Дорогие студенты, вы зашли в так называемую "Виртуальную аудиторию," в которой к каждому понедельнику я буду заносить материал новых лекций. Если у вас возникают какие-либо вопросы, то вы можете присылать их мне по электронной почте

volodinstudent@gmail.com

На ваши вопросы я буду отвечать вам reply'ем. В конце текста каждой лекции будут предложены задания, которые вам следует выполнить и выслать мне по почте (или, по крайней мере, сообщать, что вы "на проводе"). О том, как их выполнить я могу вам рассказать в Виртуальной Аудитории, если нажмете на слово Форум и напишите ваши вопросы.

Пока, в ближайшее время, студентам открыт доступ в университет, так что вы можете приходить ко мне (ауд. 1205) в часы ваших занятий по расписанию для консультаций.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Лекция 3

Пуассоновские вероятностные модели

Распределение Пуассона $\mathrm{P}(\lambda)$. При исследовании интенсивности радиоизлучения обычно регистрируется число x атомов радиоактивного элемента, распавшихся за единицу времени. Повторные наблюдения указывают на значительную изменчивость числа распавшихся атомов, и поэтому проблема стабильного, не зависящего от случайных флуктуаций, показателя интенсивности излучения должна решаться в рамках теории вероятностей.

Пусть ξ – случайная величина, которая наблюдается в эксперименте, n – число атомов, из которых состоит образец исследуемого радиоактивного элемента, p – вероятность, с которой возможен распад любого из атомов образца за время наблюдения. Существующая теория радиоактивного излучения утверждает, что атомы распадаются независимо друг от друга, и поэтому результат x, который фиксирует счетчик распавшихся атомов, можно трактовать как реализацию случайной величины ξ с биномиальным законом $\mathrm{B}(n,p)$ распределения вероятностей. Легко понять, что расчет вероятностей исходов эксперимента по формуле

$$P(\xi = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

вряд ли возможен из-за непреодолимых технических сложностей, вызванных огромным значением n и ничтожно малым значением p. Поэтому возникает математическая проблема асимптотики биномиальных вероятностей, когда $n \to \infty$ и одновременно $p \to 0$. Решение проблемы дает

Предложение 5.1. *Если* $n \to \infty,\ p \to 0$ *и при этом* $np = \lambda$ $(= \mathrm{const})$, то

$$P\{\xi = x \,|\, n, p\} \longrightarrow \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

Доказательство. Предельное значение биномиальных вероятностей легко получить, если представить их в виде

$$P\{\xi = x \,|\, n, p\} = \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\frac{\lambda^x}{x!}$$

и воспользоваться замечательным пределом

$$(1-\lambda/n)^n \to e^{-\lambda}.$$

Этот асимптотический результат впервые был получен Пуассоном, и поэтому распределение вероятностей

$$P(\xi = x \,|\, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\ \ x = 0,\, 1, \ldots, \tag{1}$$

называется *распределением Пуассона* и обозначается $\mathrm{P}(\lambda)$. Правая часть (1) представляет ненулевые значения функции плотности
$f(x \,|\, \lambda)$ распределения Пуассона, λ (> 0) называется параметром *интенсивности потока Пуассона* – в терминах задачи с радиоактивным распадом λ равно среднему числу атомов, распавшихся за единицу времени. Функция распределения Пуассона равна нулю на отрицательной полуоси, а на положительной возрастает скачками в целочисленных точках $x = 0,\, 1, \ldots,$ величина которых равна правой части (1).

Трудно переоценить значимость закона Пуассона в различных проблемах естествознания. Это распределение используется при исследовании числа несчастных случаев на предприятиях, числа вызовов на телефонной станции; этому закону подчиняются метеорные явления, потоки транспорта, размеры очередей систем обслуживания и пр.

Функция плотности случайной выборки $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_1$ из распределения Пуассона имеет вид функция плотности выборки

$$f_n(x^{(n)} \,|\, \lambda) = \lambda^{\sum_1^n x_k}\, \mathrm{e}^{-n\lambda} \,/\, \prod\nolimits_1^n x_k!.$$

Следовательно, в силу теоремы факторизации Неймана статистика $T = \sum_1^n X_k$ является достаточной.

Эффективной оценкой параметра λ, то есть оценкой. на которой достигается нижняя граница Рао–Крамера для дисперсии несмещенной оценки, служит выборочное среднее $\overline{X}$. Эту оценку можно получить используя как метод моментов, так и метод максимального правдоподобия.

Для параметра интенсивности λ распределения Пуассона можно строить равномерно наиболее мощные критерии проверки односторонних гипотез, а также доверительный интервал. Напомним, что для распределения Пуассона справедлива теорема сложения: $n\overline{X} \sim \mathrm{P}(n\lambda)$, и на основе этого можно построить точные доверительные пределы для λ. Однако оценка $\overline{X}$ асимптотически нормальна $(\lambda,\, \lambda/n)$, что позволяет определить асимптотически доверительную область

$$\Delta_n = \{\lambda :\ \lambda > 0,\, |\,\overline{X} - \lambda\,| \le \lambda_\alpha \sqrt{\overline{X}/n}\},$$

где $\lambda_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$. Решение неравенств в фигурных скобках относительно λ дает асимптотически доверительный интервал

$$\overline{X} + \frac{\lambda_\alpha^2}{2n} \pm \lambda_\alpha \sqrt{\frac{\overline{X}}{n} + \frac{\lambda_\alpha^2}{4n^2}}\,.$$

Наконец, заменяя $\sigma^2(\theta) = \theta$ ее оценкой $\overline{X}$, получаем также асимптотически доверительный, но, как показывают числовые расчеты, менее точный интервал $\overline{X} \pm \lambda_\alpha \sqrt{\overline{X}/n}\,$.

Контрольные вопросы.

1. Укажите параметры асимптотической нормальности оценки $\overline{X}$ параметра λ.

2. Используя асимптотическую нормальность $\overline{X}$ постройте асимптотический критерий уровня α проверки нулевой гипотезы $H_0 : \lambda > \lambda_0$ при альтернативе $H_1 :\ \lambda \le \lambda_0$. Объясните, почему в качестве нулевой гипотезу следует брать $\lambda > \lambda_0$, если по существу проверяется радиоактивная безопастность тестируемого препарата.

3*. Используя асимптотическую нормальность $\overline{X}$, найдите асимптотическую функцию мощности критерия $\overline{X} < C$ и выпишите формулу для определения критической константы C по заданному уровню значимости α.