УДК 519.68

О ПРИМЕНЕНИИ ШТРАФНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ АППРОКСИМАЦИИ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

А.А. Андрианова

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail Anastasiya.Andrianova@ksu.ru

Введение

При решении задач оптимизации практическую ценность имеют реализуемые алгоритмы, которые позволяют найти удовлетворяющее заданной заранее точности решение задачи за конечное время. Существенным свойством таких алгоритмов должен являться легко проверяемый критерий остановки вычислений, гарантирующий получение требуемой точности решения.

Один из подходов для разработки таких алгоритмов основывается на использовании аппроксимации допустимого множества решений задачи условной оптимизации. Он был применен независимо в семействе алгоритмов, основанном на методах внутренней и внешней точки - в методе штрафных функций ([1]), в методе центров ([2], [3]) и в методе параметризации целевой функции ([4]), в которых очередная итерационная точка выбирается как точка абсолютного минимума специальным образом построенной вспомогательной функции. Для всех алгоритмов этого семейства критерием остановки вычислений являлось получение итерационной точки, принадлежащей разности допустимого множества задачи и его аппроксимации. Основные различия построенных алгоритмов заключались в способах построения множества-аппроксимации, которые гарантировали бы выполнение заданной точности решения. Эти способы существенно зависели от вида вспомогательной функции, которая использовалась тем или иным алгоритмом.

В данном сообщении на основе обобщенного описания понятия подходящей аппроксимации допустимого множества предлагается один из практических способов задания таких множеств, который применим в любом из алгоритмов методов внутренней и внешней точки. Данный способ основан на использовании функции штрафа для допустимого множества. Этот прием является обобщением способа, примененного в [1], для построения алгоритмов с аппроксимацией допустимого множества в методе штрафных функций. Одно из преимуществ данного способа построения аппроксимации заключается в возможности улучшить экстремальные свойства вспомогательной функции применяемого метода внутренней или внешней точки.

1. Постановка задачи

Пусть решается следующая задача оптимизации:

$$\min\{f(x), x \in D\}, \tag{1}$$

где $D = \{x : x \in R_n, f_i(x) \leqslant 0, i = 1 \dots m\}$, целевая функция $f(x)$ и функции-ограничения $f_i(x)$ $i = 1 \dots m$ определены и непрерывны в $n-$мерном евклидовом пространстве R_n и принадлежат классу функций, каждый локальный минимум которых является абсолютным, множество D регулярно по Слейтеру, т.е. существует точка $y \in D$, для которой $f_i(y) < 0$ для всех $i = 1 \dots m$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$ - требуемая точность решения задачи (1). Введем следующие обозначения:

$$f^* = \min\{f(x), x \in D\}$$

$$X^*_\varepsilon = \{x : x \in D, f(x) \leqslant f^* + \varepsilon\}.$$

$$\overline{X^*_\varepsilon} = \{x : x \in R_n, |f(x) - f^*| \leqslant \varepsilon\}.$$

Множество X^*_ε является множеством ε-решений задачи (1), множество $\overline{X^*_\varepsilon}$ принято называть множеством ε-псевдорешений задачи (1). Будем считать далее, что $f^* > -\infty$, минимум достигается и множество X^*_ε является ограниченным. Полагаем также, что абсолютный минимум целевой функции достигается за пределами множества D, откуда, в частности, следует, что точка оптимума лежит на границе множества D. Случай принадлежности оптимума внутренности множества D существенного интереса не представляет, поскольку для него есть упрощенные процедуры решения задачи.

Требуется получить любую точку $z \in X^*_\varepsilon$ или $z \in \overline{X^*_\varepsilon}$.

2. Общая схема алгоритмов с аппроксимацией допустимого множества

Приведем две общие схемы алгоритмов с аппроксимацией допустимого множества, основанные на применении методов внутренней и внешней точки соответственно. В них при формировании вспомогательной функции применяемого метода вместо допустимого множества исходной задачи используется его подходящая с точки зрения получения заданной точности решения аппроксимация. Все алгоритмы, разработанные в [1]-[4], соответствуют этим схемам.

Схема алгоритма в методе внешней точки. Пусть выбрано множество-аппроксимация D_1 такое, что $D_1 \subset D$, а также выбран метод внешней точки A со вспомогательной функцией $F(x, f, g(D_1), \eta)$, где $g(D_1)$ – способ учета во вспомогательной функции допустимого множества, η – набор управляющих параметров метода внешней точки. Задается способ выбора управляющих параметров B. Полагаем $k = 0$.

Если получена точка x_k $(k \geqslant 0)$, выбирается точка x_{k+1} по следующей схеме.

1. По способу B определяется очередной набор управляющих параметров η_k.
2. Строится функция $F(x, f, g(D_1), \eta_k)$, соответствующая методу A.
3. Выбирается $x_{k+1} \in \mathrm{Argmin}\{F(x, f, g(D_1), \eta_k), x \in R_n\}$.
4. Если $x_{k+1} \in D$, то $x_{k+1} \in X^*_\varepsilon$. Задача (1) решена.
5. Полагается $k = k + 1$. Переход к пункту 1.

Схема алгоритма в методе внутренней точки. Пусть выбрано множество-аппроксимация D_2 такое, что $D \subset D_2$, а также выбран метод внутренней точки A со вспомогательной функцией $F(x, f, g(D_2), \eta)$, где $g(D_2)$ – способ учета во вспомогательной функции допустимого множества, η – набор управляющих параметров метода внутренней точки. Задается способ выбора управляющих параметров B. Полагаем $k = 0$.

Если получена точка x_k $(k \geqslant 0)$, выбор точки x_{k+1} производится следующим образом.

1. По способу B определяется очередной набор управляющих параметров η_k.
2. Строится функция $F(x, f, g(D_2), \eta_k)$, соответствующая методу A.
3. Выбирается $x_{k+1} \in \mathrm{Argmin}\{F(x, f, g(D_2), \eta_k), x \in R_n\}$.
4. Если $x_{k+1} \notin D$, то $x_{k+1} \in \overline{X_\varepsilon^*}$. Задача (1) решена.
5. Полагается $k = k + 1$. Переход к пункту 1.

Очевидно, что при применении обеих схем для решения задачи (1) условия пунктов 4 будут выполнены при конечном номере $K > 0$. Это следует из свойств методов внутренней и внешней точки и того факта, что решение задачи (1) лежит на границе допустимого множества D. Таким образом, требуется только решить вопрос выбора множества-аппроксимации, гарантирующего выполнение заданной точности $\varepsilon > 0$.

3. Понятие подходящей аппроксимации допустимого множества

Согласно общим схемам алгоритмов множества-аппроксимации (D_1 и D_2), которые применяются для метода внешних и внутренних точек соответственно, отличаются друг от друга: для метода внешних точек требуется, чтобы $D_1 \subset D$, для метода внутренних точек - $D \subset D_2$. Поэтому определение подходящей аппроксимации требуется дать для каждого метода в отдельности.

Определение 1. *Множество $D_1 \subset D$ назовем подходящей аппроксимацией множества допустимых решений для метода внешней точки, если $D_1 \cap X_\varepsilon^* \neq \emptyset$.*

Согласно свойствам метода внешней точки для последовательности $\{x_k\}$, построенной по схеме метода внешней точки с аппроксимацией допустимого множества, справедливо $f(x_k) \leqslant \min\{f(x), x \in D_1\}$ для всех $k \geqslant 0$. Отсюда следует, что в случае применения подходящей аппроксимации множества допустимых решений, условие $x_{k+1} \in D$ означает, что $f(x_{k+1}) \leqslant \min\{f(x), x \in D_1\} \leqslant f^* + \varepsilon$, т.е. $x_{k+1} \in X_\varepsilon^*$ и является ε-решением задачи (1).

Определение 2. *Множество D_2 такое, что $D \subset D_2$, назовем подходящей аппроксимацией множества допустимых решений для метода внутренней точки, если $Q(D_2) \subset \overline{X_\varepsilon}$, где $Q(D_2) = \{x : x \in D_2, f(x) \leqslant f(x^*(D_2)) + \varepsilon\}$, $x^*(D_2) =$* $\mathrm{argmin}\{f(x), x \in D_2\}$.

Пусть D_2 – подходящая аппроксимация множества D для метода внутренней точки. Тогда $x^* \in Q(D_2)$, где $x^* = \mathrm{argmin}\{f(x), x \in D\}$. Согласно свойствам метода внутренней точки для $x_{k+1} \notin D$ (пункт 4 схемы), будет справедливо неравенство $f(x_{k+1}) \leqslant f^*$ и включение $x_{k+1} \in D_2$. Так как $x^* \in Q(D_2)$, последнее неравенство можно продолжить $f(x_{k+1}) \leqslant f^* \leqslant f(x^*(D_2)) + \varepsilon$. Следовательно, $x_{k+1} \in Q(D_2)$. Отсюда, а также в силу того, что D_2 – подходящая аппроксимация множества D для метода внутренней точки, следует включение $x_{k+1} \in \overline{X_\varepsilon^*}$, т.е. точка x_{k+1} является ε-псевдорешением задачи (1).

4. Построение аппроксимации допустимого множества на основе функции штрафа

В [1] был предложен способ, согласно которому в качестве аппроксимации допустимого множества использовалось лебегово множество функции штрафа $A(\alpha) = \{x : x \in R_n, V(x) \leqslant \alpha, \alpha > 0\}$, где $V(x)$ – функция штрафа.

Сформулируем условия, при которых такой вид аппроксимации можно использовать в качестве подходящей в методах внешней и внутренней точки.

Будем рассматривать один из известных видов функции штрафа $V(x) = \max\{g(x) + p, 0\}$, где $p > 0$, $g(x) = \max\{f_i(x), i = 1 \dots m\}$. Очевидно, что $p = \max\{\alpha : \alpha > 0, A(\alpha) \subset D\}$. Зафиксируем $\gamma \in (0;1)$. Примем в качестве множества-аппроксимации $D_1 = A(\gamma p)$.

Теорема 1. *Для того чтобы множество $D_1 = A(\gamma p)$ ($\gamma \in (0;1)$) являлось подходящей аппроксимацией допустимого множества D для метода внешней точки, необходимо и достаточно, чтобы $0 < p \leqslant -\dfrac{1}{1-\gamma}\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество $D_1 = A(\gamma p)$ является подходящей аппроксимацией допустимого множества для метода внешней точки. Тогда $D_1 \cap X^*_\varepsilon \neq \emptyset$. Обозначим точку из этого пересечения $\overline{x}$. В силу способа задания множества D_1 для этой точки будет справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\} + p \leqslant g(\overline{x}) + p \leqslant \max\{g(\overline{x}) + p, 0\} = V(\overline{x}) \leqslant \gamma p$$

Таким образом, $p \leqslant -\dfrac{1}{1-\gamma}\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $p \leqslant -\dfrac{1}{1-\gamma}\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\}$. В силу ограниченности множества X^*_ε найдется точка $y \in X^*_\varepsilon$ такая, что $g(y) = \min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\}$. Для этой точки имеет место

$$g(y) + p \leqslant g(y) - \frac{1}{1-\gamma}\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\} = -\frac{\gamma}{1-\gamma}g(y)$$

Добавим и отнимем из правой части неравенства величину $\dfrac{\gamma p}{1-\gamma}$. Таким образом, получим:

$$(g(y) + p)(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma}) \leqslant \frac{\gamma p}{1-\gamma}$$

или $g(y) + p \leqslant \gamma p$. Следовательно, $V(y) = \max\{g(x) + p, 0\} \leqslant \gamma p\}$, т.е. $y \in D_1$. Таким образом, $y \in D_1 \cap X^*_\varepsilon$, что по определению 1 означает, что D_1 подходящая для метода внешней точки аппроксимация множества D. Теорема доказана.

Приведем аналогичное утверждение для подходящей аппроксимации в методе внутренней точки. Очевидно, что $p = \min\{\alpha : \alpha > 0, D \subset A(\alpha)\}$. Пусть $\gamma > 1$. Тогда в качестве аппроксимации допустимого множества для метода внутренней точки можно рассматривать множество $D_2 = A(\gamma p)$.

Теорема 2. *Пусть задача (1) такова, что $f^* - \varepsilon > \inf\{f(x), x \in R_n\}$, достигается $\min\{g(x), x \in X^*_{-\varepsilon}\}$, где $X^*_{-\varepsilon} = \{x : x \in R_n, f(x) \leqslant f^* - \varepsilon\} \neq \emptyset$. Для того чтобы множество $D_1 = A(\gamma p)$ ($\gamma > 1$) являлось подходящей аппроксимацией допустимого множества D для метода внутренней точки, необходимо и достаточно, чтобы $0 < p \leqslant \dfrac{1}{\gamma - 1}\min\{g(x), x \in X^*_{-\varepsilon}\}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть D_2 – подходящая для метода внутренней точки аппроксимация множества D. Так как $\min\{g(x), x \in X^*_{-\varepsilon}\}$ достижим, существует точка $y \in X^*_{-\varepsilon}$ такая, что $g(y) = \min\{g(x), x \in X^*_{-\varepsilon}\}$. Отметим, что, так как $D \cap X^*_{-\varepsilon} = \emptyset$, $\min\{g(x), x \in X^*_{-\varepsilon}\} > 0$. Предположим, что условия теоремы неверны, т.е. $p > \dfrac{1}{\gamma-1}\min\{g(x), x \in X^*_{-\varepsilon}\} = \dfrac{1}{\gamma-1}g(y)$. Таким образом, $g(y)+p < \gamma p$. Следовательно, $V(y) < \gamma p$, т.е. $y \in D_2$, причем $f(y) \leqslant f^* - \varepsilon$. Отсюда и в силу непрерывности функций $f(x)$, $f_i(x)$ $i = 1 \ldots m$ следует, что можно выделить окрестность $\omega(y) \subset D_2$. Так как D_2 – подходящая для метода внутренней точки аппроксимация, по определению 2 $Q(D_2) \subset \overline{X^*_\varepsilon}$. Так как $x^*(D_2) \in Q(D_2)$, то $x^*(D_2) \in \overline{X^*_\varepsilon}$. Следовательно, $f(x^*(D_2)) \geqslant f^* - \varepsilon$. Так как $y \in D_2$ и $f(y) \leqslant f^* - \varepsilon$, получаем $f(y) = f(x^*(D_2)) = f^* - \varepsilon$. Таким образом, точка y является точкой локального минимума функции $f(x)$ для окрестности $\omega(y)$. Данное утверждение противоречит неравенству $f^* - \varepsilon > \inf\{f(x), x \in R_n\}$ и тому, что $f(x)$ принадлежит классу функций, каждый локальный минимум которых является абсолютным. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть $p \leqslant \dfrac{1}{\gamma-1}\min\{g(x), x \in X^*_{-\varepsilon}\} = \dfrac{1}{\gamma-1}g(y)$. Отсюда следует, что $g(y)+p \geqslant \gamma p$, т.е. $V(y) \geqslant \gamma p$. Таким образом, из непрерывности функции $f(x)$, $f_i(x)$ $i = 1 \ldots m$ и $V(x)$ следует неравенство $f(x^*(D_2)) \geqslant f^* - \varepsilon$. Для любой точки $x \in Q(D_2)$ тогда также будет справедливо $f(x) \geqslant f^* - \varepsilon$.

Допустим, что условия теоремы неверны. Тогда существует точка $x_1 \in Q(D_2)$ такая, что $x_1 \notin \overline{X^*_\varepsilon}$. Для нее будет справедливо неравенство $|f(x_1) - f^*| > \varepsilon$. Отсюда, так как $f(x_1) \geqslant f^* - \varepsilon$, получим $f(x_1) > f^* + \varepsilon$. Следовательно, учитывая, что $x_1 \in Q(D_2)$, имеем $f^* + \varepsilon < f(x_1) \leqslant f(x^*(D_2)) + \varepsilon$, или $f^* < f(x^*(D_2))$, что противоречит тому, что $D \subset D_2$. Данное противоречие и доказывает теорему.

Правила фиксации параметра p, необходимые для задания подходящей аппроксимации допустимого множества на основе функции штрафа, которые получены в теоремах 1 и 2, обретают практическую ценность, когда имеются оценки величин $\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\}$ и $\min\{g(x), x \in X^*_{-\varepsilon}\}$. Эти оценки существуют для случаев, когда на функции $f(x)$, $f_i(x)$ $i = 1 \ldots m$ налагаются дополнительные условия, например, подобные оценки можно найти в [3] для явно квазивыпуклых функций.

Список литературы

1. **Заботин Я.И., Фукин И.А.** Алгоритмы в методе штрафов с аппроксимацией допустимого множества // Изв.вузов.Математика, №1, 2004. – С. 36–47.
2. **Андрианова А.А.** Алгоритмы с аппроксимацией допустимого множества в методе центров /Дисс...канд.физ.-мат. наук. – Казань, 2004. – 132 с.
3. **Андрианова А.А.** Параметризация метода центров для минимизации явно квазивыпуклых функций // "Исследования по прикладной математике и информатике". Выпуск 26. – Казань. – 2006. – С. 3–12.
4. **Андрианова А.А.** Об одном способе получения решения заданной точности методом параметризации целевой функции // Материалы VIII Всероссийской конференции "Сеточные методы для краевых задач и приложения". – Казань.– 2010. - С. 77–82.