Математические заметки

Том 100 выпуск 4 октябрь 2016

УДК 517.983+517.986

Об идемпотентных τ-измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана

А. М. Бикчентаев

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$, число $0<p<\infty$ и $L_p(\mathscr{M},\tau)$ – пространство интегрируемых (относительно τ) со степенью p операторов. Пусть P, Q – τ-измеримые идемпотенты и $A\equiv P-Q$. Тогда 1) если $A\geqslant 0$, то A – проектор и $QA=AQ=0$; 2) если P квазинормален, то P – проектор; 3) если $Q\in\mathscr{M}$ и $A\in L_p(\mathscr{M},\tau)$, то $A^2\in L_p(\mathscr{M},\tau)$.

Пусть натуральное число $n>2$ и $A=A^n\in\mathscr{M}$. Тогда 1) если $A\neq 0$, то перестановка $\mu_t(A)$ принимает значения в множестве $\{0\}\cup[\|A^{n-2}\|^{-1},\|A\|]$ для всех $t>0$; 2), либо $\mu_t(A)\geqslant 1$ для всех $t>0$, либо существует такое $t_0>0$, что $\mu_t(A)=0$ для всех $t>t_0$. Для каждого τ-измеримого идемпотента Q существует единственный ранговый проектор $P\in\mathscr{M}$ с $QP=P$, $PQ=Q$ и $P\mathscr{M}=Q\mathscr{M}$. Существует единственное разложение $Q=P+Z$, где $Z^2=0$ и $ZP=0$, $PZ=Z$. При этом если $Q\in L_p(\mathscr{M},\tau)$, то P интегрируем и для $p=1$ имеем $\tau(Q)=\tau(P)$. Если $A\in L_1(\mathscr{M},\tau)$ с $A=A^3$ и $A-A^2\in\mathscr{M}$, то $\tau(A)\in\mathbb{R}$.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, τ-измеримый оператор, перестановка, τ-компактный оператор, интегрируемый оператор, квазинормальный оператор, идемпотент, проектор, ранговый проектор.

DOI: 10.4213/mzm11033

Введение. Пусть $\mathscr{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$, число $0<p<\infty$ и $L_p(\mathscr{M},\tau)$ – пространство интегрируемых (относительно τ) со степенью p операторов. В работе получены следующие результаты об алгебраических и порядковых свойствах следа τ и элементов $*$-алгебры $\widetilde{\mathscr{M}}$ всех τ-измеримых операторов.

Пусть $P,Q\in\widetilde{\mathscr{M}}$ – идемпотенты. Если $A\equiv P-Q\geqslant 0$, то A – проектор и $QA=AQ=0$ (теорема 2.5); если P квазинормален, то P – проектор (теорема 2.10). Если $Q\in\mathscr{M}$ – идемпотент и $A\equiv P-Q\in L_p(\mathscr{M},\tau)$, то $A^2\in L_p(\mathscr{M},\tau)$ (теорема 2.30). Если $A\in L_1(\mathscr{M},\tau)$ с $A=A^3$ и $A-A^2\in\mathscr{M}$, то $\tau(A)\in\mathbb{R}$ (следствие 2.31).

Пусть натуральное число $n>2$. Если $A\in\mathscr{M}$ и $0\neq A=A^n$, то перестановка $\mu_t(A)$ принимает значения в множестве $\{0\}\cup[\|A^{n-2}\|^{-1},\|A\|]$ для всех $t>0$ (теорема 2.13).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 15-41-02433) и правительством Республики Татарстан.