Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.98

РАЗНОСТИ ИДЕМПОТЕНТОВ В C^*–АЛГЕБРАХ

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть P, Q — идемпотенты в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $Q = Q^*$, I — тождественный оператор в $\mathscr{H}$. Если оператор $U = P - Q$ — изометрия, то $U = U^*$ унитарен и $Q = I - P$. Для точных нижней и верхней граней пары проекторов P, Q в $\mathscr{H}$ и $P - Q$ установлено двойное неравенство. Получены приложения этого неравенства к характеризации следа и к идеальным F-псевдонормам на W^*-алгебре. Пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{A}$, трипотенты P, Q принадлежат $\mathscr{A}$. Если $P-Q$ принадлежит идеалу определения следа φ, то $\varphi(P-Q)$ является вещественным числом. Установлена перестановочность некоторых операторов.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.201

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, идемпотент, трипотент, проектор, унитарный оператор, ядерный оператор, операторное неравенство, перестановочность, W^*-алгебра, C^*-алгебра, след, идеальная F-норма.

Введение

Пусть P, Q — идемпотенты в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Различные свойства (обратимость, фредгольмовость, ядерность, положительность и др.) разности $P - Q$ были исследованы в [1–6]. Каждый трипотент ($A = A^3$) является разностью $P - Q$ некоторых идемпотентов P и Q с $PQ = QP = 0$ [7, предложение 1]. Поэтому трипотенты наследуют некоторые свойства идемпотентов [8].

В этой работе получено несколько новых результатов об операторе $P - Q$. Доказано, что из изометричности оператора $U = P - Q$, где $Q^* = Q$, следуют унитарность U и равенство $Q = I - P$ (теорема 1). Приведен пример, показывающий существенность условия $Q^* = Q$. Если $P^* = P$, то $P \wedge Q^\perp + P^\perp \wedge Q \leq |P-Q| \leq P \vee Q - P \wedge Q$ с равенством во втором из неравенств тогда и только тогда, когда $PQ = QP$ (теорема 2 и предложение 1). С помощью этого операторного неравенства установлено новое неравенство, характеризующее следы на W^*-алгебре $\mathscr{A}$ (следствие 4). Получены приложения к идеальным F-псевдонормам на $\mathscr{A}$ (следствие 7).

Пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathscr{A}$, $\mathfrak{M}_\varphi$ — идеал определения следа φ и трипотенты P, Q принадлежат $\mathscr{A}$. Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P-Q) \in \mathbb{R}$ (теорема 3). Теорема 3 является C^*-аналогом известного утверждения [6]: *если P, Q являются идемпотентами в $\mathscr{H}$ и $P - Q$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1$ ядерных операторов, то канонический след* $\mathrm{tr}(P - Q)$ *принадлежит* $\mathbb{Z}$. Пусть $\mathscr{A}$ — C^*-алгебра, $(\mathscr{E}, \prec)$ — частично упорядоченное множество. Установлен критерий монотонности для отображения из $\mathscr{A}^+$ в $\mathscr{E}$ (предложение 2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Республики Татарстан (код проекта 15–41–02433).