ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 61, № 4 ФИЗИКА 2018

УДК 530.12:531.51:519.711.3

Ю.Г. ИГНАТЬЕВ, А.Р. САМИГУЛЛИНА

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СТАНДАРТНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПО БЫСТРЫМ ОСЦИЛЛЯЦИЯМ: ВЛИЯНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО ЧЛЕНА НА СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА БАРОТРОПЫ

С помощью прикладного авторского пакета программ проведено усреднение эффекного суммарного коэффициента баротропы $\kappa = (-\lambda + p)/(\lambda + \varepsilon)$ классического скалярного поля и космологического члена и показано, что в процессе космологической эволюции при достаточно больших значениях космологической постоянной Вселенная со стадии инфляции переходит на нерелятивистскую стадию, а затем, после плато, – снова на стадию поздней инфляции.

Ключевые слова: *стандартная космологическая модель, усреднение инвариантных характеристик, среднее значение космологического ускорения, стадии космологического расширения, численная гравитация.*

Введение

В предыдущих работах [1, 2] с помощью усреднения по макроскопическому временному интервалу быстро осциллирующих численных решений уравнений космологической эволюции для стандартной космологической модели с нулевым космологическим членом было показано, что с течением космологического времени вклад в плотность энергии микроскопических квадратичных осцилляций скалярного поля начинает доминировать над вкладом в плотность энергии усредненного макроскопического скалярного поля, причем отношение этих вкладов достигает на поздних временах значений порядка 10^4. Одновременно с этим эффективное макроскопическое уравнение состояния стремится к нерелятивистскому, т.е. средний коэффициент баротропы $\kappa = p/\varepsilon$ стремится к нулю. Это явление было интерпретировано в [1, 2] как процесс рождения нерелятивистских скалярных бозонов. В случае отличия от нуля космологической постоянной λ инвариантное космологическое ускорение Ω определяется не только коэффициентом баротропы

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1+3\kappa), \qquad (1)$$

но зависит также и от величины космологической постоянной. С учетом космологической постоянной суммарный коэффициент баротропы должен быть переопределен для классического скалярного поля $\Phi(\tau)$ следующим образом*:

$$\kappa = \frac{-\lambda + p}{\lambda+\varepsilon} = \frac{-\lambda + \Phi'^2 - \Phi^2}{\lambda + \Phi'^2 + \Phi^2}, \qquad (2)$$

где $f' \equiv df/d\tau$. В связи с этим возникает необходимость исследования влияния космологической постоянной на эволюцию среднего значения суммарного коэффициента баротропы стандартной космологической модели. Численное моделирование в данной работе проведено на основе модернизированного авторского пакета программ DifEqTools [3], свободный доступ к которому открыт на сайте [4]**.

1. Основные соотношения математической модели

Полная система уравнений рассматриваемой здесь стандартной космологической модели для пространственно-плоской модели Фридмана в выбранной системе единиц имеет следующий вид:

$$3\frac{a'^2}{a^2} = \lambda_m + \Phi'^2 + \Phi^2 \Rightarrow H_m{}^2 \equiv \Lambda'^2 = \frac{1}{3}(\lambda_m + \Phi'^2 + \Phi^2) \qquad (3)$$

* Используется планковская система единиц: $G = c = \hbar = 1$, а в качестве временной переменной – безразмерная переменная $\tau = mt$, где m – масса скалярного поля (подробности см. в [1]).

** The work is performed according to the Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University.

– единственное нетривиальное уравнение Эйнштейна, где

$$\Lambda = \ln(a); \quad \frac{a'}{a} \equiv \Lambda' = H_m(t) \tag{4}$$

$(H(t)$ – постоянная Хаббла), и уравнение классического массивного скалярного поля $(\dot{f} \equiv df/dt)$:

$$\Phi'' + 3H_m\Phi' + \Phi = 0. \tag{5}$$

При этом тензор энергии-импульса (1) имеет структуру тензора энергии-импульса изотропной жидкости с *приведенными* плотностью энергии и давлением:

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi}\left(\Phi'^2 + \Phi^2\right); \; p = \frac{1}{8\pi}\left(\Phi'^2 - \Phi^2\right), \tag{6}$$

так что

$$\varepsilon + p = \frac{\Phi'^2}{4\pi}.$$

Выражая постоянную Хаббла $H_m(t)$ из уравнения Эйнштейна (3) через функции Φ, Φ' и проводя стандартную замену переменных $\Phi' = Z(\tau)$, приведем систему уравнений поля (3), (6) к виду нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в трехмерном фазовом пространстве $\{\Lambda, \Phi, Z\}$:

$$\Lambda' \equiv h = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\lambda_m + Z^2 + \Phi^2\right)}; \tag{7}$$

$$\Phi' = Z \;; \tag{8}$$

$$Z' = -\sqrt{3}\sqrt{\lambda_m + Z^2 + \Phi^2}\,Z - \Phi. \tag{9}$$

При этом

$$H = m\frac{a'}{a} \equiv mh, \;\; \Omega = \frac{aa''}{a'^2} \equiv 1 + \frac{h'}{h^2}. \tag{10}$$

Система автономных обыкновенных дифференциальных уравнений (7) – (9) имеет автономную подсистему на плоскости (Φ, Z), которую мы и будем исследовать.

2. Вычисление средних по времени от функций динамических переменных

Средние от функций динамических переменных будем вычислять по стандартному правилу

$$\overline{\psi}(\tau) = \frac{1}{\Delta\tau}\int\limits_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \psi(\tau')d\tau', \tag{11}$$

где $1 \ll \Delta\tau \ll \tau$ – интервал усреднения. В этой работе нас будет интересовать среднее от величины коэффициента баротропы (2):

$$\overline{\kappa} = \overline{\left(\frac{-\lambda + \Phi'^2 - \Phi^2}{\lambda + \Phi'^2 + \Phi^2}\right)}. \tag{12}$$

Указанный выше авторский пакет программ DifEqTools позволяет вычислять средние от функций динамических переменных автоматически непосредственно с численным решением системы нелинейных дифференциальных уравнений с помощью команды

$\overline{\varphi}$(s) = DifEqTools[NumericDsolveMiddle](EQS, ICS, Methods, [τ , $\varphi(\tau)$], $\Delta\tau$, s, N, M),

где EQS – список дифференциальных уравнений; ICS – список начальных условий; Methods – список методов и параметров процедуры численного интегрирования; [τ , $\varphi(\tau)$] – список, состоящий из независимой переменной и усредняемой функции; $\Delta\tau$ – длительность интервала усреднения; N – число разбиения интервала; M – метод интегрирования. Приведем пример применения команды, соответствующий проведенным вычислениям:

```
Kappa_Mid:=(t,Lambda,Phi0) ->
DifEqTools[NumericDsolveMiddle](EqF(Lambda),ICF(Phi0),[method=dverk78,maxfun=500000,
abserr = 1.*10^(-6), relerr = 1.*10^(-6)],[tau,kappa(tau,Lambda)],4*Pi,t,100,S);
```

На рис. 1 и 2 показаны некоторые результаты численного моделирования.

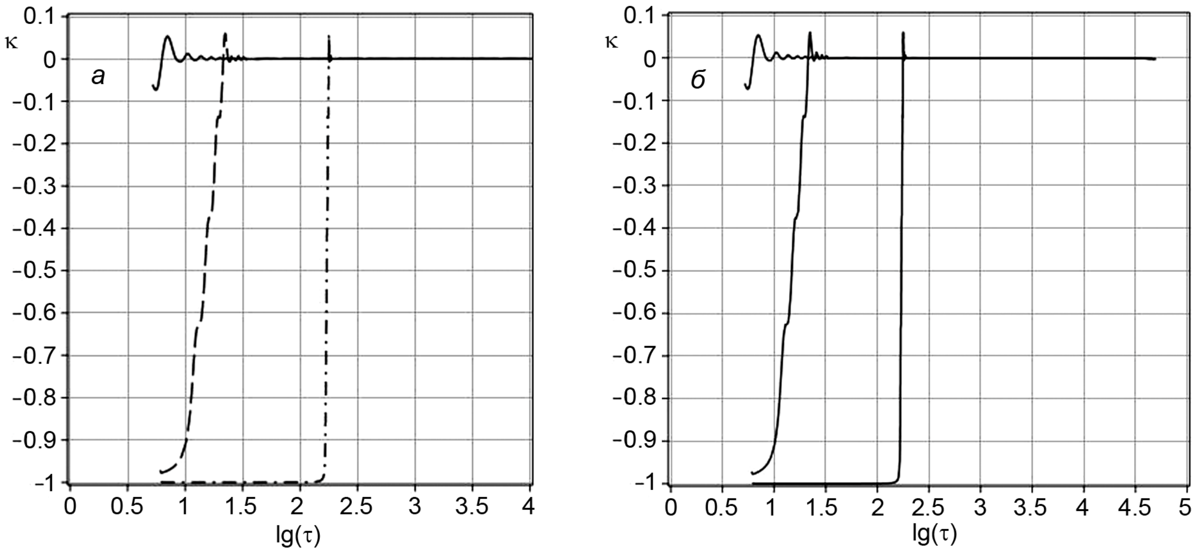

Рис. 1. Влияние начального значения скалярного потенциала на эволюцию среднего эффективного коэффициента баротропы: *а* – при $\lambda_m = 0$, сплошная кривая – $\Phi_0 = 1$; пунктирная кривая – $\Phi_0 = 10$; точечно-пунктирная кривая – $\Phi_0 = 100$; *б* – при малых значениях $\lambda_m = 10^{-12}$, слева направо: $\Phi_0 = 1$; $\Phi_0 = 10$; $\Phi_0 = 100$

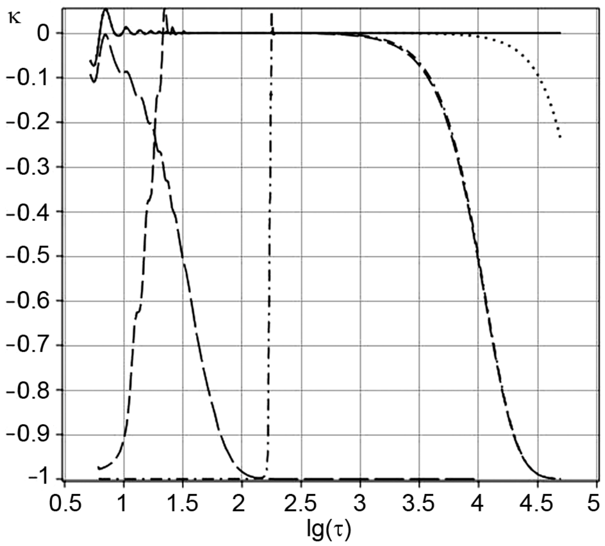

Рис. 2. Влияние величины космологической постоянной на эволюцию среднего эффективного коэффициента баротропы: сплошная кривая – $\lambda = 0$, $\Phi_0 = 1$; точечная – $\lambda = 10^{-10}$, $\Phi_0 = 1$; длинно-пунктирная – $\lambda = 0.001$, $\Phi_0 = 1$; точечно-пунктирная – $\lambda = 10^{-8}$, $\Phi_0 = 10$; пунктирная – $\lambda = 10^{-8}$, $\Phi_0 = 100$. На поздних стадиях две последние кривые сливаются

Таким образом, мы видим, что при очень малых значениях космологической постоянной среднее значение ведет себя аналогично модели с нулевым значением космологической постоянной: на ранней стадии расширения $\kappa \to -1$, затем средний коэффициент баротропы переходит на колебательный режим вблизи нулевого значения. Этот переход происходит тем позже, чем больше начальное значение скалярного потенциала. Соответственно этому инвариантное космологическое ускорение падает от значения +1 до –1/2, т.е. космологическая материя эволюционирует от инфляционного состояния к нерелятивистскому.

При увеличении значения космологической постоянной поведение космологической модели *в макроскопическом масштабе времени* существенно изменяется: средний коэффициент баротропы изменяется от –1 к нулевому значению, а затем, после плато, снова падает к значению –1. Таким образом, в макроскопическом времени Вселенная переходит от ранней инфляции к нерелятивистской стадии, а затем – снова к поздней инфляции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. // Изв. вузов. Физика. – 2017. – Т. 60. – № 7. – С. 78–84.
2. Ignat'ev Yu.G., Ignatyev D.Yu., and Samigullina A.R. // Grav. Cosmol. – 2018. – V. 24. – No. 2; arXiv:1705.05000 [gr-qc].
3. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. // Свидетельство № 2017616336 Российская Федерация. Свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ.
4. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. http://www.stfi.ru/ru/software.html.

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Казанского федерального университета, г. Казань, Россия

Поступила в редакцию 30.01.18.

Игнатьев Юрий Геннадиевич, д.ф.-м.н., профессор, зав. каф. высшей математики и математического моделирования, e-mail: ignatev_yu@rambler.ru;
Самигуллина Алсу Ринатовна, зав. лаб. информационных технологий, e-mail: alsu_sam@mail.ru.