

УДК 531.391:62-50

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВИБРОРОБОТА В СРЕДЕ С НАСЛЕДСТВЕННЫМ ЗАКОНОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ*

© 2015 г. А. Г. Егоров, О. С. Захарова

Казань, ВГОАУ ВПО К(П)ФУ

Поступила в редакцию 28.10.13 г., после доработки 19.11.14 г.

Изучается существенно нестационарное прямолинейное движение в жидкости двухмассовой системы, состоящей из сферического корпуса и подвижной внутренней массы. В силы сопротивления, помимо квадратичных по скорости вязких сил, включены также зависящие от предыстории движения силы Бассе и инерционные силы “присоединенных масс”. Задача состоит в отыскании периодического закона движения внутренней массы, минимизирующего работу сил сопротивления за период движения системы при фиксированном периоде колебаний и заданной средней скорости движения корпуса. Исследована зависимость оптимальных режимов от безразмерного периода колебаний, характеризующего отношение сил Бассе к вязким силам.

DOI: 10.7868/S0002338815030063

Введение. Исследуемая механическая система моделирует виброробот – мобильное устройство, способное перемещаться без подвижных внешних частей в сопротивляющейся среде. Перемещение системы как целого обеспечивается за счет периодических колебаний внутреннего движителя (внутренней массы) относительно корпуса. Вибророботы обладают рядом преимуществ перед традиционными мобильными аппаратами. Они просты по конструкции, их корпус может быть сделан герметичным и не содержащим выступающих деталей, что обеспечивает возможность их использования в условиях ограниченного пространства.

Впервые вопрос об оптимальном движении системы посредством перемещения внутреннего тела был поставлен Ф.Л. Черноусько [1, 2], рассмотревшим прямолинейное движение по горизонтальной плоскости твердого тела с полостью, содержащей подвижную внутреннюю массу, при наличии кулоновского трения между полостью и телом. В последнее время данная проблематика широко обсуждается в литературе как для других идеализированных законов сопротивления, так и для неоднородных перемещений внутренних масс [3–8]. Весьма общая ситуация рассмотрена в [9], где от силы сопротивления требуется всего лишь являться монотонно возрастающей функцией скорости движения корпуса. В [10] закон сопротивления был выбран на основе известных экспериментальных данных для случая движения сферического корпуса в вязкой жидкости [11]. Наличие кризиса сопротивления делает в этом случае зависимость силы сопротивления от скорости немонотонной. До сих пор, однако, исследования ограничивались квазистационарными законами, когда сила сопротивления однозначно определялась скоростью движения корпуса.

В действительности гидродинамические силы сопротивления движению корпуса в вязкой жидкости определяются течениями, которые были сформированы телом в жидкости за все время движения. В общем случае они не могут быть описаны исключительно в терминах мгновенной скорости, но должны определяться всей предысторией движения. В гидродинамике учет предыстории осуществляется посредством нелокальной по времени силы сопротивления Бассе. В данной работе сила Бассе задается в своей простейшей, классической форме, имеющей строгое обоснование лишь для случая медленного движения корпуса. Тем не менее принятая постановка полезна при изучении движения виброробота в вязкой жидкости по двум причинам: как необходимый первый шаг при рассмотрении более реалистичных законов [12, 13] для наследственных сил сопротивления и как средство качественной оценки границ применимости квазистационарного приближения.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-31230).

Оптимизационная задача в данной работе ставится в энергетической постановке, предложенной в [8, 10]. Она состоит в определении периодического закона движения внутренней массы, минимизирующего работу сил сопротивления за период движения системы при фиксированном периоде колебаний и заданной средней скорости движения корпуса.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из двух тел. Тело сферической формы (корпус) массы M находится в вязкой жидкости, а тело массы m (далее — “внутренняя масса”) перемещается внутри него. Изучаются продольные периодические движения внутренней массы относительно корпуса, при которых вся система перемещается как целое. Обозначим через u скорость корпуса, а через x и $v = \dot{x}$ — перемещение и скорость внутренней массы относительно корпуса. Основное уравнение, описывающее скорость движения $u(t)$ корпуса при заданном законе $x(t)$ движения внутренней массы, имеет вид

$$(m + M)\dot{u} + R = -m\ddot{x}. \quad (1.1)$$

Здесь R — сила сопротивления движению корпуса со стороны жидкости, зависящая в общем случае не только от текущего значения скорости $u(t)$, но и от ее предыстории $\{u(\tau), \tau < t\}$. В уравнении (1.1) $x(t)$ играет роль кинематического управления.

Обозначая угловыми скобками

$$\langle \cdot \rangle = T^{-1} \int_0^T (\cdot) dt$$

среднее по периоду T , определим среднюю мощность

$$N[u(t)] = \langle uR[u(t)] \rangle,$$

затрачиваемую на преодоление сил сопротивления. Эта величина равна [8] мощности сил, сообщаемых корпусу внутренней массой. Предложенная в [8] постановка оптимизационной задачи состоит в отыскании такого периодического закона $x(t)$ колебаний внутренней массы, который при фиксированном периоде T колебаний и заданной средней скорости $\langle u \rangle = U$ движения корпуса минимизировал бы мощность внутреннего движителя $N[u]$.

Удобство такой постановки состоит в том, что исходная задача расщепляется на две последовательно решаемые задачи: первая из них определяет оптимальный закон $u(t)$ движения корпуса, вторая восстанавливает по оптимальному закону $u(t)$ зависимость $x(t)$ движения внутренней массы от времени. Возможность расщепления связана с тем, что единственное условие, накладываемое на функцию $x(t)$, условие периодичности, можно выразить в терминах u . Действительно, соотношение (1.1), рассматриваемое как задача нахождения периодической функции $x(t)$ при заданной периодической левой части, имеет решение тогда и только тогда, когда $\langle R \rangle = 0$. Поэтому при любом периодическом законе $u(t)$, удовлетворяющем ограничению $\langle R \rangle = 0$, периодическая функция $x(t)$ находится из соотношения (1.1) простым интегрированием. Исходная задача при этом сводится к задаче, состоящей в нахождении периодической с периодом T функции $u(t)$, доставляющей минимум функционалу $N[u]$ с учетом ограничений $\langle u \rangle = U$, $\langle R \rangle = 0$.

До сих пор поставленная выше и аналогичные ей задачи рассматривались [8, 10] в квазистационарной постановке, когда сопротивление R полностью определяется текущей скоростью тела. В случае движения в вязкой жидкости сферического виброробота

$$R(u) = \frac{1}{2} C_x(\text{Re}) \pi \rho a^2 |u| u, \quad \text{Re} = \frac{2au}{\nu}. \quad (1.2)$$

Здесь a — радиус сферы, ν и ρ — кинематическая вязкость и плотность жидкости. Коэффициент сопротивления C_x считается известной функцией мгновенного числа Рейнольдса Re . При $C_x = \text{const}$ оптимизационная задача была решена в [8], при заданной по результатам экспериментов зависимости $C_x(\text{Re})$ — в [10].

При движении тела в вязкой жидкости условие квазистационарности гидродинамических сил сопротивления применимо лишь при малых ускорениях тела и, следовательно, неизбежно нарушается с ростом частоты колебаний внутренней массы. К сожалению, до сих пор единственным строго обоснованным выражением для действующих на сферу гидродинамических сил остается формула, полученная в пределе бесконечно малых чисел Рейнольдса [14]:

$$R = 6\pi\rho\nu u + 6\pi\rho\nu a^2 \int_{-\infty}^t \frac{du/d\tau}{\sqrt{\pi\nu(t-\tau)}} d\tau + \frac{2}{3}\pi a^3 \rho \frac{du}{dt}. \quad (1.3)$$

В ней первое слагаемое описывает силы вязкого сопротивления, второе — силы Бассе, третье — инерционные силы “присоединенных масс”. Заметим, что для любого периодического закона движения $u(t)$ среднее по периоду от сил Бассе равно нулю, а оператор Бассе

$$R_H [u(t)] = \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

положительно определен:

$$\langle R_H \rangle = 0, \quad \langle u R_H \rangle > 0.$$

С учетом этого ясно, что формула (1.3) не допускает поступательного движения виброробота. Действительно, при взятии среднего от обеих частей, пользуясь условием периодичности u и удовлетворяя ограничению $\langle R \rangle = 0$, находим, что $\langle u \rangle = 0$. Таким образом, для того, чтобы движение было возможно, оно должно происходить не при бесконечно малых, а при конечных числах Рейнольдса.

Естественное и широко используемое на практике [15] обобщение (1.3) на случай конечных чисел Рейнольдса получается при замене вязких сил в (1.3) зависимостью вида (1.2) с эмпирически определяемым коэффициентом сопротивления. Такой подход подвергается обоснованной критике [13, 16]. Тем не менее, на наш взгляд, он является полезным первым шагом при изучении движения виброробота в присутствии сил гидродинамического сопротивления. Исключая дополнительно инерционные силы в (1.3) за счет увеличения в (1.1) кажущейся массы основного тела на присоединенную массу $M_0 = 2\pi\rho a^3/3$ (половину массы вытесненной корпусом жидкости), приходим к используемому в данной работе выражению для сил сопротивления

$$R = \frac{1}{2}C_x \pi\rho a^2 |u|u + 6\rho a^2 \sqrt{\pi\nu} R_H [u]. \quad (1.4)$$

Как видно, отличие (1.4) от квазистационарного приближения (1.2) состоит лишь в дополнительном учете сил Бассе.

Ограничимся рассмотрением важного частного случая $C_x = \text{const}$ квадратичного сопротивления. Он отвечает умеренным числам Рейнольдса, лежащим в диапазоне $800 < \text{Re} < 3 \cdot 10^5$. Внутри этого диапазона C_x изменяется в пределах 0.4–0.5 [11]. Нормируя скорость u на U , время t на период T , запишем задачу об оптимальном управлении движением корпуса в виде

$$N_{\min} = \min_u (N_V[u] + s N_H[u]), \quad (1.5)$$

$$\langle u \rangle = 1, \quad (1.6)$$

$$\langle u|u \rangle = 0, \quad (1.7)$$

$$N_V = \langle |u|^3 \rangle, \quad N_H = \langle u R_H \rangle.$$

Минимизация в (1.5) проводится на множестве периодических с периодом единица функций, удовлетворяющих ограничениям (1.6), (1.7). При записи (1.7) дополнительно учтено, что $\langle R_H \rangle = 0$ для любой периодической функции u . Единственный безразмерный параметр задачи (1.5)

$$s = \frac{12}{C_x U} \sqrt{\frac{\nu}{\pi T}} \quad (1.8)$$

задает степень нестационарности движения тела, характеризуя отношение сил Бассе к вязким силам.

После определения в результате решения задачи (1.5)–(1.7) оптимальных зависимостей $u(t)$, $R[u]$ решается задача нахождения оптимального управления движением внутренней массы. Нормируя относительную координату x внутренней массы на ξa , запишем эту задачу в виде

$$\ddot{x} = -p\dot{u} - p^2 R, \quad (1.9)$$

$$p = \frac{1}{qs^2}, \quad q = \frac{\pi C_x \xi_2}{108} \cdot \frac{Ua}{v}, \quad \xi = \frac{4\xi_2 \xi_1}{3C_x}.$$

Параметры ξ_1, ξ_2 характеризуют отношения масс

$$\xi_1 = \frac{m + M + M_0}{m}, \quad \xi_2 = \frac{m + M + M_0}{M_0}.$$

Заметим, что в отличие от параметра s введенный здесь безразмерный параметр q не зависит от периода колебаний T . С точностью до постоянного множителя это – число Рейнольдса, построенное по средней скорости движения корпуса.

Основными отыскиваемыми в результате решения задач (1.5)–(1.7) и (1.9) интегральными характеристиками оптимального движения будут энергетический коэффициент $\eta(s)$ и размах колебаний внутренней массы $l(s, q)$:

$$\eta = \frac{1}{N_{\min}}, \quad l = \max x - \min x.$$

Энергетический коэффициент η характеризует эффективность внутреннего движителя. Он определен [8] как отношение энергетических затрат при равномерном движении корпуса к энергетическим затратам при движении корпуса за счет внутренней массы с той же средней скоростью.

2. Оптимальное движение корпуса. При $s = 0$ задача (1.5)–(1.7) оптимального управления движением корпуса сводится к алгебраической. Ее решение [8] показывает, что движение корпуса с максимальным энергетическим коэффициентом $\eta_0 = 0.079$ реализуется в том случае, когда его скорость принимает два значения: $u_+ = 1.278$ и $u_- = -6.743$. Чередувание промежутков обратного и прямого движения при этом может быть любым, но суммарное время каждого из видов движения на интервале периодичности должно быть равно $2\Delta = 0.035$ и $(1 - 2\Delta) = 0.965$ соответственно. Единственный (базовый в терминологии [8]) среди всего множества оптимальных законов движения тела выделяется требованием того, что на промежутке периодичности происходит единственная смена (прямое – обратное – прямое) фаз движения.

Такое же требование мы наложим и в общем случае ненулевых значений параметра s . Это позволит не рассматривать множество локальных “высокочастотных” минимумов функционала мощности $N[u]$. Наличие такого рода минимумов легко понять, заметив, например, что если $u(t; \sqrt{2}s)$ есть решение задачи (1.5)–(1.7), то $u(2t; \sqrt{2}s)$ наряду с $u(t; s)$ также будет доставлять локальный минимум функционалу $N[u(t; s)]$. Значения функционалов в этих минимумах равны $N_{\min}(\sqrt{2}s)$ и $N_{\min}(s)$ соответственно. Первое заведомо больше в силу положительной определенности оператора Бассе.

Вводя отвечающие ограничениям (1.6), (1.7) множители Лагранжа λ и μ и варьируя полученный из соотношений (1.5), (1.6), (1.7) функционал Лагранжа

$$L = \langle |u|^3 \rangle + s \left\langle u \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\rangle + \lambda (\langle u|u \rangle) - \mu (\langle u \rangle - 1),$$

найдем

$$\delta L = \left\langle \left(3u|u| + \lambda|u| - \mu + s \int_{-\infty}^t \frac{\dot{u}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right) \delta u \right\rangle + s \left\langle u \int_{-\infty}^t \frac{d\delta u}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\rangle.$$

Интегрируя по частям последний член в этом соотношении и используя то, что операция взятия среднего дает один и тот же результат при любом сдвиге по времени, можно показать, что

$$\left\langle u \int_{-\infty}^t \frac{d\delta u}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\rangle = - \left\langle \delta u \int_t^{\infty} \frac{\dot{u}(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau-t}} \right\rangle.$$

Учитывая это и пользуясь произвольностью δu , получим следующее уравнение для определения $u(t)$:

$$3|u|u + s \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(\tau) \frac{\text{sign}(t-\tau)}{\sqrt{|t-\tau|}} d\tau + \lambda|u| - \mu = 0. \quad (2.1)$$

В силу инвариантности (2.1) относительно сдвига и обращения времени можно рассматривать задачу (1.6), (1.7), (2.1) на полупериоде $0 < t < 1/2$, задав на его концах условия симметрии:

$$\dot{u}(0) = \dot{u}(1/2) = 0. \quad (2.2)$$

Дальнейшее упрощение полученной задачи связано со снятием ограничений (1.6), (1.7) за счет выбора множителей Лагранжа. Проинтегрируем по периоду соотношение (2.1). В силу ограничения (1.7) среднее от первого слагаемого в левой части (2.1) равно нулю. Среднее от второго слагаемого также равно нулю. Это прямо следует из свойства нулевого среднего для оператора Бассе от периодических функций. В результате осреднения получим $\mu = \lambda \langle |u| \rangle$. Оставшийся множитель Лагранжа λ можно выбрать произвольно, положив, например $\lambda = 1$. Полученное при этом решение $\bar{u}(t; \bar{s})$, будучи нормированным на $\langle \bar{u} \rangle$, удовлетворит при простом пересчете величины $s = \bar{s} / \langle \bar{u} \rangle$ как уравнению (2.1), так и всем дополнительным условиям.

Задача (2.1), (2.2) при фиксированных значениях λ и μ решалась численно. Дискретизированное на равномерной сетке

$$t_k = kh, \quad h = \frac{1}{2n}, \quad k = \dots, 0, 1, \dots, n, \dots$$

уравнение (2.1) принимает вид

$$3|u_k|u_k + s \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (u_j - u_{j-1}) h^{-1} \text{sign}(k-j+1/2) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{d\tau}{\sqrt{|t_k-\tau|}} \right) = \langle |u| \rangle - |u_k|. \quad (2.3)$$

Вычисляя фигурирующие в (2.3) интегралы, воспользовавшись условиями периодичности и симметрии сеточной функции u и переходя в (2.3) на расчетный интервал, получаем

$$3\gamma_k |u_k|u_k + s \sum_{j=0}^n A_{kj} u_j = f_k, \quad k = \overline{0, n}; \quad (2.4)$$

$$f_k = \gamma_k (\langle |u| \rangle - |u_k|), \quad k = \overline{0, n}; \quad \gamma_k = \begin{cases} 1/2, & k = 0, n, \\ 1, & 0 < k < n. \end{cases}$$

Фигурирующая в (2.4) матрица A с элементами A_{kj} симметрична, неотрицательно определена, сумма элементов в каждой ее строке равна нулю. Нелинейное сеточное уравнение (2.4) решаем методом Ньютона с опусканием правой части (2.4) на предыдущую итерацию:

$$6\gamma_k |u_k^{(s)}| \delta u_k + s \sum_{j=0}^n A_{kj} \delta u_j = f_k^{(s)} - 3\gamma_k |u_k^{(s)}| u_k^{(s)} - s \sum_{j=0}^n A_{kj} u_j^{(s)}, \quad k = \overline{0, n}, \quad (2.5)$$

$$u^{(s+1)} = u^{(s)} + \xi \delta u.$$

Параметр ξ релаксации во всех расчетах выбирался равным 0.4. Обращение симметричной положительно-определенной матрицы в (2.5) проводилось прямыми методами. В расчетах использовалась сетка, содержащая 4097 узлов. Выход из итерационного цикла осуществлялся по достижении максимальной невязки величины 10^{-5} в правой части (2.5). При этом число итераций в зависимости от параметра s и точности начального приближения варьировалось от нескольких десятков до первых сотен.

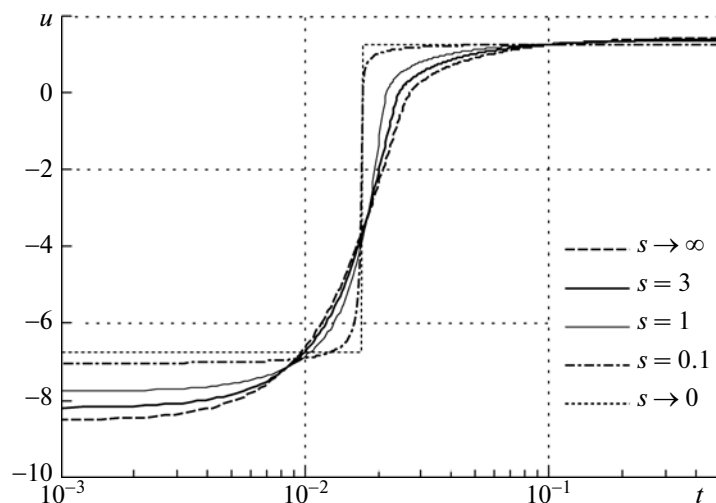


Рис. 1. Оптимальный закон движения $u(t)$ корпуса на полупериоде при различных значениях параметра s

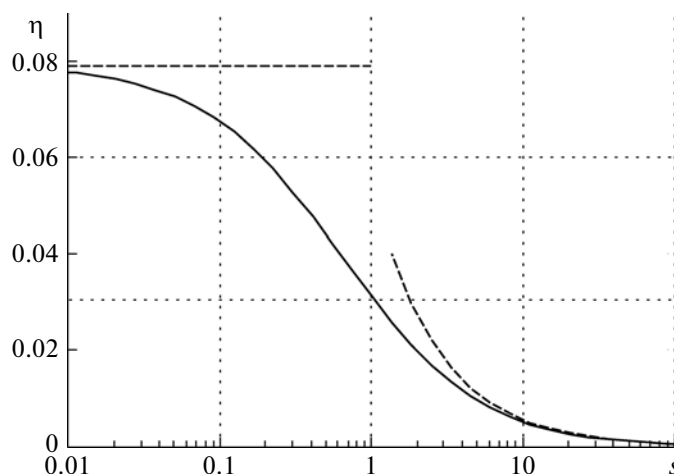


Рис. 2. Зависимость энергетического коэффициента η от параметра s (сплошная линия); асимптотика при предельных значениях s (пунктирные линии)

Как отмечалось выше, решение данной задачи не единственно. Для того чтобы получать отвечающие глобальному минимуму (1.5) базовые (т.е. не имеющие на выделенном полупериоде других точек экстремума кроме 0 и $1/2$) решения, необходимо, чтобы начальное приближение попадало в окрестность этих решений. В численной процедуре это гарантировалось постепенным продолжением по параметру s , когда $u(t; s)$ выбиралось в качестве начального приближения для $u(t; s + ds)$. Начальный шаг использовал наличие базового аналитического решения при $s = 0$.

Результаты расчетов представлены на рис. 1, 2, в которых для наглядности по оси абсцисс используется логарифмический масштаб. На рис. 1 на половине периода $(0, 1/2)$ изображены оптимальные зависимости $u(t)$ при различных значениях параметра s . Как видно, с ростом s характер квазистационарного оптимального закона движения корпуса сохраняется, но скачок скоростей при $t = \Delta$ постепенно сглаживается. Максимальная скорость движения корпуса возрастает с ростом s от $u_+ = 1.286$ при $s = 0$ до $u_+ = 1.436$ при $s = \infty$, минимальная скорость убывает от $u_- = -6.653$ до $u_- = -8.562$, продолжительность фазы обратного движения возрастает от $2\Delta = 0.035$ до $2\Delta = 0.054$. Из рис. 1 видно, что наиболее существенное изменение оптимального закона движения $u(t; s)$ происходит в диапазоне s от 0.1 до 3. При меньших, чем 0.1, значениях s закон движения близок к квазистационарному $u_0(t)$, полученному в пренебрежении силами Бас-

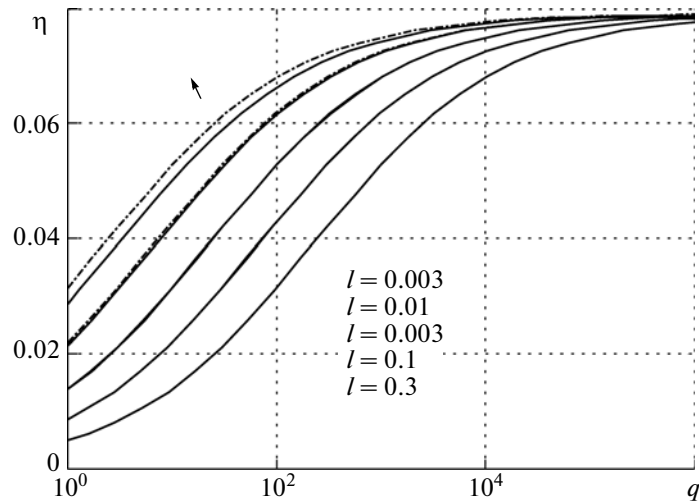


Рис. 3. Линии уровня амплитуды колебаний внутренней массы $l(\eta, q)$: сплошные линии – в общем случае, штрихпунктирные – в предположении инерционности режима движения

се. При больших, чем 3, значениях s , наоборот, можно пренебречь силами вязкого трения. Здесь $u(t; s)$ практически совпадает с $u_\infty(t) = u(t; \infty)$.

На рис. 2 сплошной линией показана зависимость основной интегральной характеристики – энергетического коэффициента η – от параметра s . Штриховые линии на этом рисунке отвечают значению $\eta_0 = 0.079$ и асимптотике $\eta(s) = \eta_\infty s^{-1}$ ($s \rightarrow \infty$). Величина $\eta_\infty = 0.056$ подсчитывается по мощности сил Бассе для $u_\infty(t)$, согласно формуле $\eta_\infty = (N_H[u_\infty])^{-1}$. Как и следовало ожидать, энергетический коэффициент монотонно уменьшается с ростом параметра s , что соответствует дополнительным потерям мощности движителя на преодоление сил Бассе.

3. Оптимальное движение внутренней массы. После решения задачи минимизации оптимальный закон движения внутренней массы находится интегрированием (1.9). Ограничимся тем, что представим результаты, относящиеся к вычислению безразмерного размаха колебаний l внутренней массы. Удобно выразить l непосредственно в терминах оптимального закона $u(t)$ движения корпуса. Для этого, введя функцию $\Phi(t)$

$$\dot{\Phi} = R, \quad \langle \Phi \rangle = 0$$

и интегрируя один раз уравнение (1.9), получим

$$\dot{x} = -p(u - 1) - p^2\Phi. \quad (3.1)$$

Периодичность $\Phi(t)$ гарантируется условием $\langle R \rangle = 0$, периодичность x – условиями $\langle \Phi \rangle = 0$, $\langle u \rangle = 1$. Как показывают численные расчеты, функция $x(t)$ имеет лишь два экстремума на интервале периодичности – максимум и минимум. Поэтому, взяв модуль от обеих частей соотношения (3.1) и интегрируя результат по периоду, придем к искомому выражению

$$2l = p \langle (u - 1) + p\Phi \rangle. \quad (3.2)$$

С учетом того, что $p = q^{-1}s^{-2}$, а оптимальный закон $u(t)$ определяется параметром s , который в свою очередь однозначно связан с энергетическим коэффициентом η , размах колебаний l является функцией энергетического коэффициента η и “числа Рейнольдса” q . На рис. 3 сплошными линиями изображены линии уровня этой функции.

Отметим два важных обстоятельства. Во-первых, при фиксированном значении параметра q функция $l(s)$ монотонно убывает с ростом своего аргумента от бесконечности при $s = 0$ до нуля при $s = \infty$. Поэтому $l(s)$ обратима и каждому значению l можно поставить в соответствие свое значение s . Во-вторых, как будет видно из дальнейшего, основной физический интерес представляет диапазон $l < 0.1$, $q > 10$ значений параметров. При работе в этом диапазоне реализуется так называемый инерционный [8] режим движения внутренней массы, когда вторым слагаемым

в правых частях (3.1), (3.2) можно пренебречь. Этот факт проиллюстрирован на рис. 3 близостью линий уровня функции $l(\eta, q)$, построенных по общей формуле (3.2) (сплошные линии) и в предположении

$$2l = p \langle |u - 1| \rangle \quad (3.3)$$

инерционности режима (пунктирные линии). Из соотношения (3.3) следует, что

$$lqs^2 = b, \quad (3.4)$$

где $b(s) = \langle |u - 1| \rangle / 2$. Расчеты показывают, что при изменении s от нуля до бесконечности $b(s)$ возрастает от 0.275 до 0.335. Слабое изменение b позволяет на практике считать эту величину константой $b \approx 0.305$.

4. Обсуждение результатов. Формулировка исходной задачи предполагала фиксацию диаметра корпуса виброробота, средней скорости его движения и периода колебаний внутренней массы. В безразмерных переменных это соответствовало заданию параметров s и q . После минимизации интеграла мощности подсчитывался размах l колебаний внутренней массы. Вместо того чтобы фиксировать период колебаний внутренней массы, можно было бы фиксировать размах колебаний, подсчитывая отвечающий ему период после решения соответствующей задачи минимизации. Результат в обоих случаях был бы одним и тем же. Рисунок 3 при этом трактовался бы как серия графиков зависимости энергетического коэффициента η (а, значит, и однозначно связанного с ним безразмерного периода колебаний s) от безразмерной средней скорости q движения корпуса при различных значениях l .

Далее удобно остановиться именно на этой трактовке. Дело в том, что величина размаха колебаний, в отличие от периода, имеет чисто конструкционное ограничение. Она не может превосходить диаметра корпуса. В безразмерных переменных имеем $l = 2r\xi^{-1}$. Здесь коэффициент запаса $r \leq 1$ представляет собой отношение размаха колебаний к диаметру корпуса. При $r = 1$, $C_x = 0.45$, нулевой массе корпуса и нейтральной плавучести виброробота ($2M_0 = M + m$) имеем $l = 0.15$. Уточнение грубых оценок для коэффициента запаса и массы корпуса может привести к снижению l в разы и десятки раз.

При $C_x = 0.45$ в условиях нейтральной плавучести безразмерная скорость q связана с числом Рейнольдса, построенным по средней скорости движения корпуса соотношением $q = 0.02 \text{Re}$. Диапазон квадратичности закона вязкого сопротивления в терминах q запишется как $16 < q < 6 \cdot 10^3$.

В указанных диапазонах изменения l и q заведомо реализуется (см. рис. 3) инерционный режим движения внутренней массы. В инерционном режиме для оптимальных движений выполняется формула (3.4), которой в размерных переменных можно придать следующий простой вид:

$$UT = \frac{3.28m}{m + M + M_0} ra. \quad (4.1)$$

Она связывает перемещение UT виброробота за один период с его конструкционными характеристиками. Задав среднюю скорость поступательного движения тела U , диаметр корпуса $2a$, соотношение масс корпуса и внутреннего движителя и зафиксировав размах колебаний, по (4.1) можно определить оптимальную продолжительность периода T колебаний системы. Далее, вычисляя параметр s , согласно (1.8), и пользуясь рис. 2, можно найти энергетический коэффициент, характеризующий эффективность оптимального движения.

Столь же просто в инерционном режиме определяется скорость движения внутренней массы $v(t)$ по оптимальной скорости $u(t)$ движения корпуса. Пренебрегая в (3.1) вторым слагаемым в правой части, получим

$$v(t) = \frac{m + M + M_0}{m} (U - u(t)).$$

Как видно, максимальная скорость движения внутренней массы в разы превышает скорость движения корпуса.

Заключение. В данной работе поставлена задача об оптимальном управлении движением виброробота в вязкой жидкости, когда силы сопротивления включают в себя не только вязкие силы,

но и наследственные силы Бассе, что отвечает более реалистичному описанию сил, действующих на сферу. В ходе решения поставленной задачи были установлены следующие факты:

Во-первых, предложенные в [8] энергетическая формулировка задачи оптимизации управления движением виброробота и подходы к ее решению могут быть использованы при более сложных, чем квазистационарные, законах сопротивления движению со стороны внешней среды. В частности, они могут прямо переноситься на нелокальные по времени зависимости, учитывающие предысторию движения.

Во-вторых, учет наследственных эффектов не приводит к качественному изменению оптимальных режимов движения корпуса и внутренней массы, полученных в предположении квазистационарности закона сопротивления. По-прежнему оптимальные движения имеют двухфазный характер; продолжительности и скорости поступательной и возвратной фаз движения корпуса отличаются от “квазистационарных” на первые десятки процентов.

В-третьих, характеризующий эффективность движения энергетический коэффициент $\eta_0 = 0.079$, вычисленный для квазистационарного случая ($T = \infty$), является в общем случае $T < \infty$ верхней оценкой для η . С уменьшением периода T колебаний энергетический коэффициент оптимального движения уменьшается из-за дополнительных потерь мощности движителя на преодоление сил Бассе.

В-четвертых, в практически интересном диапазоне изменения параметров задачи реализуется инерционный режим движения внутренней массы. При этом перемещение виброробота за один период в оптимальном движении полностью определяется конструктивными характеристиками виброробота по формуле (4.1).

Последние три вывода сделаны, разумеется, в рамках рассмотренной постановки задачи. Прямое их распространение на случай движения виброробота в вязкой жидкости при умеренных числах Рейнольдса представляется преждевременным. Ограниченность постановки связана главным образом с чрезмерной схематизацией наследственных сил. Их более реалистичный учет, основанный на полуэмпирических моделях типа [12, 13] и прямом численном моделировании гидродинамической задачи, предполагается провести в будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // ДАН. 2005. Т. 405. № 1. С. 56–60.
2. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 915–941.
3. Болотник Н.Н., Зейдис И.М., Циммерманн К., Яцун С.Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 5. С. 157–167.
4. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 202–215.
5. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление прямолинейным движением твердого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 216–229.
6. Сапронов К.А., Черепанов А.А., Яцун С.Ф. Исследование движения мобильной двухмассовой вибрационной системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 1. С. 147–155.
7. Волкова Л.Ю., Яцун С.Ф. Моделирование плоского управляемого движения трехмассовой вибрационной системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 6. С. 122–141.
8. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в среде с сопротивлением // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 620–632.
9. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 3–22.
10. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой жидкости // Изв. вузов. Математика. 2012. № 2. С. 57–64.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 713 с.
12. Mei R., Adrian R. J. Flow Past a Sphere with an Oscillation in the Free-Stream and Unsteady Drag at Finite Reynolds Number // J. Fluid Mech. 1992. V. 237. P. 323–341.
13. Kim I., Elghobashi S., Sirignano W.A. On the Equation for Spherical-Particle Motion: Effect of Reynolds and Acceleration Numbers // J. Fluid Mech. 1998. V. 367. P. 221–253.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
15. Соу С. Гидродинамика многофазных сред. М.: Мир, 1971. 527 с.
16. Mei R. Velocity Fidelity of Flow Tracer Particles // Experiments in Fluids. 1996. V. 22. P. 1–13.