ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

§1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2.$$

Здесь a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 — заданные, вообще говоря, комплексные числа, x_1, x_2 требуется найти.

Решим эту систему

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

используя метод последовательного исключения неизвестных. Этот метод называют ***методом Гаусса***.

Поделим обе части первого уравнения системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

на a_{11}**:**

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

.

Умножим уравнение

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

на a_{21}, **получим**

$$a_{21} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} x_2 = \frac{b_1}{a_{11}} a_{21}.$$

Вычтем почленно из второго уравнения системы,

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

уравнение

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}.$$

Получим

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}.$$

.

Итак,

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}.$$

Отсюда

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})\,x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21},$$

и

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}.$$

Подставляя

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}}$$

в первое уравнение системы

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1,$$

легко найти выражение для x_1:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \, \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}} =$$

$$= \frac{b_1 \left(a_{22} \widehat{a_{11}} - \widetilde{a_{12} a_{21}}\right) - a_{12} \left(b_2 \widehat{a_{11}} - \widetilde{b_1 a_{21}}\right)}{\widehat{a_{11}} \left(a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}\right)} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}}.$$

.

Понятно, что формулы

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$$

имеют смысл, если

$$\Delta = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

.

Полученные формулы полезно записать в несколько ином виде. Введем соответствующие определения и обозначения.

Таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называют ***матрицей второго порядка***. Величину

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

называют ***определителем*** матрицы A. Используют следующие обозначения:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta.$$

В этих обозначениях формулы

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}}$$

принимают вид

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Эти формулы называют ***формулами Крамера***.

Габриэль Крамер (Gabriel Cramer; 1704 — 1752) — швейцарский математик, один из создателей линейной алгебры.

.

Формулы $x_1 = \Delta_1/\Delta$, $x_2 = \Delta_2/\Delta$ не имеют смысла, когда

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

или

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}},$$

т. е. строки определителя пропорциональны:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

.

Если $\Delta = 0$, и при этом

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2},$$

то первое и второе уравнения системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

совпадают, и она имеет бесконечное множество решений.

.

Если $\Delta = 0$, **но**

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2},$$

то первое и второе уравнения системы

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

противоречивы, система *несовместна*, не имеет ни одного решения.

.

<u>Примеры.</u> 1) Определитель матрицы системы

$$x_1 + 2x_2 = 5,$$

$$3x_1 + 4x_2 = 6,$$

равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$$

Система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{20 - 12}{-2} = -4, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6 - 15}{-2} = \frac{9}{2}\,.$$

.

2) Определитель матрицы системы

$$x_1 + 2x_2 = 3,$$

$$2x_1 + 4x_2 = 6,$$

равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

При этом

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4}.$$

Уравнения системы, фактически, совпадают. Система имеет бесчисленное множество решений.

.

3) Система

$$x_1 + 2x_2 = 2,$$

$$2x_1 + 4x_2 = 6,$$

не имеет решений, так как ее определитель равен нулю, но

$$\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}\,.$$

§2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Обратимся к системе трех уравнений с тремя неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

Ее коэффициенты составляют ***матрицу третьего порядка***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Получим формулы для решения системы, вновь используя метод Гаусса.

Поделим обе части уравнения

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

на a_{11}**:**

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

.

Уравнение

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

умножим на a_{21}**:**

$$a_{21}x_1 + a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}.$$

Из уравнения

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

вычтем почленно

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}.$$

Получим

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}\right)x_3 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}.$$

.

Аналогично поступим с уравнением

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

В результате исходная система преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}},\\
\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}\right)x_3 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21},\\
\left(a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31}\right)x_3 = b_3 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{31}.
\end{aligned}
$$

Теперь из второго и третьего уравнений исключим неизвестную x_2 по аналогии с тем, как мы исключали неизвестную x_1 из системы двух уравнений с двумя неизвестными.

.

<u>Упражнение.</u> Вывести равенство

$$x_3 = \frac{b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Знаменатель полученной дроби называют ***определителем*** матрицы A, т. е. по определению

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

.

Заметим, что числитель дроби в правой части

$$x_3 = \frac{b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

аналогичен знаменателю, а именно, множители при определителях второго порядка заменены на b_1, b_2, b_3 соответственно.

Формуле

$$x_3 = \frac{b_1 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

поэтому можно придать вид

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Зная выражение для x_3, из уравнения

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21}\right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21}\right) x_3 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{21}$$

найдем выражение для x_2, а затем при помощи уравнения

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

— для x_1. Можно избежать этих громоздких вычислений, действуя следующим образом.

Запишем исходную систему в виде

$$a_{11}x_1 + a_{13}x_3 + a_{12}x_2 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{22}x_2 = b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{33}x_3 + a_{32}x_2 = b_3.$$

Теперь, фактически, вновь используя формулу

$x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$, имеем $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}}$. Схоже $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{32} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}}$.

.

Полученные формулы имеют смысл, если

$$|A| \neq 0.$$

Полное исследование систем с тремя неизвестными в случае, когда

$$|A| = 0,$$

довольно сложно. Впоследствии мы рассмотрим этот вопрос применительно к системам с произвольным числом переменных.

.

В дальнейшем мы придадим полученным формулам более симметричный вид, но сначала представим определитель в более удобной для дальнейших исследований форме.

.

Вычислим входящие в

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

определители второго порядка, раскроем скобки и соберем вместе слагаемые с одинаковыми знаками. Получим:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для того, чтобы описать закономерность расстановки знаков в этой сумме нам полезно будет ввести некоторые новые понятия и обозначения.

Три целых числа $1, 2, 3$ можно расставить шестью различными способами:

$$123,\ \ 231,\ \ 312,\ \ 321,\ \ 213,\ \ 132.$$

Иначе говоря, из трех чисел, можно составить шесть различных *перестановок*.

.

В дальнейшем будет удобно записывать перестановки в виде

$$n_1 n_2 n_3,$$

подразумевая под n_i одно из чисел

$$1, 2, 3.$$

Причем, конечно, все числа n_1, n_2, n_3 считаются различными.

.

Рассмотрим некоторую конкретную перестановку

$$n_1 n_2 n_3$$

и составим все пары чисел

$$n_i n_j, \quad \text{где} \quad i < j.$$

Понятно, что таких пар всего три:

$$n_1 n_2, \quad n_1 n_3 \quad \text{и} \quad n_2 n_3.$$

Говорят, что пара чисел

$$n_i n_j, \quad \text{где} \quad i < j,$$

образует <u>*инверсию*</u>, если

$$n_i > n_j.$$

.

Каждой перестановке

$$n_1 n_2 n_3$$

соответствует определенное количество инверсий, а именно,

$$0,\ 1,\ 2, \quad \textbf{или} \quad 3.$$

Количество инверсий в перестановке будем обозначать через

$$\sigma(n_1, n_2, n_3).$$

.

Перестановку

$$n_1 n_2 n_3$$

будем называть ***четной***, если ей соответствует четное количество инверсий (нуль считается четным числом). В противном случае перестановка называется ***нечетной***.

.

Первые три из перестановок

$$123,\ 231,\ 312,\ 321,\ 213,\ 132.$$

четные, а остальные нечетные.

.

Каждое слагаемое в выражении определителя

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

имеет вид

$$\pm a_{1n_1}a_{2n_2}a_{3n_3},$$

причем знак плюс ставится в том случае, когда перестановка

$$n_1n_2n_3$$

четная. В противном случае ставится знак минус.

.

Равенство

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

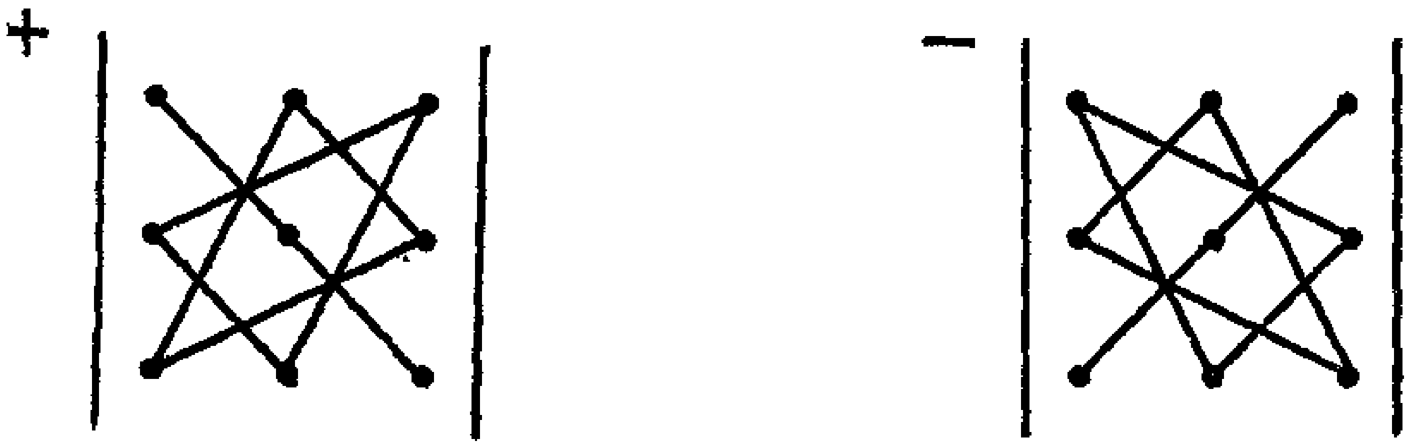
с использованием введенных обозначений можно записать в виде

$$|A| = \sum_{n_1n_2n_3} (-1)^{\sigma(n_1n_2n_3)} a_{1n_1}a_{2n_2}a_{3n_3},$$

где символ

$$\sum_{n_1n_2n_3}$$

означает суммирование, которое распространяется на всевозможные перестановки $n_1n_2n_3$.



Для запоминания способа расстановки знаков в определителе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

полезно использовать схему, представленную на рисунке.

.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 -$$

$$-3 \cdot 5 \cdot 7 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 1 \cdot 8 \cdot 6 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 225 - 225 = 0.$$

§3. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

1. Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется матрицей, *транспонированной* по отношению к

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

.

Определитель не меняется при транспонировании матрицы:

$$|A| = |A^T|,$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{\underline{a_{12}a_{23}a_{31}}} + \underline{\underline{\underline{a_{13}a_{21}a_{32}}}} -$$

$$- \underline{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underline{\underline{a_{12}a_{21}a_{33}}} - \underline{\underline{\underline{a_{11}a_{23}a_{32}}}},$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{\underline{\underline{a_{21}a_{32}a_{13}}}} + \underline{\underline{a_{31}a_{12}a_{23}}} -$$

$$- \underline{a_{31}a_{22}a_{13}} - \underline{\underline{a_{21}a_{12}a_{33}}} - \underline{\underline{\underline{a_{11}a_{32}a_{23}}}}.$$

.

Все дальнейшие свойства определителей формулируются в терминах их строк. По свойству 1 они будут справедливы для столбцов.

.

2. Если все элементы некоторой строки определителя равны нулю,

$$\underline{a_{11}} = \underline{a_{12}} = \underline{a_{13}} = 0,$$

то определитель равен нулю:

$$|A| = \sum_{n_1 n_2 n_3} (-1)^{\sigma(n_1 n_2 n_3)} \underline{a_{1n_1}} a_{2n_2} a_{3n_3} = 0.$$

.

3. Если элементы некоторой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель представляется в виде суммы определителей:

$$\begin{vmatrix} \underline{a_{11}} + \underline{\underline{b_{11}}} & \underline{a_{12}} + \underline{\underline{b_{12}}} & \underline{a_{13}} + \underline{\underline{b_{13}}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{\underline{b_{11}}} & \underline{\underline{b_{12}}} & \underline{\underline{b_{13}}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Действительно,

$$\sum_{n_1 n_2 n_3} (-1)^{\sigma(n_1 n_2 n_3)} (\underline{a_{1n_1}} + \underline{\underline{b_{1n_1}}}) a_{2n_2} a_{3n_3} =$$

$$= \sum_{n_1 n_2 n_3} (-1)^{\sigma(n_1 n_2 n_3)} \underline{a_{1n_1}} a_{2n_2} a_{3n_3} +$$

$$+ \sum_{n_1 n_2 n_3} (-1)^{\sigma(n_1 n_2 n_3)} \underline{\underline{b_{1n_1}}} a_{2n_2} a_{3n_3}.$$

Аналогично доказывается, что общий множителей элементов строки можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} \underline{\underline{\alpha}} a_{11} & \underline{\underline{\alpha}} a_{12} & \underline{\underline{\alpha}} a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{\underline{\alpha}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

.

Следовательно, определитель <u>*линеен*</u> по каждой строке:

$$\begin{vmatrix} \underline{\alpha a_{11}} + \underline{\underline{\beta b_{11}}} & \underline{\alpha a_{12}} + \underline{\underline{\beta b_{12}}} & \underline{\alpha a_{13}} + \underline{\underline{\beta b_{13}}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{\alpha} \begin{vmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \underline{\underline{\beta}} \begin{vmatrix} \underline{\underline{b_{11}}} & \underline{\underline{b_{12}}} & \underline{\underline{b_{13}}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

.

4. Если в определителе две строки совпадают, то он равен нулю:

$$|A| = \begin{vmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{\underline{a_{12}}} & \underline{\underline{\underline{a_{13}}}} \\ \underline{a_{21}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \underline{\underline{\underline{a_{23}}}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

.

Действительно, пусть первая и вторая строки совпадают:

$$\underline{a_{21}} = \underline{a_{11}}, \quad \underline{\underline{a_{22}}} = \underline{\underline{a_{12}}}, \quad \underline{\underline{\underline{a_{23}}}} = \underline{\underline{\underline{a_{13}}}}.$$

Заменим все элементы второй строки элементами первой:

$$|A| = a_{11}\underline{\underline{a_{22}}}a_{33} + a_{12}\underline{\underline{\underline{a_{23}}}}a_{31} + a_{13}\underline{a_{21}}a_{32} -$$

$$-a_{13}\underline{\underline{a_{22}}}a_{31} - a_{12}\underline{a_{21}}a_{33} - a_{11}\underline{\underline{\underline{a_{23}}}}a_{32} =$$

$$= a_{11}\underline{\underline{a_{12}}}a_{33} + a_{12}\underline{\underline{\underline{a_{13}}}}a_{31} + a_{13}\underline{a_{11}}a_{32} -$$

$$-a_{13}\underline{\underline{a_{12}}}a_{31} - a_{12}\underline{a_{11}}a_{33} - a_{11}\underline{\underline{\underline{a_{13}}}}a_{32}.$$

Тогда каждому положительному слагаемому равно отрицательное:

$$|A| = \underline{a_{11}a_{12}a_{33}} + \underline{\underline{a_{12}a_{13}a_{31}}} + \underline{\underline{\underline{a_{13}a_{11}a_{32}}}} -$$

$$-\underline{\underline{a_{13}a_{12}a_{31}}} - \underline{a_{12}a_{11}a_{33}} - \underline{\underline{\underline{a_{11}a_{13}a_{32}}}} = 0.$$

.

5. Если в определителе поменять местами две строки, то знак его изменится на противоположный:

$$\begin{vmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \underline{a_{13}} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \underline{\underline{a_{23}}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \underline{\underline{a_{23}}} \\ \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \underline{a_{13}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

.

Действительно, в силу свойства 4

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

.

Теперь применим свойство 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вследствие свойства 4 первое и последнее слагаемые суммы

$$0 = \underline{\underline{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \underline{\underline{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}}$$

равны нулю, поэтому

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

т. е. равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

справедливо.

Как записать первые две формулы аналогично третьей

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{32} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_3}{\Delta} \ ?$$

.

Переставим одновременно столбцы в числителе и знаменателе:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{32} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & b_1 & a_{13} \\ a_{22} & b_2 & a_{23} \\ a_{32} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Аналогично, переставим столбцы в числителе и знаменателе:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Формулы, дающие решение системы

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2,\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3,
\end{aligned}
$$

называют ***формулами Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Здесь

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

6. Определитель не изменится, если к некоторой его строке добавить другую строку, умноженную на произвольное число:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{21} & a_{12}+\alpha a_{22} & a_{13}+\alpha a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Получим необходимое и достаточное условие равенства

$$|A| = 0.$$

.

Будем говорить, что строки определителя ***линейно зависимы***, если существуют числа α, β, γ, не все равные нулю, такие, что

$$
\begin{array}{ccc}
\alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\
+ & + & + \\
\beta a_{21} & \beta a_{22} & \beta a_{23} \\
+ & + & + \\
\gamma a_{31} & \gamma a_{32} & \gamma a_{33} \\
= & = & = \\
0 & 0 & 0
\end{array}
$$

.

Покажем, что

$$|A| = 0$$

тогда и только тогда, когда

строки $|A|$ линейно зависимы.

Пусть строки $|A|$ линейно зависимы. Равенства

$$\begin{array}{ccc} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ + & + & + \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \beta a_{23} \\ + & + & + \\ \gamma a_{31} & \gamma a_{32} & \gamma a_{33} \\ = & = & = \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

запишем короче

$$\alpha a_{1j} + \beta a_{2j} + \gamma a_{3j} = 0, \quad j = 1,\, 2,\, 3.$$

.

Пусть

$$\alpha \neq 0, \quad c_1 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad c_2 = -\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Тогда из

$$\alpha a_{1j} + \beta a_{2j} + \gamma a_{3j} = 0, \quad j = 1,\ 2,\ 3,$$

имеем

$$a_{1j} = c_1 a_{2j} + c_2 a_{3j}, \quad j = 1,\ 2,\ 3.$$

.

Равенства

$$a_{1j} = c_1 a_{2j} + c_2 a_{3j}, \quad j = 1,\, 2,\, 3,$$

означают, что 1-я строка есть ***линейная комбинация*** 2-ой и 3-ей:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ = & = & = \\ c_1 a_{21} & c_1 a_{22} & c_1 a_{23} \\ + & + & + \\ c_2 a_{31} & c_2 a_{32} & c_2 a_{33} \end{array}$$

.

Из

$$a_{11} = c_1 a_{21} + c_2 a_{31}, \quad a_{12} = c_1 a_{22} + c_2 a_{32}, \quad a_{13} = c_1 a_{23} + c_2 a_{33}$$

следует

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - c_1 a_{21} & a_{12} - c_1 a_{22} & a_{13} - c_1 a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - c_1 a_{21} - c_2 a_{31} & a_{12} - c_1 a_{22} - c_2 a_{32} & a_{13} - c_1 a_{23} - c_2 a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

.

Наоборот. Пусть не все элементы определителя равны нулю, но

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Докажем, что его строки линейно зависимы.

Рассмотрим все определители второго порядка, получающиеся из

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

вычеркиванием одного столбца и одной строки, например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Возможны два случая:

1) все определители второго порядка равны нулю,

2) хотя бы один из них отличен от нуля.

Рассмотрим второй случай. Первый рассматривается аналогично, причем рассуждения оказываются более простыми.

.

Пусть для определенности

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \neq 0,$$

иначе придется переставить строки и столбцы определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

.

Из

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

следует

$$a_{13} = c_1 a_{23} + c_2 a_{33},$$

где

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}, \quad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}.$$

.

Далее, определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = 0,$$

так как у него два последних столбца совпадают. Поэтому из

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

получим как и раньше, что

$$a_{12} = c_1 a_{22} + c_2 a_{32}.$$

.

Наконец, рассматривая нулевой определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = 0,$$

получим, что

$$a_{11} = c_1 a_{21} + c_2 a_{31}.$$

.

Таким образом, первая строка определителя — линейная комбинация второй и третьей строк:

$$
\begin{array}{ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
= & = & = \\
c_1 a_{21} & c_1 a_{22} & c_1 a_{23} \\
+ & + & + \\
c_2 a_{31} & c_2 a_{32} & c_2 a_{33}
\end{array}
$$

Итак, определитель $|A|$ равен нулю тогда и только тогда, когда его строки линейно зависимы.

.

8. Получим формулу разложения определителя по строке.

.

Используя свойство 3, запишем следующие равенства:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

.

Обозначив через A_{1j} множители при соответствующих элементах первой строки определителя

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

можем написать

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

.

Преобразуем определитель:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

.

Аналогично,

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

.

Кроме того,

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

.

Определители

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

называют ***алгебраическими дополнениями*** элементов a_{11}, a_{12}, a_{13}.

.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

получается заменой в $|A|$ элемента a_{ij} единицей, всех остальных элементов i-той строки и j-того столбца нулями.

<u>Минор</u> M_{ij} элемента a_{ij} определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

есть определитель второго порядка, получающийся из $|A|$ вычеркиванием i-той строки и j-того столбца:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

.

Установим связь между алгебраическим дополнениями и минорами. Меняя местами первый и второй столбец, получим, что

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

.

Аналогично, выполняя две перестановки столбцов и потому не меняя знака, получим, что

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

.

Понятно, что достаточно научиться вычислять определитель

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

.

Вычислим два определителя и убедимся, что они равны:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{11}.$$

.

Вследствие

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

будем иметь

$$A_{12} = -M_{12}, \qquad A_{13} = M_{13}.$$

.

Формуле

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

можно придать вид

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Нетрудно сообразить, что справедливы общие формулы

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3},$$

$$|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3},$$

разложения определителя по i-той строке, где $i = 1, 2, 3$.

.

Справедлива формула <u>*разложения определителя по столбцу*</u>:

$$|A| = a_{1i}(-1)^{i+1}M_{1i} + a_{2i}(-1)^{i+2}M_{2i} + a_{3i}(-1)^{i+3}M_{3i}, \quad i = 1,\, 2,\, 3.$$

.

<u>Пример.</u> **Разложим определитель по первому столбцу:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 - 4(-6) + 7(-3) = 0.$$

.

Тот же определитель вычислим разложением по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -4(-6) + 5(-12) - 6(-6) = 0.$$

.

Используем свойство 6 для вычисления того же определителя. Умножим первый столбец на два и вычтем из второго столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & -6 & 9 \end{vmatrix}.$$

.

Умножим первый столбец на три и вычтем из третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 6 \\ 7 & -6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix}.$$

.

Разложим последний определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0.$$

.

Отметим в заключение, что на формулу

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

которую мы использовали для определения $|A|$, можно смотреть теперь, как на разложение определителя по третьему столбцу.

.

9. Пусть $i \neq k$. Тогда

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i2}A_{k2} = 0.$$

Действительно, выражение в левой части этого равенства можно интерпретировать, как разложение определителя по k-той строке, которая состоит из элементов i-той строки. Определитель с двумя равными строками равен нулю.

Соотношениям

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = |A|,$$

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i2}A_{k2} = 0$$

полезно придать общую форму

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + a_{i2}A_{k2} = |A|\delta_{ik},$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, \ i \neq k, \\ 1, \ i = k, \end{cases}$$

так называемый *символ Кронекера*.

Леопольд Кронекер (Leopold Kronecker; 1823 — 1891) — немецкий математик.