка (1.67) в (1.64) приводит к следующим выражениям для реальной и мнимой частей диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_l' = 1 + \frac{4\pi e^2}{\tau k^2}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_x f_0(p_x)dp_x}{p_x - m\omega/k} = 1 + \frac{4\pi n e^2}{\tau k^2} + \frac{4\pi m\omega e^2}{\tau k^3}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(p_x)dp_x}{p_x - m\omega/k}$$

$$\varepsilon_l'' = \frac{4\pi^2 e^2}{\tau k^2} p_x f_0(p_x)\Big|_{p_x = m\omega/k} = \frac{4\pi^2 e^2 n m\omega}{\tau\sqrt{2\pi m\tau}k^3} e^{-\frac{m\omega^2}{2k^2\tau}}. \qquad (1.68)$$

В пределе больших частот имеем

$$\frac{1}{p_x - m\omega/k} = -\frac{k}{m\omega}\left(1 + \frac{kp_x}{m\omega} + \left(\frac{kp_x}{m\omega}\right)^2 + \left(\frac{kp_x}{m\omega}\right)^3 + \ldots\right), \qquad (1.69)$$

$$\varepsilon_l' = 1 + \frac{4\pi n e^2}{\tau k^2} - \frac{4\pi e^2}{\tau k^2}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f_0(p_x)\left(1 + \frac{kp_x}{m\omega} + \left(\frac{kp_x}{m\omega}\right)^2 + \left(\frac{kp_x}{m\omega}\right)^3 + \left(\frac{kp_x}{m\omega}\right)^4 + \ldots\right)dp_x =$$

$$= 1 - \frac{4\pi n e^2}{\tau m\omega k}\left(< p_x > + \frac{k}{m\omega} < p_x^2 > + \left(\frac{k}{m\omega}\right)^2 < p_x^3 > + \left(\frac{k}{m\omega}\right)^3 < p_x^4 > + \ldots\right),$$

где $< p_x^l >$ – средние значения степеней x-проекции импульса. Принимая во внимание, что $< p_x^l > = 0$ для нечетных значений l и формулы (П28), получим

$$\varepsilon_l' = 1 - \frac{4\pi n e^2}{m\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2\tau}{m\omega^2} + \ldots\right) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2\tau}{m\omega^2} + \ldots\right), \qquad (1.70)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}} \qquad (1.71)$$

- так называемая *плазменная* (или *ленгмюровская*) частота для электронов.

В обратном предельном случае малых частот найдем

$$\varepsilon_l' = 1 + \frac{m\omega_0^2}{\tau k^2} + \frac{4\pi m\omega e^2}{\tau k^3}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_0(p_x)dp_x}{p_x - m\omega / k} =$$

$$= 1 + \frac{m\omega_0^2}{\tau k^2} + \frac{4\pi mn\omega e^2 e^{-\frac{m\omega^2}{2\tau k^2}}}{\tau\sqrt{2\pi m\tau}k^3}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2m\tau}-\frac{z\omega}{k\tau}}\frac{dz}{z} \approx 1 + \frac{m\omega_0^2}{\tau k^2} +$$

$$+ \frac{4\pi mn\omega e^2 e^{-\frac{m\omega^2}{2\tau k^2}}}{\tau\sqrt{2\pi m\tau}k^3}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2m\tau}}\left(\frac{1}{z} - \frac{\omega}{k\tau}\right)dz = 1 + \frac{m\omega_0^2}{\tau k^2}\left(1 - \frac{m\omega^2}{\tau k^2}\right).$$

(1.72)

Здесь мы приняли во внимание, что для низких частот $\exp(-m\omega^2 / 2\tau k^2) \approx 1$, и выражения (П15) для интеграла Пуассона. Мнимую часть диэлектрической проницаемости в пределе низких частот также можно упростить

$$\varepsilon_l'' \approx \frac{m\omega_0^2\omega}{\tau k^3}\sqrt{\frac{\pi m}{2\tau}}. \tag{1.73}$$

Отметим, что независящее от k предельное значение для диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \tag{1.74}$$

Пространственная дисперсия приводит к возможности распространения в плазме продольных электрических волн. Закон дисперсии этих волн определим из уравнения Максвелла (1.54), которое можно переписать в виде

$$ikE = -4\pi e\int \Delta f d\mathbf{p}. \tag{1.75}$$

Подставляя сюда найденное выражение для Δf и сокращая на E, получим

$$1 = \frac{4\pi e^2}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0(p_x)}{\partial p_x}\frac{dp_x}{kv_x - \omega - i\delta}. \tag{1.76}$$

Это уравнение и определяет зависимость $\omega(k)$. Принимая во внимание уже проделанные выше расчеты интеграла, стоящего в правой части уравнения (1.76), получим для предельного случая высоких частот

$$1 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2\tau}{m\omega^2} + \ldots\right) - i\frac{4\pi^2 e^2 nm\omega}{\tau\sqrt{2\pi m\tau}k^3} e^{-\frac{m\omega^2}{2k^2\tau}}. \qquad (1.77)$$

Корни этого уравнения являются комплексными ($\omega = \omega' + i\omega''$). Если $\varepsilon'' > 0$, то $\omega'' < 0$. Величина $\gamma = -\omega''$ представляет собой декремент затухания волны, происходящего по закону exp(-γ*t*).

Решение уравнения (1.77) осуществляется последовательными приближениями. В первом приближении, опустив все зависящие от *k* члены, найдем, что

$$\omega = \omega_0,$$

т.е. волны имеют постоянную частоту. Эти волны называются *плазменными*, или *ленгмюровскими*. Для определения поправки в вещественной части частоты, которая будет зависеть от *k*, полагаем в поправочном члене правой части (1.77) $\omega = \omega_0$, в результате получим

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{3k^2\tau}{m\omega_0^2}\right) \Rightarrow \omega = \omega_0\sqrt{1 + \frac{3k^2\tau}{m\omega_0^2}} \approx \omega_0\left(1 + \frac{3k^2\tau}{2m\omega_0^2}\right). \qquad (1.78)$$

Таким образом, начальное возмущение в виде неоднородного распределения заряда колеблется с частотой ω_0. Учет разброса скоростей частиц плазмы приводит к тому, что область возмущения смещается и расплывается.

Для определения мнимой части частоты преобразуем показатель экспоненты в правой части уравнения (1.77) с учетом выражения (1.78)

$$\frac{m\omega^2}{2\tau k^2} = \frac{m\omega_0^2}{2\tau k^2}\left(1 + \frac{3k^2\tau}{m\omega_0^2}\right) = \frac{m\omega_0^2}{2\tau k^2} + \frac{3}{2}. \qquad (1.79)$$

Это приводит к следующему выражению для частоты

$$\omega^2 \approx \omega_0^2\left(1 + \frac{3k^2\tau}{m\omega_0^2} + \ldots\right) - i\frac{4\pi^2 e^2 nm\omega_0^3}{\tau\sqrt{2\pi m\tau}k^3} e^{-\frac{m\omega_0^2}{2\tau k^2} - \frac{3}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\gamma = -\omega'' = \frac{2\pi^2 e^2 nm\omega_0^3}{\tau\sqrt{2\pi m\tau}k^3} e^{-\frac{m\omega_0^2}{2\tau k^2} - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_0}{(kr_D)^3} \exp\left(-\frac{1}{2(kr_D)^2} - \frac{3}{2} \right), \quad (1.80)$$

где $r_D = \sqrt{\tau / 4\pi ne^2}$ - дебаевский радиус.

Картину взаимодействия электронов с волной удобно представить в системе отсчета, которая движется со скоростью волны ω/k. В этой системе отсчета электрическое поле волны представляет собой ряд потенциальных ям глубины $U_0 \sim E/k$. Большая часть электронов имеет в этой системе отсчета энергию, бóльшую глубины ям и движется, периодически ускоряясь и замедляясь. Те электроны, для которых в лабораторной системе отсчета $v_x \approx \omega/k$, будут колебаться в потенциальных ямах с частотой $\Omega \sim \sqrt{U_0''/m} = \sqrt{kE/m}$. В лабораторной системе отсчета те электроны, которые слегка опережают волну, отражаются от убегающей от них стенки, замедляются и передают волне энергию, а более медленные – отражаются от догоняющего их края потенциальной ямы и ускоряются. Более быстрых меньше, поскольку $\partial f_0 / \partial p_x < 0$. Эта картина и показывает недиссипативный характер поглощения волн. Пока соударения несущественны, затухание определяется перекачкой энергии от упорядоченного волнового движения к отдельным "резонансным" группам электронов.

2. Уравнение кинетического баланса Паули

В квантовой статистике широко используется *уравнение кинетического баланса Паули*. Наглядно его можно получить, используя следующие балансовые соображения. Пусть для ансамбля замкнутых систем N_k означает число систем, находящихся в k-м микросостоянии, и пусть P_{km} – вероятность перехода в единицу времени системы из состояния m в состояние k под действием некоторого слабого возмущения. Тогда скорость изменения числа N_k задается уравнением баланса

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \sum_m \left(P_{km} N_m - P_{mk} N_k \right). \qquad (2.1)$$

Если разделить эти уравнения на общее число систем N, то они определяют изменение во времени диагональных компонент матрицы плотности в энергетическом представлении $w_k = N_k / N = \langle k | \rho | k \rangle$

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} = \sum_m \left(P_{km} w_m - P_{mk} w_k \right), \qquad (2.2)$$

причем недиагональные компоненты вообще не входят в уравнения. Таким образом, уравнения Паули являются результатом определенного огрубления уравнения Лиувилля – Неймана. Такого рода огрубление может быть осуществлено с использованием гипотезы хаотических фаз, в соответствии с которой недиагональные элементы очень быстро затухают. Микроскопическая обратимость переходов в замкнутой системе выражается соотношением $P_{km} = P_{mk}$. Уравнения Паули обеспечивают возрастание энтропии системы и установление равновесия в ней.

Примеры решения задач

Задача 2.1. Показать, что уравнение Паули приводит к возрастанию энтропии системы при любом начальном неравновесном распределении (Н-теорема Больцмана).

Решение. Вычислим производную по времени от энтропии системы, которая определяется выражением

$$\sigma = -\sum_k w_k \ln w_k , \qquad (2.3)$$

где w_k - вероятность нахождения системы в состоянии k:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\sum_k w_k \ln w_k = -\sum_k \left(1 + \ln w_k\right)\frac{\partial w_k}{\partial t} = -\sum_k \frac{\partial w_k}{\partial t} - \sum_k \ln w_k \frac{\partial w_k}{\partial t}. \qquad (2.4)$$

Поскольку имеет место условие нормировки вероятностей $\sum_k w_k = 1$, то получим

$$\sum_k \frac{\partial w_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_k w_k = \frac{\partial 1}{\partial t} = 0, \tag{2.5}$$

Поэтому, используя (2.5) и уравнение Паули (2.2), получим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\sum_k \ln w_k \frac{\partial w_k}{\partial t} = -\sum_{k,m}\left(P_{km}w_m - P_{mk}w_k\right)\ln w_k = \{P_{km} = P_{mk}\} =$$

$$= \sum_{k,m} P_{km}\left(w_k - w_m\right)\ln w_k \,. \tag{2.6}$$

Осуществляем переобозначения индексов суммирования, получаем

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \sum_{k,m} P_{km}\left(w_m - w_k\right)\ln w_m \,. \tag{2.7}$$

Берем полусумму выражений (2.6) и (2.7) (симметризация по индексам), находим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{k,m} P_{km}\left\{\left(w_m - w_k\right)\ln w_m + \left(w_k - w_m\right)\ln w_k\right\} = \frac{1}{2}\sum_{k,m} P_{km}\left(w_k - w_m\right)\ln\frac{w_k}{w_m}. \tag{2.8}$$

Поскольку выражение под знаком суммы неотрицательно, то и все выражение (2.8) неотрицательно, поэтому $\partial\sigma / \partial t \geq 0$. Отметим, что $\partial\sigma / \partial t = 0$ при $w_k = w_m$, что соответствует равновесному состоянию в микроканоническом ансамбле. В результате мы получили, что при $w_k \neq w_m$ $\partial\sigma / \partial t > 0$ при любом начальном неравновесном распределении.

Задача 2.2. Решить уравнение кинетического баланса Паули (2.2) для *n*-уровневой системы с начальным распределением вероятностей $w_1(0) = 1, w_k(0) = 0$ $(k = 2,3,...,n)$, считая, что все вероятности переходов между различными состояниями одинаковы: $P_{km} = P\left(1 - \delta_{km}\right)$.

Решение. Поскольку все вероятности w_k $(k \neq 1)$ равны между собой, то уравнение Паули (2.2) преобразуется к виду

$$\dot{w}_1 = \sum_{m=2}^{n}\left(P_{1m}w_m - P_{m1}w_1\right) = P(n-1)(w_k - w_1),$$

$$\dot{w}_k = \sum_{m=1, m\neq k}^{n}\left(P_{km}w_m - P_{mk}w_k\right) = P(w_1 - w_k), \quad k = 2,3,...,n. \qquad (2.9)$$

Ищем решение данных уравнений в виде

$$w_1(t) = C_1 e^{\lambda t}, \quad w_k(t) = C_2 e^{\lambda t}, \quad k = 2,3,...,n. \qquad (2.10)$$

Подстановка выражений (2.10) в уравнения (2.9) приводит к следующей алгебраической системе уравнений

$$\begin{aligned}&\left(\lambda + P(n-1)\right)C_1 - P(n-1)C_2 = 0,\\ &PC_1 - (\lambda + P)C_2 = 0.\end{aligned} \qquad (2.11)$$

Система уравнений (2.11) имеет нетривиальное решение при условии

$$\begin{vmatrix}\lambda + P(n-1) & -P(n-1)\\ P & -(\lambda + P)\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda\left(\lambda + Pn\right) = 0, \qquad (2.12)$$

Откуда находим $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -nP$. Для найденных значений λ находим коэффициенты C_1 и C_2

$$\begin{aligned}&\lambda = 0: \quad C_1 = C_2,\\ &\lambda = -nP: \quad C_2 = -C_1/(n-1).\end{aligned} \qquad (2.13)$$

Полученные значения λ и коэффициентов $C_{1,2}$ позволяют записать выражения для вероятностей $w_k(t)$ в виде

$$w_1(t) = \alpha + \beta e^{-nPt}, \quad w_k(t) = \alpha - \frac{\beta}{n-1}e^{-nPt}. \qquad (2.14)$$

Коэффициенты α и β находим из начальных условий:

$$\begin{aligned}&w_1(0) = \alpha + \beta = 1, \quad w_k(0) = \alpha - \beta/(n-1) = 0 \quad \Rightarrow\\ &\alpha = 1/n, \quad \beta = 1 - 1/n.\end{aligned} \qquad (2.15)$$

Подстановка найденных значений коэффициентов α и β в уравнения (2.14) приводит к окончательному результату

$$w_1(t) = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{-nPt}, \quad w_k(t) = \frac{1}{n}\left(1 - e^{-nPt}\right). \qquad (2.16)$$

Видно, что предельные вероятности при $t\to\infty$ одинаковы:

$$w_1(\infty) = w_k(\infty) = \frac{1}{n}. \qquad (2.17)$$

3. Уравнения Ланжевена и Фоккера-Планка

На движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ броуновскую частицу в среде (например, жидкости) действует сила трения $\mathbf{F}_c = -m\gamma\mathbf{v}$, где γ - постоянная затухания скорости броуновской частицы; для сферической частицы $\gamma = 6\pi\eta R$ (R – радиус частицы, η - вязкость среды). В каждый момент времени движение броуновской частицы не определяется только действием силы трения, поскольку она испытывает столкновения с отдельными молекулами окружающей среды. Вследствие хаотического движения молекул это приводит к сложному и непрекращающемуся движению броуновских частиц. Для учета этих столкновений Ланжевен постулировал существование дополнительной к трению силы $\mathbf{F}(t) = m\boldsymbol{\xi}(t)$ (*сила Ланжевена*), которая является случайной функцией времени. Поэтому уравнение движения броуновской частицы (*уравнение Ланжевена*) приобретает вид стохастического дифференциального уравнения вида

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma\mathbf{v} - \frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}\ , \qquad (3.1)$$

где $U(\mathbf{r})$ - потенциал внешнего поля. Относительно ланжевеновской силы $\boldsymbol{\xi}(t)$ делаются следующие предположения:

$$<\boldsymbol{\xi}(t)>=0, \quad <\xi_\alpha(t)\xi_\beta(t')>=0 \quad \text{при}\ |t-t'| \geq \tau_0, \qquad (3.2)$$

где τ_0 – длительность столкновения. Усреднение ведется по всем реализациям случайной силы. Обычно время τ_0 очень мало, и разумно использовать так называемое приближение “*белого шума*”

$$<\xi_\alpha(t)\xi_\beta(t')>= q\delta_{\alpha\beta}\delta(t-t'), \qquad (3.3)$$

где q – мера интенсивности флуктуаций случайной силы.

Функция распределения броуновской частицы по координате и скорости определяется как

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = <\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t))>, \qquad (3.4)$$

где $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ являются решения уравнения Ланжевена для некоторой конкретной реализации случайной силы $\boldsymbol{\xi}(t)$, а усреднение снова проводится по всем реализациям $\boldsymbol{\xi}(t)$. Используя уравнение Ланжевена в приближении “белого шума”, можно (см. ниже) получить уравнение для функции распределения броуновской частицы

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial t} + \mathbf{v}(t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(\gamma\mathbf{v} + \frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{r})\right) f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) - \frac{q}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}^2} f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = 0, \qquad (3.5)$$

которое называется *уравнением Фоккера-Планка*.

Во многих ситуациях основной интерес представляет собой пространственное распределение частиц, т.е концентрация

$$n(\mathbf{r},t) = \int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}. \qquad (3.6)$$

Уравнение эволюции для концентрации следует из уравнения Фоккера-Планка при $t>>1/\gamma$ и называется *уравнением Смолуховского*

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D\Delta n(\mathbf{r},t) + \frac{1}{m\gamma}\nabla\left(n(\mathbf{r},t)\nabla U(\mathbf{r})\right), \qquad (3.7)$$

где $D=k_BT/m\gamma$ - коэффициент диффузии.

Примеры решения задач

Задача 3.1. Для броуновской частицы в среде найти среднее значение и корреляционную функцию компоненты скорости, среднее квадратичное смещение, используя уравнение Ланжевена с дельта-коррелированной случайной силой.

Решение. Без потери общности рассмотрим одномерный вариант уравнения Ланжевена

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \xi(t). \qquad (3.8)$$

Считая $\xi(t)$ заданной функцией от t и принимая начальное условие $v(0)=v_0$, проинтегрируем уравнение (3.8). При этом получим

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-t')}\xi(t')dt'. \tag{3.9}$$

Выполняя усреднение по всем реализациям случайной силы, получим

$$< v(t) >= v_0 e^{-\gamma t}, \tag{3.10}$$

поскольку $<\xi(t)>=0$. Таким образом, мы получили, что среднее значение скорости затухает со временем релаксации $\tau_c=1/\gamma$.

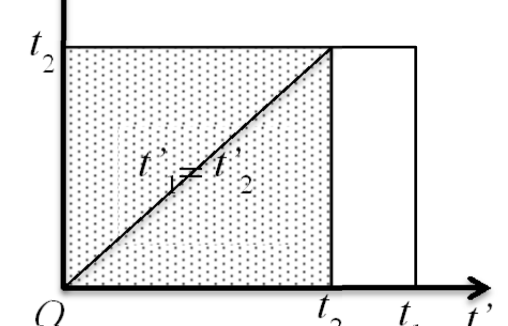
Для вычисления корреляционной функции перемножим значения $v(t)$, найденные с помощью уравнения (3.9) для двух моментов времени t и t', и усредним по всем реализациям случайной силы, учитывая предположение (3.3). Тогда найдем

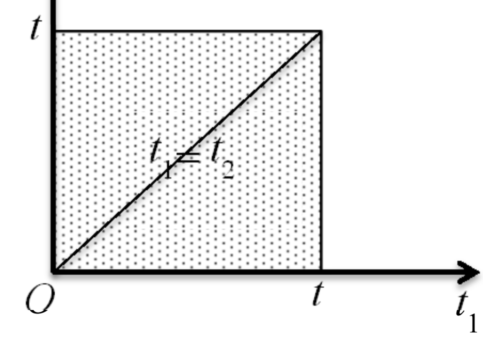
$$< v(t_1)v(t_2) >= v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + \int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-t_1')}dt_1' \int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_2-t_2')} < \xi(t_1')\xi(t_2') > dt_2' =$$

$$= v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + q\int_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-t_1')}dt_1' \int_0^{t_2} e^{-\gamma(t_2-t_2')}\delta(t_1'-t_2')dt_2'. \tag{3.11}$$

В двойном интеграле пределы интегрирования по обеим переменным можно распространить от 0 до $\min(t_1,t_2)$, поскольку, например, при $t_1>t_2$ подынтегральное выражение в области $t_1' > t_2$ равно нулю (см. рис. 1а). Вычисляя интеграл (3.11), получим

$$< v(t_1)v(t_2) >= v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + q \int_0^{\min(t_1,t_2)} e^{-\gamma(t_1-t_1')}dt_1' \int_0^{\min(t_1,t_2)} e^{-\gamma(t_2-t_2')}\delta(t_1'-t_2')dt_2' =$$





а) б)

Рис. 1. Изображения областей интегрирования

$$= v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + q e^{-\gamma(t_1+t_2)} \int\limits_0^{\min(t_1,t_2)} e^{2\gamma t_1'} dt_1' = v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + \frac{q}{2\gamma} e^{-\gamma(t_1+t_2)} \left(e^{2\gamma \min(t_1,t_2)} - 1 \right) =$$

$$= v_0^2 e^{-\gamma(t_1+t_2)} + \frac{q}{2\gamma} \left(e^{-\gamma|t_1-t_2|} - e^{-\gamma(t_1+t_2)} \right). \qquad (3.12)$$

На больших временах (в стационарном состоянии) выражение для корреляционной функции (3.12) упрощается

$$< v(t_1) v(t_2) >= \frac{q}{2\gamma} e^{-\gamma|t_1-t_2|}. \qquad (3.13)$$

Принимая во внимание, что $<v^2(t)>=\tau/m$, найдем из (3.13)

$$q = \frac{2\gamma\tau}{m}. \qquad (3.14)$$

Среднее квадратичное смещение броуновской частицы с начальным положением x_0 вычисляем следующим образом

$$< \left(x(t) - x_0 \right)^2 >= \int\limits_0^t \int\limits_0^t < v(t_1) v(t_2) > dt_1 dt_2 = \frac{\tau}{m} \int\limits_0^t \int\limits_0^t e^{-\gamma|t_1-t_2|} dt_1 dt_2 \quad . \qquad (3.15)$$

Область интегрирования представляет собой квадрат (см. рис. 1б). Очевидно, что интеграл (3.15) равен удвоенному интегралу по нижнему треугольнику

$$< \left(x(t) - x_0 \right)^2 >= \frac{2\tau}{m} \int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} e^{-\gamma(t_1-t_2)} dt_2 = \frac{2\tau}{m\gamma} \int\limits_0^t dt_1 \left(1 - e^{-\gamma t_1} \right) =$$

$$= \frac{2\tau}{m\gamma} \left(t - \frac{1}{\gamma} \left(1 - e^{-\gamma t} \right) \right). \qquad (3.16)$$

В пределе больших времен (t>>$1/\gamma$), получаем формулу Эйнштейна для среднего квадратичного смещения частицы

$$< \left(x(t) - x_0 \right)^2 >= 2Dt, \; D = \frac{\tau}{m\gamma}, \qquad (3.17)$$

где коэффициент D называется *коэффициентом диффузии*. Формула для среднего квадратичного смещения легко обобщается на трехмерный изотропный случай, когда корреляционная функция ланжевеновской силы имеет вид (3.3)

$$<\left(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}_0\right)^2>=6Dt\,. \qquad (3.18)$$

Задача 3.2. Вывести уравнение Фоккера-Планка для функции распределения броуновских частиц в среде, на которые воздействует внешняя сила, определяемая потенциалом $U(\mathbf{r})$.

Решение. Продифференцируем выражение (3.4) для функции распределения

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial t}=-<\dot{\mathbf{r}}(t)\delta'(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t))>-<\dot{\mathbf{v}}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\delta'(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t))>\,. \qquad (3.19)$$

Действительно, используя интегральное представление дельта-функции (П19)

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))=\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}e^{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\mathbf{k}}\,, \qquad (3.20)$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))=-\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}i\mathbf{k}\dot{\mathbf{r}}(t)e^{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\mathbf{k}}=-\mathbf{v}(t)\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}e^{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\mathbf{k}}=$$

$$=-\mathbf{v}(t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t)), \qquad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t))=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}e^{i(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t))\mathbf{q}}=-\dot{\mathbf{v}}(t)\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}i\mathbf{q}e^{i(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t))\mathbf{q}}=$$

$$=-\dot{\mathbf{v}}(t)\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}e^{i(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t))\mathbf{q}}=-\dot{\mathbf{v}}(t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t)). \qquad (3.22)$$

Усредняя по шуму, получим

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial t}=-<\mathbf{v}(t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t))>-<\dot{\mathbf{v}}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t)))>=$$

$$= -\mathbf{v}(t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} < \dot{\mathbf{v}}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t)) > . \quad (3.23)$$

Подставляем сюда выражение для $\dot{\mathbf{v}}(t)$ из уравнения (3.1)

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial t} = -\mathbf{v}(t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} < \left(-\gamma\mathbf{v} - \frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\xi}(t)\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t)) >=$$

$$= -\mathbf{v}(t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(\gamma\mathbf{v} + \frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{r})\right) f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} < \boldsymbol{\xi}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t)) > . \quad (3.24)$$

Поскольку предполагается, что случайная сила является короткокоррелированной, то вклад в последнее слагаемое дадут времена, мало отличающиеся от *t*. Поэтому решения уравнения Ланжевена представим в виде

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t-\Delta t+\Delta t) = \mathbf{r}(t-\Delta t) + \mathbf{v}(t-\Delta t)\Delta t + O(\Delta t^2),$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t-\Delta t+\Delta t) = \mathbf{v}(t-\Delta t) + \Delta\mathbf{v}, \quad (3.25)$$

$\Delta\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}(t-\Delta t)\Delta t + O(\Delta t^2)$ ={Подставляем $\dot{\mathbf{v}}(t-\Delta t)$ из уравнения Ланжевена (3.1)}=

$$= -\left(\gamma\mathbf{v}(t-\Delta t) + \frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{r})\right)\Delta t + \int_{t-\Delta t}^{t} \boldsymbol{\xi}(t')\,\mathrm{d}t' + O(\Delta t^2). \quad (3.26)$$

Вычисляем корреляционную функцию $< \xi_\beta(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t)) >$

$$< \xi_\beta(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t)) >=$$

$$=< \xi_\beta(t)\delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t)-\mathbf{v}(t-\Delta t)\Delta t\big)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t-\Delta t)-\Delta\mathbf{v}) >\approx$$

$$=< \xi_\beta(t)\delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t)\big)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t-\Delta t)) > -$$

$$- < \xi_\beta(t)\mathbf{v}(t-\Delta t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t)\big)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t-\Delta t)) > \Delta t -$$

$$- < \xi_\beta(t)\delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t)\big)\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t-\Delta t))\Delta\mathbf{v} >\simeq$$

$$=< \xi_\beta(t) >< \delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t)\big)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t-\Delta t)) > -$$

$$- < \xi_\beta(t) >< \mathbf{v}(t-\Delta t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t)\big)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t-\Delta t)) > \Delta t -$$

$$-<\xi_\beta(t)\delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t)\big)\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t-\Delta t))\Delta\mathbf{v}>=$$

$$\approx -<\xi_\beta(t)\delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t)\big)\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t-\Delta t))\Delta\mathbf{v}>=$$

$$=<\xi_\beta(t)\left(\gamma\mathbf{v}(t-\Delta t)+\frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{r})\right)\delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t)\big)\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t-\Delta t))>\Delta t-$$

$$-<\xi_\beta(t)\int_{t-\Delta t}^{t}\boldsymbol{\xi}(t')\,\mathrm{d}t'\cdot\delta\big(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t)\big)\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}(t-\Delta t))>\simeq\{\Delta t\to 0\}$$

$$\simeq -<\xi_\beta(t)\int_{t-\Delta t}^{t}\boldsymbol{\xi}(t')\,\mathrm{d}t'>\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}f(t-\Delta t)\,. \qquad (3.27)$$

Здесь мы приняли во внимание, что скорость в момент времени t-Δt и случайная сила в момент времени t некоррелированы. Вычисляем коррелятор, входящий в последнее выражение

$$<\xi_\beta(t)\int_{t-\Delta t}^{t}\xi_\alpha(t')\,\mathrm{d}t'>=\int_{t-\Delta t}^{t}<\xi_\beta(t)\xi_\alpha(t')>dt'=q\delta_{\alpha\beta}\int_{-\infty}^{0}\delta(t')\,\mathrm{d}t'=q\delta_{\alpha\beta}/2\,. \qquad (3.28)$$

Воспользовавшись этим результатом, окончательно находим искомое уравнение Фоккера-Планка

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{\partial t}+\mathbf{v}(t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)-\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\left(\gamma\mathbf{v}+\frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{r})\right)f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)-\frac{q}{2}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{v}^2}f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)=0\,. \qquad (3.29)$$

Задача 3.3. Используя уравнение Ланжевена, показать, что в пределе больших времен (t>>1/γ) уравнение эволюции для плотности частиц $n(\mathbf{r},\mathrm{t})$ приобретает вид уравнения Смолуховского (3.7).

Решение. На временах t>>1/γ решение уравнения Ланжевена (3.1) приобретает вид

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=-\frac{1}{m\gamma}\nabla U(\mathbf{r})+\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\xi}(t)\,. \qquad (3.30)$$

Тогда для плотности числа частиц $n(\mathbf{r},t)=<\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))>$ получим уравнение

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}<\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))>=-\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}<\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)>=$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left\langle \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\left(-\frac{1}{m\gamma}\nabla U(\mathbf{r}) + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\xi}(t) \right)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{m\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left\langle \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\nabla U(\mathbf{r})\right\rangle - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left\langle \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\boldsymbol{\xi}(t)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{m\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\big(n(\mathbf{r},t)\nabla U(\mathbf{r})\big) - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left\langle \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\boldsymbol{\xi}(t)\right\rangle . \qquad (3.31)$$

Снова, как и в задаче (3.2), воспользуемся разложением

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t-\Delta t + \Delta t) \approx \mathbf{r}(t-\Delta t) + \mathbf{v}(t-\Delta t)\Delta t =$$

$$= \mathbf{r}(t-\Delta t) - \frac{1}{m}\nabla U(\mathbf{r})\Delta t + \frac{1}{\gamma}\int_{t-\Delta t}^{t}\boldsymbol{\xi}(t')\,\mathrm{d}t' . \qquad (3.32)$$

$$\left\langle \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\boldsymbol{\xi}(t)\right\rangle = \left\langle \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t)-\mathbf{v}(t-\Delta t)\Delta t)\boldsymbol{\xi}(t)\right\rangle \approx \left\langle \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t))\boldsymbol{\xi}(t)\right\rangle -$$

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left\langle \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t-\Delta t))\left(-\frac{1}{m\gamma}\nabla U(\mathbf{r})\Delta t + \frac{1}{\gamma}\int_{t-\Delta t}^{t}\boldsymbol{\xi}(t')\,\mathrm{d}t' \right)\boldsymbol{\xi}(t)\right\rangle . \ (3.33)$$

Принимаем во внимание, что скорость в момент времени t-Δt и случайная сила в момент времени t некоррелированы, поэтому получаем

$$\left\langle \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))\xi_{\beta}(t)\right\rangle \approx -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n(\mathbf{r},t)\int_{t-\Delta t}^{t} < \xi_{\beta}(t)\boldsymbol{\xi}(t') > \mathrm{d}t' = -\frac{q}{2\gamma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} n(\mathbf{r},t) ,$$

$$(3.34)$$

где мы приняли во внимание соотношение (3.28). Постановка выражения (3.34) в уравнение (3.31) приводит нас к уравнению Смолуховского

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{m\gamma}\nabla\big(n(\mathbf{r},t)\nabla U(\mathbf{r})\big) + \frac{q}{2\gamma^2}\Delta n(\mathbf{r},t) , \qquad (3.35)$$

или, учитывая (3.14),

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D\Delta n(\mathbf{r},t) + \frac{1}{m\gamma}\nabla\big(n(\mathbf{r},t)\nabla U(\mathbf{r})\big) . \qquad (3.36)$$

Задача 3.4. Используя уравнение Смолуховского, найти комплексную диэлектрическую проницаемость полярной жидкости и закон релаксации.

Решение. Потенциальная энергия молекулы жидкости с дипольным моментом $\mathbf{p}$ в электрическом поле $\mathbf{E}(t)$ равна

$$U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(t) = -pE(t)\cos\theta. \qquad (3.37)$$

Принимая во внимание выражения (П3) для градиента и (П12) лапласиана в сферической системе координат, запишем уравнение Смолуховского (3.7) для функции распределения $f(\theta, \varphi, t)$ диполей по ориентациям

$$\frac{\partial f(\theta,\varphi,t)}{\partial t} = \frac{D}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\left(\frac{\partial f(\theta,\varphi,t)}{\partial\theta} + \frac{f(\theta,\varphi,t)}{k_B T}\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta}\right)\right\} + \frac{D}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f(\theta,\varphi,t)}{\partial\varphi^2}, \qquad (3.38)$$

где $D=\tau/8\pi\eta a^3$ (a – эффективный радиус молекулы)– коэффициент диффузии по углам ориентации полярной молекулы. Для слабого электрического поля ($pE<<k_BT$) равновесная функция распределения определяется выражением

$$f_0(\theta,\varphi,t) = Ce^{pE\cos\theta/\tau} \approx C, \qquad (3.39)$$

где $C=n/4\pi$ - нормировочный коэффициент, n – плотность числа молекул. Поскольку электрическое поле слабое, то функция распределения слабо отличается от равновесной функции. Поэтому решение ищем в виде $f = f_0 + \Delta f$, где Δf – малая поправка ($\Delta f \sim f_0 U/\tau$). Для периодически меняющегося поля $E = E_0 e^{-i\omega t}$ предполагаем, что $\Delta f = A\cos\theta e^{-i\omega t}$, в результате уравнение Смолуховского (3.38) приобретает вид

$$\frac{\partial\Delta f}{\partial t} = \frac{D}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\left(\frac{\partial\Delta f}{\partial\theta} + \frac{f_0 pE(t)\cos\theta}{\tau}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$-i\omega Ae^{-i\omega t}\cos\theta = \frac{D}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\left(-Ae^{-i\omega t}\sin\theta + \frac{f_0 pE_0 e^{-i\omega t}\sin\theta}{\tau}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$-i\omega A = 2D\left(\frac{npE_0}{4\pi\tau} - A\right) \Rightarrow A = \frac{npE_0}{4\pi\tau}\cdot\frac{1}{1-i\omega/2D}. \quad (3.40)$$

Следовательно

$$f = \frac{n}{4\pi}\left(1+\frac{pE_0}{\tau}\cdot\frac{\cos\theta}{1-i\omega/2D}e^{-i\omega t}\right). \quad (3.41)$$

Электрическая поляризация, с учетом (3.41), приобретает вид

$$P(t) = \iint p\cos\theta\cdot f(\theta,\varphi,t)d\Omega = 2\pi p\int_0^\pi \cos\theta\cdot\Delta f\sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{np^2E_0}{2\tau}\cdot\frac{e^{-i\omega t}}{1-i\omega/2D}\int_0^\pi \cos^2\theta\cdot\sin\theta d\theta = \frac{np^2E_0}{3\tau}\cdot\frac{e^{-i\omega t}}{1-i\omega/2D}. \quad (3.42)$$

В результате, комплексная диэлектрическая проницаемость равна

$$\varepsilon(\omega) = 1+\frac{4\pi P}{E} = 1+\frac{4\pi np^2}{3\tau}\cdot\frac{1}{1-i\omega\tau_p}, \quad (3.43)$$

где

$$\tau_p = \frac{1}{2D} = \frac{m\gamma}{2\tau} = \frac{4\pi\eta a^3}{\tau} \quad (3.44)$$

- время релаксации.

Полагая $\omega=0$, получаем статическую диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon_s = 1+\frac{4\pi np^2}{3\tau}. \quad (3.45)$$

Поэтому выражение для комплексной диэлектрической проницаемость можно переписать в виде

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega), \quad \varepsilon'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1+\omega^2\tau_p^2},$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{(\varepsilon_s-\varepsilon_\infty)\omega\tau_p}{1+\omega^2\tau_p^2}, \quad (3.46)$$

где $\varepsilon_\infty=1$ – высокочастотный предел диэлектрической проницаемости. Уравнение для комплексной диэлектрической проницаемости такого вида называется *уравнением Дебая*.

Выражение для диэлектрической проницаемости (3.43) позволяет найти релаксационную функцию

$$\psi(t)=\int_0^\infty(\varepsilon(\omega)-\varepsilon_\infty)e^{i\omega t}d\omega=\frac{4\pi np^2}{3\tau}\cdot\int_0^\infty\frac{e^{i\omega t}d\omega}{1-i\omega\tau_p}=\frac{4\pi\tau_p np^2}{3\tau}e^{-t/\tau_p},\qquad(3.47)$$

которая имеет экспоненциальный вид, поэтому закон релаксации по экспоненциальному закону называется в диэлектрической спектроскопии *законом Дебая*.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить электропроводность классического газа из заряженных частиц в переменном электрическом поле частоты ω. Время релаксации считать постоянным.

Ответ: $\sigma=\dfrac{ne^2\tau_c}{m\left(1+\omega^2\tau_c^2\right)}$.

2. Определить продольную диэлектрическую проницаемость ультрарелятивистской ($E_p=p\cdot c$) электронной плазмы при $k_BT>>mc^2$.

Ответ:

$$\varepsilon_l'=1+\frac{4\pi ne^2}{k^2\tau}\left(1+\frac{\omega}{2kc}\ln\left|\frac{\omega-ck}{\omega+ck}\right|\right),\quad \varepsilon_l''=\begin{cases}\dfrac{\pi\omega}{2kc} & \text{при}\quad \omega/k<c,\\ 0, & \text{при}\quad \omega/k>c.\end{cases}$$

3. Найти закон дисперсии плазменных волн в ультрарелятивистской плазме.

Ответ: При $\omega>>ck$

$$\omega^2=\omega_0^2\left(1+\frac{3k^2c^2}{5\omega^2}\right)\approx\omega_0^2+\frac{3k^2c^2}{5},\quad \omega_0=\frac{4\pi e^2nc^2}{3\tau}.$$

4. Показать, что уравнение кинетического баланса Паули (2.2) сохраняет нормировку вероятности

$$\sum_k w_k=1.$$

5. Пусть происходит процесс спонтанного рождения нейтронов вида $n\to n+1$, когда новая частица либо не рождается, либо рождается

только одна. Используя уравнение кинетического баланса (2.2), где $w_k(t)$ – вероятность обнаружения к моменту времени t k нейтронов, $P_{mk}=\lambda\delta_{m,k+1}$, найти $w_k(t)$, а также $<n(t)>$ и $<n^2(t)>$.

Ответ: $w_k(t)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad <n(t)>=\lambda t, \quad <\Delta n^2(t)>=\lambda^2 t^2.$

6. Решить уравнение кинетического баланса Паули для системы N частиц, каждая из которых имеет два уровня энергии E_1 и $E_2=E_1+\Delta$, считая, что система имеет температуру τ_s и в момент времени $t=0$ приведена в контакт с термостатом, имеющим температуру τ. Найти изменение температуры $\tau_s(t)$ с течением времени, считая $\tau_s(0)=\tau_0$, исследовать предельные случаи.

Указание. В случае, когда система находится в термостате с температурой τ, принцип детального равновесия имеет вид

$$P_{mk}e^{-E_m/\tau}=P_{km}e^{-E_k/\tau}.$$

Ответ:

$$w_1(t)=\frac{1-\exp(-\gamma t)}{1+\exp(-\Delta/\tau)}+\frac{\exp(-\gamma t)}{1+\exp(-\Delta/\tau_0)},$$

$$w_2(t)=\frac{\exp(-\Delta/\tau)+\exp(-\gamma t)}{1+\exp(-\Delta/\tau)}-\frac{\exp(-\gamma t)}{1+\exp(-\Delta/\tau_0)}, \quad \gamma=P_{12}+P_{21},$$

$$-\frac{\Delta}{\tau_s(t)}=\ln\left[1-\frac{1-\exp(-\gamma t)}{1+\exp(-\Delta/\tau)}-\frac{\exp(-\gamma t)}{1+\exp(-\Delta/\tau_0)}\right]-$$

$$-\ln\left[\frac{1-\exp(-\gamma t)}{1+\exp(-\Delta/\tau)}+\frac{\exp(-\gamma t)}{1+\exp(-\Delta/\tau_0)}\right]\Rightarrow$$

$$t\gg 1/\gamma:\tau_s(t)\approx\tau\left\{1+\frac{\tau_0}{\Delta}\frac{1+\exp(-\Delta/\tau)}{1+\exp(-\Delta/\tau_0)}\left(\exp\left(\left[\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_0}\right]\Delta\right)-1\right)e^{-\gamma t}\right\},$$

$$t\ll 1/\gamma:\tau_s(t)\approx\tau_0\left\{1-\frac{\tau_0}{\Delta}\frac{1+\exp(-\Delta/\tau_0)}{1+\exp(-\Delta/\tau)}\left(1-\exp\left(-\left[\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_0}\right]\Delta\right)\right)\gamma t\right\}.$$

7. Определить среднее квадратичное смещение $<(z-z_0)^2>$ для броуновской частицы, находящейся в поле силы тяжести.

Ответ: $<(z-z_0)^2>=2Dt+\left(\frac{mg}{6\pi\eta R}\right)^2 t^2$.

8. Найти среднее квадратичное смещение для броуновской частицы с зарядом e, находящейся в постоянном магнитном поле **H** в пределе больших времен (t>>1/γ, 1/ω, где $\omega = eH/mc$).

Указание. См. [19]

Ответ: $<(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2>=\left(1+\frac{2D}{1+(\omega/\gamma)^2}\right)2Dt$.

9. Решить уравнение Смолуховского для броуновской частицы, движущейся в поле $U(x)=\alpha x^2$ и имеющей начальное положение x_0. Рассмотреть предельные случаи: $t>>m\gamma/2\alpha$, $t<<m\gamma/2\alpha$.

Указание. Осуществить замену $\xi = x\exp(2\alpha t/m\gamma)$.

Ответ:

$$n(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi\tau}{\alpha}\left(1-\exp\left(-\frac{4\alpha}{m\gamma}t\right)\right)}}\exp\left(-\frac{\alpha}{\tau}\frac{\left(x-x_0\exp\left[-\frac{2\alpha}{m\gamma}t\right]\right)^2}{1-\exp\left(-\frac{4\alpha}{m\gamma}t\right)}\right),$$

$$n(x,t\gg m\gamma/2\alpha)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\alpha x^2}{\tau}\right),$$

$$n(x,t\ll m\gamma/2\alpha)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau t/m\gamma}}\exp\left(-\frac{m\gamma(x-x_0)^2}{4\tau t}\right).$$

10. Предполагая, что частицы нестабильны в силу своих внутренних причин и распадаются по простейшему закону $(\partial n/\partial t)_{\text{распада}}=-n/\tau_0$, где τ_0 - характерное время их жизни, определить, исходя из уравнения Смолуховского, среднее квадратичное смещение $<x^2(t)>$, если $x(0)=0$.

Ответ: $<x^2>=2Dte^{-t/\tau_0}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые математические формулы

1. *Дифференциальные операции в различных системах координат*

Градиент

Декартовы координаты: $$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \qquad (\text{П}1)$$

Цилиндрические координаты: $$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z \qquad (\text{П}2)$$

Сферические координаты: $$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi \qquad (\text{П}3)$$

Дивергенция

Декартовы координаты: $$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad (\text{П}4)$$

Цилиндрические координаты: $$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad (\text{П}5)$$

Сферические координаты: $$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \qquad (\text{П}6)$$

Ротор

Декартовы координаты:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \qquad (\text{П}7)$$

Цилиндрические координаты:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho a_\varphi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_z \qquad (\text{П}8)$$

Сферические координаты:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial \sin\theta a_\varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial r a_\varphi}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r a_\theta}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_\varphi \qquad (\text{П}9)$$

Оператор Лапласа

Декартовы координаты: $$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (П10)$$

Цилиндрические координаты: $$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (П11)$$

Сферические координаты:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}. \qquad (П12)$$

2. *Интеграл вида* $\int\limits_0^\infty x^m e^{-\alpha x^n}dx$

$$\int\limits_0^\infty x^m e^{-\alpha x^n}dx = \frac{1}{n}\alpha^{-\frac{m+1}{n}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right), \quad m,n>0, \qquad (П13)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1)=1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \qquad (П14)$$

Частные случаи:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}, \quad \int\limits_0^\infty x e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha}, \quad \int\limits_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}},$$
$$\int\limits_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha^2}, \quad \int\limits_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2}dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\alpha^{5/2}}. \qquad (П15)$$

3. *Дельта-функция Дирака*

Дельта-функция определяется равенством

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \neq x_0, \\ \infty & \text{при} \quad x = x_0. \end{cases} \qquad (П16)$$

$$\int\limits_a^b \delta(x-x_0)dx = 1, \quad \text{если} \quad a < x_0 < b. \qquad (П17)$$

Если $f(x)$ – непрерывная функция, то

$$\int\limits_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0) \quad \text{при} \quad a < x_0 < b. \qquad (П18)$$

Интегральное представление дельта-функции

$$\delta(\mathbf{r}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}} \ , \tag{П19}$$

где d – размерность пространства.

4. *Теорема Сохоцкого-Племеля*

Пусть $f(x)$ – комплекснозначное значение функции, которая определена и непрерывна на вещественной оси, и пусть a и b – действительные константы, такие, что a<0<b. Тогда справедлива следующая формула, которая и составляет содержание теоремы Сохоцкого-Племеля на вещественной оси

$$\lim_{\delta\to+0}\int_a^b \frac{f(x)}{x \pm i\delta} dx = \text{v.p.}\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \mp i\pi f(0), \tag{П20}$$

$\text{v.p.}\int\ldots$ означает главное значение Коши интеграла. Простое доказательство состоит в следующем:

$$\lim_{\delta\to+0}\int_a^b \frac{f(x)}{x \pm i\delta} dx = \lim_{\delta\to+0}\int_a^b \frac{(x \mp i\delta) f(x)}{x^2+\delta^2} dx = \lim_{\delta\to+0}\int_a^b \frac{x^2}{x^2+\delta^2}\frac{f(x)}{x} dx \mp$$

$$\mp i\pi \lim_{\delta\to+0}\int_a^b \frac{\delta}{\pi\left(x^2+\delta^2\right)} f(x) dx \,. \tag{П21}$$

Функция $\delta/\pi\left(x^2+\delta^2\right)$ – это “зарождающаяся” дельта-функция, поэтому она приближается к дельта-функции Дирака в пределе $\delta \to +0$

$$\lim_{\delta\to+0}\frac{\delta}{\pi\left(x^2+\delta^2\right)} = \delta(x)$$

Следовательно, второй интеграл в (П21), согласно (П18), равен $\mp i\pi f(0)$. Функция $x^2/\left(x^2+\delta^2\right)$ стремится к 1 при $|x| \gg \delta$, и к 0 при $|x| \ll \delta$, являясь симметричной функцией относительно 0. Поэтому в пределе $\delta \to +0$ первый интеграл дает интеграл в смысле главного значения по Коши.

Некоторые сведения из равновесной статистической механики

Равновесные одночастичные функции распределения

Квантовый режим (электронный газ):

$$f_0(\varepsilon) = \frac{2m^3}{h^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\tau}} + 1}, \tag{П22}$$

где μ - химический потенциал, $\tau = k_B T$. В области низких температур

$$\mu \approx \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{\tau}{\varepsilon_F} \right)^2 \right), \tag{П23}$$

где

$$\varepsilon_F = \mu(\tau = 0) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 n \right)^{2/3} \tag{П24}$$

- энергия Ферми, $n=N/V$ – концентрация электронов.

Вблизи энергии Ферми при низких температурах

$$\frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \approx -\frac{2m^3}{h^3} \cdot \delta(\varepsilon - \varepsilon_F), \tag{П25}$$

где $\delta(x)$ - дельта-функция (П16).

Классический режим:

$$f_0(p) = n \left(\frac{m}{2\pi\tau} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{p^2}{2m\tau} \right). \tag{П26}$$

Средние значения степеней скорости, которые вычисляются с помощью формулы (П13)

$$< v^n > = \int v^n f_0(p) d\mathbf{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\tau}{m} \right)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n+3}{2} \right), \tag{П27}$$

$$\begin{gathered} < v_\alpha^{2k} > = \int v_\alpha^{2k} f_0(p) d\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\tau}{m} \right)^{k/2} \Gamma\left(k + \frac{1}{2} \right), \\ < v_\alpha^{2k-1} > = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{П28}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аминов Л.К.* Термодинамика и статистическая физика. Конспекты лекций и задачи / Л.К. Аминов. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 180 с.
2. *Колоколов И.В.* Физическая кинетика: Учебное пособие / И.В. Колоколов, Е.Г. Образовский, Е.В. Подивилов. – М.: Новосибирск, 2008. – 192 с.
3. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: для вузов. В 10 т. Т. X. Физическая кинетика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 536 с.
4. *Казанский В.Б.* Статистическая физика и термодинамика. Задачи, основные понятия и положения: Методическое пособие. – Харьков: ХНУ, 2004. – 112 с.
5. *Иванов Ю.Б.* Практикум по статистической физике: Учеб. пособ. Ч. 2./ Ю.Б. Иванов, Е.П. Фетисов, Ю.Д. Фивейский. – М.: МИФИ, 2008. – 104 с.
6. *Кондратьев А.*С. Задачи по статистической физике: Учеб. пособие для вузов / А.С. Кондратьев, В.П. Романов. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1992. – 152 с.
7. *Кузнецов С.И.* Элементы физической кинетики. Курс физики с примерами решения задач: учебное пособие / С.И. Кузнецов; В.В. Каплин; С.Р. Углов; Национальный исследовательский Томский политехнический университет.– Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 77 с.
8. *Серова Ф.Г.* Сборник задач по теоретической физике: Квантовая механика, статистическая физика. Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ. спец. / Ф.Г. Серова, А.А. Янкина. — М.: Просвещение, 1979. —192 с.
9. Сборник задач по статистической физике. Учебное пособие/ В.П. Морозов, А.С. Гаревский, Н.Г. Голубева и др. – Горький: Изд. ГГУ, 1980. – 67 с.

10. *Кубо Р.* Статистическая механика. Современный курс с задачами и решениями, составленный при участии Х. Ичимура, Ц. Усуи, Н. Хасизуме / Р. Кубо. – М.: Мир, 1967. – 452 с.
11. Задачи по термодинамике и статистической физике / Под ред. П. Ландсберга – М.: Мир, 1974. – 640 с.
12. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Неравновесные процессы / И.А. Квасников. – М.: Изд. МГУ, 1987. – 560 с.
13. Сборник задач по теоретической физике. Учебное пособие для вузов / Л.Г. Гречко и др. – М.: Высшая школа, 1984. – 320 с.
14. *Румер Ю.Б.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – М.: Наука, 1977. – 552 с.
15. *Малышевский В.С.* Статистическая физика и термодинамика. Конспекты лекций / В.С. Малышевский. – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2010. – 60 с.
16. *Казанский В.Б.* Статистическая физика и термодинамика. Избранные главы / В.Б. Казанский, В.В. Хардиков. – Харьков: ХНУ, 2012. – 292 с.
17. *Коткин Г.Л.* Лекции по статистической физике / Г.Л. Коткин. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 176 с.
18. *Ляпилин И.И.* Введение в теорию кинетических уравнений: Учебное пособие / И.И. Ляпилин. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2004. – 332 с.
19. *Jim´enez-Aquino J.I.* Brownian motion of a charged particle in a magnetic field / J. I. Jim´enez-Aquino, M. Romero-Bastida // Revista Mexicana de Fi´sica E. – 2006. – V. 52. – P. 182–187.
20. *Валл А.Н.* Физическая кинетика. Учебное пособие / А.Н. Валл, А.Э. Растегин, И.А. Перевалов. – Иркутск: ИГУ, 2014. – 103 с.