$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi e^{-\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi}{l}x. \qquad (4.5)$$

Теорема. Пусть $\varphi(x)\in C^1\left(\left[0,l\right]\right)$, $\varphi(0)=\varphi(l)=0$. Тогда существует единственное решение задачи (4.1)–(4.3), представимое в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда (4.5).

Решение (4.5) можно представить в виде

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi ,$$

где введена функция

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{a^2k^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi\xi}{l},$$

называемая *функцией мгновенного точечного источника*.

Физический смысл функции $G(x,\xi,t)$ состоит в том, что она как функция аргумента x представляет собой распределение температуры в стержне $0\le x\le l$ в момент времени t, если при $t=0$ температура была равна нулю, и в этот момент в точке $x=\xi$ мгновенно выделилось некоторое количество тепла Q, а на концах стержня постоянно поддерживается температура, равная нулю.

Пример 1

Дан тонкий однородный стержень $0\le x\le l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если концы стержня поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура $u(x,0)=u_0=\text{const}$.

Р е ш е н и е

Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<l,\ t>0$$

при условиях $u(x,0)=u_0=\text{const}$, $u(0,t)=u(l,t)=0$.

Вычислим:

$$\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi = \frac{2}{l}\int_0^l u_0 \sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi = -\frac{2u_0}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{l}\xi\Big|_0^l =$$

$$= -\frac{2u_0}{k\pi}\left((-1)^k - 1\right) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{4u_0}{k\pi}, & k = 2n+1, \\ 0, & k = 2n. \end{array}\right.$$

Тогда решение примет вид (по формуле (4.5)):

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{-\frac{a^2(2n+1)^2\pi^2}{l^2}t}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

Пример 2

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le l/2, \\ l - x, & l/2 \le x < l \end{cases}$$

и краевым условиям $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

Решение

Коэффициенты a_k:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi = \frac{2}{l}\int_0^{l/2}\xi\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi + \frac{2}{l}\int_{l/2}^{l}(l-\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi.$$

Проинтегрируем по частям, полагая

$$u = \xi,\ dv = \sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi,\ du = d\xi,\ v = -\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{l}\xi d\xi;$$

получим

$$a_k = \frac{2}{l}\left(-\frac{l\xi}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{l}\xi + \frac{l^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{l}\xi \right)\Bigg|_0^{l/2} +$$

$$+\frac{2}{l}\left(-\frac{l^2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{l}\xi + \frac{l\xi}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{l}\xi - \frac{l^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{l}\xi \right)\Bigg|_{l/2}^{l} = \frac{4l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Следовательно, искомое решение по формуле (4.5) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

4.2.2. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0 \tag{4.6}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = 0, \tag{4.7}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \ge 0.$$

Будем искать решение этой задачи в виде ряда Фурье по функциям $\left\{\sin\frac{k\pi}{l}x\right\}$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \tag{4.8}$$

считая при этом t параметром. Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда Фурье:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x,\ f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi. \tag{4.9}$$