# Повторение опытов

## § 1. Частная теорема о повторении опытов (Схема Бернулли).

Схемой Бернулли называется последовательность независимых в совокупности испытаний (вероятность того или иного исхода каждого опыта не зависит от того, какие исходы имели другие опыты), в каждом из которых возможны лишь только два исхода – «успех» и «неудача». При этом вероятность «успеха» во всех опытах одна и та же.

**Теорема** (Частная теорема о повторении опытов)
Если производится $n$ независимых опытов в одинаковых условиях, причем в каждом из них с вероятностью $p$ появляется событие А, то вероятность того, что событие $A$ произойдет в этих n опытах ровно $k$ раз, выражается формулой $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $k=0 \dots n$ и $q = 1 - p$.

**Доказательство.**

Так как в одном опыте события «успех» и «неудача» образуют полную группу событий, то вероятность «неудачи» будет $q = 1 - p$. Рассмотрим вероятность того что все «успехи» произошли в первых $k$ опытах. Так как испытания независимы, а вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей, то вероятность одного фиксированного сложного события равна $p^k q^{n-k}$. Всего событий, заключающихся в том, что произошло $k$ «успехов» и *(n–k)* «неудач», может быть $C_n^k$, так как мы расставляем $k$ «успехов» по $n$ местам. У нас получается $C_n^k$ слагаемых равных $p^k q^{n-k}$, а поскольку все сложные события являются несовместными, то вероятность суммы равна сумме вероятностей и $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

*Следствие 1.* Рассмотрим схему с одним успешным исходом. Тогда вероятность того, что первый успех произойдет в испытаниях с номером $k$, равна $pq^{k-1}$.

*Следствие 2.* Если выбрать такое n, что $n \geq \frac{|\ln(1-P)|}{|\ln(1-p)|}$, то с вероятностью не меньшей $P$, событие $A$ произойдет в испытаниях хотя бы 1 раз. Здесь $p$ – вероятность успеха в одном опыте.

**Доказательство.**

По условию вероятность события «успех произойдет хотя бы один раз» должна быть $\geq P$. Но события «успеха не будет» и «успех произойдет хотя бы один раз» образуют полную группу событий, поэтому $1-q^n \geq P$ и $1-P \geq q^n$ где $q$ вероятность «неудачи» в одном опыте. Прологарифмируем обе части неравенства и воспользуемся свойством логарифмов: $\ln(1-P) \geq n\ln q$ или $\ln(1-P) \geq n\ln(1-p)$. Поделим на $\ln(1-p)$ и с учетом того, того что оба логарифма отрицательные будем иметь: $n \geq \frac{|\ln(1-P)|}{|\ln(1-p)|}$.

*Следствие 3.* Каждому числу *k=0…n* (число успехов) соответствует свое число $P_n(k)$ (вероятность $k$ успехов). Число успехов *s*, которому соответствует наибольшее число из $P_n(k)$, *k=0…n,* называется наивероятнейшим числом появлений событий в последовательности $n$ независимых испытаний. Для наивероятнейшего числа появлений событий справедливо неравенство $np-q \leq s \leq np+p$, где $n$ число испытаний, $p$ – вероятность успеха, $q=1-p$ – вероятность «неудачи».

**Доказательство.**

По определению имеем $P_n(s) \geq P_n(s-1)$ *и* $P_n(s) \geq P_n(s+1)$, распишем соответствующие вероятности и объединим в систему

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{s!(n-s)!} p^s q^{n-s} \geq \dfrac{n!}{(s-1)!(n-s+1)!} p^{s-1} q^{n-s+1} \\ \dfrac{n!}{s!(n-s)!} p^s q^{n-s} \geq \dfrac{n!}{(s+1)!(n-s-1)!} p^{s+1} q^{n-s-1} \end{cases}.$$

Произведем необходимые сокращения и после сокращений останется

$$\begin{cases} \dfrac{p}{s} \geq \dfrac{q}{n-s+1} \\ \dfrac{q}{n-s} \geq \dfrac{q}{s+1} \end{cases}$$

Умножим первое неравенство на $s(n-s+1)$ и второе на $(s+1)(n-s)$, в результате будет $\begin{cases} p(n-s+1) \geq qs \\ q(s+1) \geq p(n-s) \end{cases}$.

Перейдем к неравенству $p(n-s)-q \leq qs \leq p(n-s+1)$. Прибавим $ps$ к каждой части неравенства $pn-q \leq qs+ps \leq pn+p$. Вынесем s за скобку и учтем, что $q+p=1$ получим $pn-q \leq s \leq pn+p$.

Пример 1. Вероятность выигрыша по одному билету денежно–вещевой лотереи равна 0.2. Какова вероятность того, что из шести приобретенных билетов два билета окажутся выигрышными?

**Решение.**

Эксперимент состоит в том, что последовательно проверяются 6 билетов, т. е. проводится 6 повторных независимых испытаний. Каждое испытание имеет два исхода: билет выигрышный, билет невыигрышный. Вероятность выигрыша в каждом испытании постоянна. Следовательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие *(m=2)* состоит в том, что 2 билета оказались выигрышными. Тогда по формуле Бернулли:

$$P_6(m=2) = C_6^2 0.2^2 0.8^4 \approx 0.246$$

Пример 2. Прибор состоит из шести элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время *t* равна

0.6. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время $t$ прибор будет работать безотказно?

**Решение.**

Так как элементы работают независимо друг от друга, то каждый элемент можно рассматривать как отдельное испытание и тогда эксперимент заключается в проведении шести повторных независимых испытаний с двумя исходами каждый. Вероятность отказа каждого элемента за время $t$ равна $q = 0{,}4$. Следовательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие *(m≥1)* означает, что хотя бы один элемент прибора исправен. События {хотя бы один элемент прибора исправен} и {не работает ни один прибор} составляют полную группу событий и поэтому

$$P_6(m \geq 1) = 1 - P_6(0) = 1 - 0{,}4^6 \approx 0{,}9959.$$

Пример 3. Используя условия предыдущего примера, найдите число элементов, которые необходимо включить в прибор, чтобы с вероятностью не менее 0.9 прибор работал безотказно.

**Решение.**

Так как в задаче требуется, чтобы выполнялось условие $P_n(m \geq 1) \geq 0.9$, то имеем $1 - 0.4^n \geq 0.9$. Отсюда $0.4^n \leq 0.1$. Прологарифмируем это неравенство, тогда $n \ln 0.4 \leq \ln 0.1$. Так как $\ln 0.4 < 0$, то $n \geq \dfrac{\ln 0.1}{\ln 0.4} \approx 2.5$. Значит, в приборе должно быть не менее трех элементов для того, чтобы с вероятностью не менее 0.9 он работал безотказно.

Пример 4. Найдите вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0.7.

**Решение.**

Эксперимент заключается в проведении пяти повторных испытаний, независимых, с двумя исходами в каждом (разговор состоялся, разговор не состоялся). Вероятность того, что разговор состоится, в каждом испытании постоянна. Следовательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие $(2 \le m \le 4)$ означает, что состоялось от двух до четырех разговоров. Данное событие будет составным и включает в себя следующие несовместные события: {состоялось только два разговора},{состоялось только три разговора},{состоялось только четыре разговора}, и соответственно

$$P_5(2 \le m \le 4) = C_5^2 0.7^2 0.3^3 + C_5^3 0.7^3 0.3^2 + C_5^4 0.7^4 0.3 \approx 0.801.$$

Пример 5. Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0.05. Найдите наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

**Решение.**

Проводится 50 повторных независимых испытаний с двумя исходами в каждом. Вероятность появления нестандартной детали в каждом испытании постоянна. Значит, схема Бернулли выполняется. По формуле для наивероятнейшего числа появлений событий имеем $50 \times 0.05 - 0.95 \le S \le 50 \times 0.05 + 0.05$ и $1.55 \le S \le 2.55$. Так как число деталей может быть только целым, то наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии равно 2.

Пример 6. Система противовоздушной обороны обороняет территорию от воздушного налета, в котором принимает участие $N$ самолетов. Для поражения каждого из самолетов выделяется два истребителя – перехватчика; каждый истребитель поражает цель независимо от другого с вероятностью $p$. Найти вероятность того, что в составе воздушного налета будет поражено: ровно три самолета.

**Решение.**

События {два истребителя поразят цель} и {цель не поражена} составляют полную группу событий. И, следовательно, вероятность $P${цель будет поражена} = 1 – $P${цель не поражена}. Так как два истребителя поражают или не поражают цель независимо друг от друга, то $P${цель не поражена} будет равна произведению следующих вероятностей $P${промахнулся первый истребитель} и $P${промахнулся второй истребитель}, то есть $P${цель будет поражена} = $1–(1–p)^2$. Дальше рассмотрим воздушный налет из $N$ самолетов, как серию из $N$ независимых повторяющихся опытов (один опыт– это подбит или нет один самолет), где благоприятным исходом будет {самолет подбит} с вероятностью

$1–(1–p)^2$. Тогда $P${в составе воздушного налета будет поражено: ровно три самолета} = $P_N(3)$, и соответственно

$$P_N(3) = C_N^3 (1-(1-p)^2)^3 (1-p)^{2(N-3)}.$$

Пример 7. Контрольная работа состоит из шести задач, причем для успешного ее выполнения необходимо решить любые четыре задачи. Если студент будет решать в течение отведенного времени лишь четыре задачи, то вероятность правильного решения любой из них равна 0.8. Если он попробует решить пять задач, то вероятность правильного решения любой из них равна 0.7, а если он возьмется за решение всех шести задач, то вероятность снизится до 0.6. Какой тактики должен придерживаться студент, чтобы иметь шансы успешно выполнить работу.

**Решение.**

Пусть $A$={успешное выполнение работы}. Рассмотрим решение задач $N$, как серию из $N$ независимых повторяющихся опытов. Здесь $N$ это количество задач, за которые он взялся. Таким образом если он взялся за решение четырех задач, то он должен иметь серию из одних успехов, то есть $P(A)= P_4(4) = 0.8^4=0.4096$, если он взялся за решение пяти задач, то событие $A$ будет состоять из двух не пересекающихся исходов решено {четыре задачи}, {решено пять задач} и $P(A)= P_5(5)+5\times P_5(4) = 0.7^5+5\times 0.7^4\times0.3=0.52822$. И при решении шести задач $P(A)= P_6(5)+ P_6(4) + P_6(6) = 0.6^6+15\times0.6^4\times0.4^2+6\times 0.6^5\times0.4=0.54432$. В результате студенту надо решать шесть задачи.

## §2 Независимые испытания с несколькими исходами

Если производится $n$ независимых опытов в одинаковых условиях, причем каждый опыт может иметь $k$ исключающих друг друга исходов $A_1, A_2, ..., A_k$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_k$ такими что $\left(\sum_{j=1}^{k} p_j = 1\right)$, то вероятность того, что в $m_1$ опытах появится $A_1$, в $m_2$ опытах – событие $A_2$ и т.д., в $m_k$ опытах – событие $A_k$ $\left(\sum_{j=1}^{k} m_j = n\right)$ выражается формулой

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Зафиксируем вероятность того, что сначала произошли все $m_1$ появлений исхода $A_1$, следующие за ними были $m_2$ появления со бытия $A_2$ и заканчивает все $m_k$ появлений события $A_k$. Так как испытания независимы, а вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей, то вероятность этого фиксированного сложного события равна $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$. Соответственно, вероятность каждого фиксированного сложного события будет аналогичной. Всего событий будет $C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} \cdots C_{m_k}^{m_k} = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!}$, а поскольку все сложные события являются несовместными, то вероятность суммы равна сумме вероятностей и $P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$.

Пример 1. Игральная кость подбрасывается 15 раз. Найти вероятность, что выпадет ровно 10 троек и 3 единицы.

**Решение.**

Зафиксируем следующие исходы: $A_1${выпала тройка}, $A_2${выпала единица}, $A_3${выпало все остальное}, тогда вероятности будут равны $P(A_1)=1/6$, $P(A_2)=1/6$, $P(A_3)=4/6$. Зафиксируем следующий порядок появления исходов

$$(A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_2,A_2,A_2,A_3,A_3).$$

Так как испытания независимы, а вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей, то вероятность этого фиксированного сложного события равна

$$P(A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_2,A_2,A_2,A_3,A_3)=$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=$$
$$=\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\times\left(\frac{4}{6}\right)^{2}.$$

Все остальные возможные события отличаются порядком появления исходов. И так как произведение не меняется при перемене мест сомножителей, то вероятность каждого события будет так же $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\times\left(\frac{4}{6}\right)^{2}$.

Далее существует всего $C_{15}^{10}$ способов размещения троек, и на каждые такой способ существуют $C_5^3$ способов размещения единиц, и на каждый выбор троек и единиц существует $C_2^2$ способов размещения исхода $A_3$. Так всего существует

$$C_{15}^{10}\times C_5^3\times C_2^2=\frac{15!\times 5!\times 2!}{10!\times 5!\times 3!\times 2!\times 2!\times 0!}=\frac{15!}{10!\times 3!\times 2!}$$

возможных событий , то вероятность того, что выпадет ровно 10 троек и 3 единицы будет равна $\frac{15!}{10!\times 3!\times 2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\times\left(\frac{4}{6}\right)^{2}$.

Данное значение вероятности соответствует так же значению, полученному по формуле для $n$ независимых испытаний с несколькими исходами.

Пример 2. В цех по ремонту радиоаппаратуры поступают резисторы с трех заводов в отношении 2:3:5. Мастер для прибора взял наугад 6 резисторов. Какова вероятность того, что взят один резистор первого завода, два резистора второго завода и три резистора третьего завода.

**Решение.**

Рассмотрим выбор шести резисторов, как серию из 6 независимых повторяющихся опытов с тремя исходами: $A_1$={взят резистор первого завода}, $A_2$={взят резистор второго завода}, $A_3$={взят резистор третьего завода}. Зная соотношение резисторов первого, второго, третьего завода, введем вероятности исходов $P(A_1)$=0.2, $P(A_2)$=0.3, $P(A_3)$=0.5. Вероятность события {взят один резистор первого завода, два резистора второго завода и три резистора третьего завода} рассмотрим как вероятность двух появлений исхода $A_1$ , трех появлений исхода $A_2$ и пяти появлений исхода $A_3$ и найдем, что $P_6(2{,}3{,}5) = \dfrac{6!}{2!\times 3!\times 5!}0.2^2 \times 0.3^3 \times 0.5^5$.

Пример 3. Выбирается группа из 6 человек. каждый человек может принадлежать одной из трех групп населения, с вероятностью 0.6 оказывается брюнетом, с вероятностью 0.3 шатеном и с вероятностью 0.1 рыжим. Какая вероятность событий: $A$={в составе группы хотя бы один рыжий}, $B$={в составе группы три рыжих}.

**Решение.**

Вероятность события $A$ удобно считать через противоположное $A^c$={ в группе нет рыжих} и $P(A) = 1–P(A^c) =1–0.1^6$. Событие $B$ состоит из следующих несовместных событий {три рыжих, три шатена}, {три рыжих, два шатена, один брюнет }, {три рыжих, один шатен, два брюнета }, {три рыжих, три брюнета} и каждое такое событие есть серия из шести независимых испытаний в каждом из которых возможны три исхода {брюнет}, {шатен}, {рыжий}. В результате

$$P(B)=\frac{6!}{3!\times 3!}0.1^3\times 0.3^3+\frac{6!}{3!\times 2!\times 1!}0.1^3\times 0.3^2\times 0.6+$$
$$+\frac{6!}{3!\times 2!\times 1!}0.1^3\times 0.3\times 0.6+\frac{6!}{3!\times 3!}0.1^3\times 0.6^3$$

Пример 4. Самолет обстреливается $n$ независимыми выстрелами, каждый из выстрелов с вероятностью $p_1$ , попадает в зону, где он поражает самолет немедленно; с вероятностью $p_2$ попадает в топливный бак и с вероятностью $p_3$ не попадает в самолет вообще. Снаряд, попавший в топливный бак, оставляет в нем пробоину, через которую вытекает $k$ литров горючего в час. Потеряв $M$ литров горючего, самолет становится небоеспособным. Найти вероятность того, что через час после обстрела самолет не будет боеспособен.

**Решение.**

Рассмотрим $n$ независимых выстрелов, как серию из $n$ независимых повторяющихся опытов с тремя исходами: $A_1$={попадания в зону немедленного поражения}, $A_2$={попадание в топливный бак}, $A_3$={промах}. Самолет точно будет поражен, если событие $A_1$ произошло, хотя бы один раз из $n$, вероятность этого события можно найти как $1-P(\overline{A_1})=1-(1-p_1)^n$, где $\overline{A_1}$ ={не было не одного попадания в зону немедленного поражения}. Если не было не одного попадания в зону немедленного поражения, самолет так же будет поражен, если из топливного бака вылилось $M$ и более литров горючего. Это возможно, если в самолет было, как минимум, $l=\left[M/k\right]+1$ попаданий в топливный бак ($[\cdot]$– целая часть числа ).То есть произошло одно из следующих несовместных событий {было $l$ попаданий в топливный бак}, {было $l+1$ попадание в топливный бак},…,{ было $n$ попаданий в топливный бак }. Конечно, $l\le n$, так как в противном случае самолет будет поражен только при попадании в зону поражения. В каждом таком событии только два исхода $A_2$ и $A_3$. Следовательно, $P${самолет поражен попаданиями в топливный бак} = $\sum_{j=l}^{n}\frac{n!}{j!\times(n-j!)}p_2{}^{j}p_3{}^{n-j}$. И вероятность того, что самолет через час после обстрела не будет боеспособен, равна

$$1-(1-p_1)^n+\sum_{j=l}^{n}\frac{n!}{j!\times(n-j!)}p_2{}^{j}p_3{}^{n-j}$$