Л. Р. Кутдусова, Л. И. Нуркаева, Е. Р. Садыкова

Казанский (Приволжский) федеральный университет

«Признаки равенства треугольников» в геометрии Н.И. Лобачевского и Евклида

В современных школьных учебниках геометрии 7-9 классов в качестве основного рабочего аппарата используются признаки равенства треугольников. Благодаря применению признаков равенства треугольников легче усваиваются основные теоремы планиметрии. Все признаки равенства треугольников, имеющие место быть в геометрии Евклида, также верны и в геометрии Лобачевского. Возможно ли, что признак равенства треугольников по трём сторонам, существующий только в геометрии Лобачевского, верен в геометрии Евклида?

Рассмотрим этот признак в абсолютной геометрии. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$. Докажем, что данные треугольники равны.

Доказательство.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то вершина A совпадёт с вершиной A_1 при этом совместятся лучи AC с A_1C_1 и AB и A_1B_1. Но так как мы не знаем равны ли отрезки AB и A_1B_1, то нельзя утверждать, что вершина B совпадёт с вершиной B_1, следовательно в данном случае невозможно утверждать, что треугольники равны. Значит, теорема не верна.

Почему же в геометрии Лобачевского этот признак удаётся доказать? Рассмотрим основные положения, благодаря которым удалось доказать истинность данного признака.

Гиперболическая геометрия Лобачевского построена на аксиоме, являющейся отрицанием аксиомы параллельных прямых в евклидовой геометрии. В этой аксиоме говорится о том, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не менее двух прямых, не пересекающих данную. Из этого вытекает ряд замечательных теорем. Некоторые из них связаны с понятием дефекта треугольника. Дефект треугольника – это число равное разности 2d и суммы мер углов данного треугольника. В евклидовой геометрии дефект любого треугольника равен нулю, в геометрии Лобачевского дефект любого треугольника – положительное число. Благодаря этому, можно доказать теоремы, которые используются в доказательстве признака равенства треугольников по трём углам. Таким образом, признак равенства треугольников по трём углам в геометрии Лобачевского возможен благодаря аксиоме о параллельных, отличной от V постулата Евклида.

С помощью признака равенства треугольников по трём углам можно решать разнообразные задачи, а также доказать ещё некоторые признаки равенства треугольников в геометрии Лобачевского.

Приведем доказательство одного из таких признаков.

Задача. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $\angle B = \angle B_1, \angle BAM = \angle B_1A_1M_1, \angle CMA = \angle C_1M_1A_1$ где AM и A_1M_1 – медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

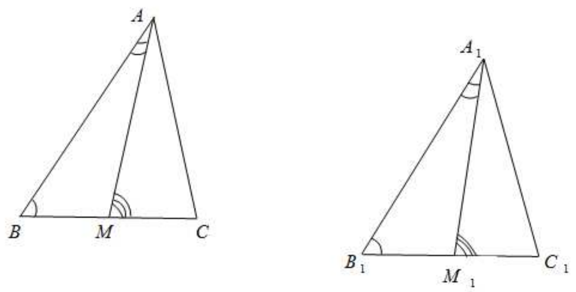

Рис.1

Доказательство.

Так как $\angle CMA = \angle C_1M_1A_1$ то смежные с ними углы равны: $\angle BMA = \angle B_1M_1A_1$. Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по трём углам, поэтому $AB{=}A_1B_1$, $BM = B_1M_1$. Из второго равенства следует, что $BC = B_1C_1$. Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников: $BA = B_1A_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. Теорема доказана.

Таким образом, наша исследовательская работа позволяет сделать вывод, что при использовании признаков равенства треугольников на плоскости возможность решения более трудных задач станет намного эффективнее.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Атанасян Л. С. *Геометрия Лобачевского.* – М.:Просвещение, 2002.

2. Погорелов А. В. *Геометрия: Учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. Учреждений.* – М.:Просвещение, 2002.