Математические модели теоретической физики

(математика и компьютерные науки)

Математические основы физики

(математика и информатика)

профессор Игнатьев Юрий Геннадиевич

Казанский федеральный университет
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Казань, VI-VII семестр, 2015 г.

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Лекция XVIII: Горячая модель Вселенной Георгия Гамова

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Содержание лекции

- Локальное термодинамическое равновесие
- Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры
- Законы сохранения и эволюция температуры
- Ферми и Бозе газы элементарных частиц

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVIII. Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной (Lection17.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf)

Информация

- Георгий Антонович Гамов (Джордж); 20 февраля (4 марта) 1904, Одесса, Россия; — 19 августа 1968, Боулдер, США) — русский, советский физик - теоретик, астрофизик, основоположник теории эволюции звезд (1934 – 1946), создатель горячей модели Вселенной, космологического и астрофизического синтеза элементов, предсказал реликтовое излучение (1946 – 1956). В 1954 г. Гамов поставил проблему генетического кода: наследственная информация должна быть зашифрована в последовательности из четырёх возможных нуклеотидов, входящих в состав молекулы ДНК. Он был первым, кто предположил кодирование аминокислотных остатков триплетами нуклеотидов.
Советский физик-теоретик Лев Ландау так охарактеризовал его (1932): «необходимо избрать Джони Гамова академиком. Ведь он бесспорно лучший теоретик СССР».

Лекция XVIII: Горячая модель Вселенной Георгия Гамова

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Содержание лекции

- Локальное термодинамическое равновесие
- Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры
- Законы сохранения и эволюция температуры
- Ферми и Бозе газы элементарных частиц

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVIII. Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной (Lection17.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf)

Информация

- Георгий Антонович Гамов (Джордж); 20 февраля (4 марта) 1904, Одесса, Россия; — 19 августа 1968, Боулдер, США) — русский, советский физик - теоретик, астрофизик, основоположник теории эволюции звезд (1934 – 1946), создатель горячей модели Вселенной, космологического и астрофизического синтеза элементов, предсказал реликтовое излучение (1946 – 1956). В 1954 г. Гамов поставил проблему генетического кода: наследственная информация должна быть зашифрована в последовательности из четырёх возможных нуклеотидов, входящих в состав молекулы ДНК. Он был первым, кто предположил кодирование аминокислотных остатков триплетами нуклеотидов.
Советский физик-теоретик Лев Ландау так охарактеризовал его (1932): «необходимо избрать Джони Гамова академиком. Ведь он бесспорно лучший теоретик СССР».

Лекция XVIII: Горячая модель Вселенной Георгия Гамова

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Содержание лекции

- Локальное термодинамическое равновесие
- Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры
- Законы сохранения и эволюция температуры
- Ферми и Бозе газы элементарных частиц

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVIII. Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной (Lection17.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf)

Информация

- Георгий Антонович Гамов (Джордж); 20 февраля (4 марта) 1904, Одесса, Россия; — 19 августа 1968, Боулдер, США) — русский, советский физик - теоретик, астрофизик, основоположник теории эволюции звезд (1934 – 1946), создатель горячей модели Вселенной, космологического и астрофизического синтеза элементов, предсказал реликтовое излучение (1946 – 1956). В 1954 г. Гамов поставил проблему генетического кода: наследственная информация должна быть зашифрована в последовательности из четырёх возможных нуклеотидов, входящих в состав молекулы ДНК. Он был первым, кто предположил кодирование аминокислотных остатков триплетами нуклеотидов.
Советский физик-теоретик Лев Ландау так охарактеризовал его (1932): «необходимо избрать Джони Гамова академиком. Ведь он бесспорно лучший теоретик СССР».

Лекция XVIII: Горячая модель Вселенной Георгия Гамова

Содержание лекции

- Локальное термодинамическое равновесие
- Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры
- Законы сохранения и эволюция температуры
- Ферми и Бозе газы элементарных частиц

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVIII. Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной (Lection17.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf)

Информация

- Георгий Антонович Гамов (Джордж); 20 февраля (4 марта) 1904, Одесса, Россия; — 19 августа 1968, Боулдер, США) — русский, советский физик - теоретик, астрофизик, основоположник теории эволюции звезд (1934 – 1946), создатель горячей модели Вселенной, космологического и астрофизического синтеза элементов, предсказал реликтовое излучение (1946 – 1956). В 1954 г. Гамов поставил проблему генетического кода: наследственная информация должна быть зашифрована в последовательности из четырёх возможных нуклеотидов, входящих в состав молекулы ДНК. Он был первым, кто предположил кодирование аминокислотных остатков триплетами нуклеотидов.
  Советский физик-теоретик Лев Ландау так охарактеризовал его (1932): «необходимо избрать Джони Гамова академиком. Ведь он бесспорно лучший теоретик СССР».

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Лекция XVIII: Горячая модель Вселенной Георгия Гамова

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Содержание лекции

- Локальное термодинамическое равновесие
- Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры
- Законы сохранения и эволюция температуры
- Ферми и Бозе газы элементарных частиц

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVIII. Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной (Lection17.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf)

Информация

- Георгий Антонович Гамов (Джордж); 20 февраля (4 марта) 1904, Одесса, Россия; — 19 августа 1968, Боулдер, США) — русский, советский физик - теоретик, астрофизик, основоположник теории эволюции звезд (1934 – 1946), создатель горячей модели Вселенной, космологического и астрофизического синтеза элементов, предсказал реликтовое излучение (1946 – 1956). В 1954 г. Гамов поставил проблему генетического кода: наследственная информация должна быть зашифрована в последовательности из четырёх возможных нуклеотидов, входящих в состав молекулы ДНК. Он был первым, кто предположил кодирование аминокислотных остатков триплетами нуклеотидов.
Советский физик-теоретик Лев Ландау так охарактеризовал его (1932): «необходимо избрать Джони Гамова академиком. Ведь он бесспорно лучший теоретик СССР».

Лекция XVIII: Горячая модель Вселенной Георгия Гамова

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Содержание лекции

- Локальное термодинамическое равновесие
- Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры
- Законы сохранения и эволюция температуры
- Ферми и Бозе газы элементарных частиц

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVIII. Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной (Lection17.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf)

Информация

- Георгий Антонович Гамов (Джордж); 20 февраля (4 марта) 1904, Одесса, Россия; — 19 августа 1968, Боулдер, США) — русский, советский физик - теоретик, астрофизик, основоположник теории эволюции звезд (1934 – 1946), создатель горячей модели Вселенной, космологического и астрофизического синтеза элементов, предсказал реликтовое излучение (1946 – 1956). В 1954 г. Гамов поставил проблему генетического кода: наследственная информация должна быть зашифрована в последовательности из четырёх возможных нуклеотидов, входящих в состав молекулы ДНК. Он был первым, кто предположил кодирование аминокислотных остатков триплетами нуклеотидов.
Советский физик-теоретик Лев Ландау так охарактеризовал его (1932): «необходимо избрать Джони Гамова академиком. Ведь он бесспорно лучший теоретик СССР».

Лекция XVIII: Горячая модель Вселенной Георгия Гамова

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Содержание лекции

- Локальное термодинамическое равновесие
- Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры
- Законы сохранения и эволюция температуры
- Ферми и Бозе газы элементарных частиц

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVIII. Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной (Lection17.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf)

Информация

- Георгий Антонович Гамов (Джордж); 20 февраля (4 марта) 1904, Одесса, Россия; — 19 августа 1968, Боулдер, США) — русский, советский физик - теоретик, астрофизик, основоположник теории эволюции звезд (1934 – 1946), создатель горячей модели Вселенной, космологического и астрофизического синтеза элементов, предсказал реликтовое излучение (1946 – 1956). В 1954 г. Гамов поставил проблему генетического кода: наследственная информация должна быть зашифрована в последовательности из четырёх возможных нуклеотидов, входящих в состав молекулы ДНК. Он был первым, кто предположил кодирование аминокислотных остатков триплетами нуклеотидов.
Советский физик-теоретик Лев Ландау так охарактеризовал его (1932): «необходимо избрать Джони Гамова академиком. Ведь он бесспорно лучший теоретик СССР».

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Лекция XVIII: Горячая модель Вселенной Георгия Гамова

Содержание лекции

- Локальное термодинамическое равновесие
- Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры
- Законы сохранения и эволюция температуры
- Ферми и Бозе газы элементарных частиц

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVIII. Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной (Lection17.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf)

Информация

- Георгий Антонович Гамов (Джордж); 20 февраля (4 марта) 1904, Одесса, Россия; — 19 августа 1968, Боулдер, США) — русский, советский физик - теоретик, астрофизик, основоположник теории эволюции звезд (1934 – 1946), создатель горячей модели Вселенной, космологического и астрофизического синтеза элементов, предсказал реликтовое излучение (1946 – 1956). В 1954 г. Гамов поставил проблему генетического кода: наследственная информация должна быть зашифрована в последовательности из четырёх возможных нуклеотидов, входящих в состав молекулы ДНК. Он был первым, кто предположил кодирование аминокислотных остатков триплетами нуклеотидов.
Советский физик-теоретик Лев Ландау так охарактеризовал его (1932): «необходимо избрать Джони Гамова академиком. Ведь он бесспорно лучший теоретик СССР».

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Лекция XVIII: Горячая модель Вселенной Георгия Гамова

Содержание лекции

- Локальное термодинамическое равновесие
- Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры
- Законы сохранения и эволюция температуры
- Ферми и Бозе газы элементарных частиц

Литература

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том II. Теория поля. М: Наука – любое издание, начиная с 1973 г.
2. Дж. Синг. Общая теория относительности. М: Наука – любое издание, начиная с 1963 г.
3. Игнатьев Ю.Г. Математические модели теоретической физики. Лекция XVIII. Теория Фридмана изотропной однородной Вселенной (Lection17.pdf) ; Лекция XVII. Сферически - симметричные гравитационные поля (Lection16.pdf)

Информация

- Георгий Антонович Гамов (Джордж); 20 февраля (4 марта) 1904, Одесса, Россия; — 19 августа 1968, Боулдер, США) — русский, советский физик - теоретик, астрофизик, основоположник теории эволюции звезд (1934 – 1946), создатель горячей модели Вселенной, космологического и астрофизического синтеза элементов, предсказал реликтовое излучение (1946 – 1956). В 1954 г. Гамов поставил проблему генетического кода: наследственная информация должна быть зашифрована в последовательности из четырёх возможных нуклеотидов, входящих в состав молекулы ДНК. Он был первым, кто предположил кодирование аминокислотных остатков триплетами нуклеотидов.
  Советский физик-теоретик Лев Ландау так охарактеризовал его (1932): «необходимо избрать Джони Гамова академиком. Ведь он бесспорно лучший теоретик СССР».

Локальное термодинамическое равновесие

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Вернемся к закону сохранения энергии (20) лекции XVIII ($d/dt \equiv d/da\dot{a}$):

$$\frac{d}{da}\varepsilon + \frac{3}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\ln a}\varepsilon + 3(\varepsilon + P) = 0. \qquad (1)$$

- Предположим, что Вселенная заполнена газом частиц с массой покоя m, находящемся в термодинамическом равновесии с температурой $T(t)$. Равновесное изотропное распределение Максвелла - Больцмана частиц газа есть [1]:

$$f_0(t,p) = A(t)\exp\left(-\frac{p_4}{T(t)}\right),$$

где $A(t)$ – некоторая нормировочная функция.

- Моменты функции этой распределения имеют следующее значение:

$$n^i(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i f_0(t,p), \quad T^i_k(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i p_k f_0(t,p). \qquad (3)$$

- Вследствие изотропии трехмерного пространства в четырехмерном пространстве-времени Фридмана имеется лишь одно выделенное направление $u^i = \delta^i_4$, и один симметричный тензор g_{ik} (δ^i_k). Поэтому моменты (3) могут иметь лишь следующую алгебраическую структуру:

$$n^i = a\delta^i_4, \quad T^i_k = a\delta^i_4\delta^4_k + b\delta^i_k.$$

Тензор T^i_k имеет структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости. Поэтому из сравнения их найдем: $a = \varepsilon + P$, $b = -P$. Таким образом, найдем: $\varepsilon = T^4_4$, $T^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta P$, $P = -1/3T^\alpha_\alpha$.

[1] *Мы выбираем универсальную систему единиц: $G = \hbar = c = k = 1$, k – постоянная Больцмана.*

Локальное термодинамическое равновесие

- Вернемся к закону сохранения энергии (20) лекции XVIII ($d/dt \equiv d/da\dot{a}$):

$$\frac{d}{da}\varepsilon + \frac{3}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\ln a}\varepsilon + 3(\varepsilon + P) = 0. \quad (1)$$

- Предположим, что Вселенная заполнена газом частиц с массой покоя m, находящемся в термодинамическом равновесии с температурой $T(t)$. Равновесное изотропное распределение Максвелла - Больцмана частиц газа есть [1]:

$$f_0(t,p) = A(t)\exp\left(-\frac{p_4}{T(t)}\right), \quad (2)$$

где $A(t)$ – некоторая нормировочная функция.

- Моменты функции этой распределения имеют следующее значение:

$$n^i(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i f_0(t,p), \quad T^i_k(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i p_k f_0(t,p). \quad (3)$$

- Вследствие изотропии трехмерного пространства в четырехмерном пространстве-времени Фридмана имеется лишь одно выделенное направление $u^i = \delta^i_4$, и один симметричный тензор g_{ik} (δ^i_k). Поэтому моменты (3) могут иметь лишь следующую алгебраическую структуру:

$$n^i = a\delta^i_4, \quad T^i_k = a\delta^i_4\delta_{4k} + b\delta^i_k. \quad (4)$$

Тензор T^i_k имеет структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости. Поэтому из сравнения их найдем: $a = \varepsilon + P$, $b = -P$. Таким образом, найдем: $\varepsilon = T^4_4$, $T^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta P$, $P = -1/3T^\alpha_\alpha$.

[1] *Мы выбираем универсальную систему единиц: $G = \hbar = c = k = 1$, k – постоянная Больцмана.*

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Локальное термодинамическое равновесие

- Вернемся к закону сохранения энергии (20) лекции XVIII ($d/dt \equiv d/da\dot{a}$):
$$\frac{d}{da}\varepsilon + \frac{3}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\ln a}\varepsilon + 3(\varepsilon + P) = 0. \quad (1)$$
- Предположим, что Вселенная заполнена газом частиц с массой покоя m, находящемся в термодинамическом равновесии с температурой $T(t)$. Равновесное изотропное распределение Максвелла - Больцмана частиц газа есть [1]:
$$f_0(t,p) = A(t)e^{-\frac{p_4}{T(t)}} = A(t)e^{-\frac{\sqrt{m^2+p^2}}{T(t)}}, \quad (2)$$
где $A(t)$ – некоторая нормировочная функция.
- Моменты функции этой распределения имеют следующее значение:
$$n^i(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i f_0(t,p), \quad T^i_k(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i p_k f_0(t,p). \quad (3)$$
- Вследствие изотропии трехмерного пространства в четырехмерном пространстве-времени Фридмана имеется лишь одно выделенное направление $u^i = \delta^i_4$, и один симметричный тензор g_{ik} (δ^i_k). Поэтому моменты (3) могут иметь лишь следующую алгебраическую структуру:
$$T^i_k = a\delta^i_k + b\delta^i_4\delta^4_k.$$
Тензор T^i_k имеет структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости. Поэтому из сравнения их найдем: $a = \varepsilon + P$, $b = -P$. Таким образом, найдем: $\varepsilon = T^4_4$, $T^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta P$, $P = -1/3T^\alpha_\alpha$.

[1] *Мы выбираем универсальную систему единиц: $G = \hbar = c = k = 1$, k – постоянная Больцмана.*

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Локальное термодинамическое равновесие

- Вернемся к закону сохранения энергии (20) лекции XVIII ($d/dt \equiv d/da\dot{a}$):
$$\frac{d}{da}\varepsilon + \frac{3}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\ln a}\varepsilon + 3(\varepsilon + P) = 0. \quad (1)$$
- Предположим, что Вселенная заполнена газом частиц с массой покоя m, находящемся в термодинамическом равновесии с температурой $T(t)$. Равновесное изотропное распределение Максвелла - Больцмана частиц газа есть [1]:
$$f_0(t,p) = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{p_4}{T(t)}} = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{m^2+p^2}}{T(t)}}, \quad (2)$$
где $A(t)$ – некоторая нормировочная функция.
- Моменты функции этой распределения имеют следующее значение:
$$n^i(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i f_0(t,p), \quad T^i_k(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i p_k f_0(t,p). \quad (3)$$
- Вследствие изотропии трехмерного пространства в четырехмерном пространстве-времени Фридмана имеется лишь одно выделенное направление $u^i = \delta^i_4$, и один симметричный тензор g_{ik} (δ^i_k). Поэтому моменты (3) могут иметь лишь следующую алгебраическую структуру:
$$T^i_k = a\delta^i_k + b\delta^i_4\delta^4_k.$$
Тензор T^i_k имеет структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости. Поэтому из сравнения их найдем: $a = \varepsilon + P$, $b = -P$. Таким образом, найдем: $\varepsilon = T^4_4$, $T^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta P$, $P = -1/3T^\alpha_\alpha$.

[1] *Мы выбираем универсальную систему единиц: $G = \hbar = c = k = 1$, k – постоянная Больцмана.*

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Локальное термодинамическое равновесие

- Вернемся к закону сохранения энергии (20) лекции XVIII ($d/dt \equiv d/da\dot{a}$):
$$\frac{d}{da}\varepsilon + \frac{3}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\ln a}\varepsilon + 3(\varepsilon + P) = 0. \quad (1)$$
- Предположим, что Вселенная заполнена газом частиц с массой покоя m, находящемся в термодинамическом равновесии с температурой $T(t)$. Равновесное изотропное распределение Максвелла - Больцмана частиц газа есть [1]:
$$f_0(t,p) = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{p_4}{T(t)}} = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{m^2+p^2}}{T(t)}}, \quad (2)$$
где $A(t)$ – некоторая нормировочная функция.
- Моменты функции этой распределения имеют следующее значение:
$$n^i(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i f_0(t,p), \quad T^i_k(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i p_k f_0(t,p). \quad (3)$$
- Вследствие изотропии трехмерного пространства в четырехмерном пространстве-времени Фридмана имеется лишь одно выделенное направление $u^i = \delta^i_4$, и один симметричный тензор g_{ik} (δ^i_k). Поэтому моменты (3) могут иметь лишь следующую алгебраическую структуру:
$$T^i_k = a\,\mathrm{diag}(0,0,0,1) + b\,\mathrm{diag}(1,1,1,0).$$
Тензор T^i_k имеет структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости. Поэтому из сравнения их найдем: $a = \varepsilon + P$, $b = -P$. Таким образом, найдем: $\varepsilon = T^4_4$, $T^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta P$, $P = -1/3T^\alpha_\alpha$.

[1] *Мы выбираем универсальную систему единиц: $G = \hbar = c = k = 1$, k – постоянная Больцмана.*

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Локальное термодинамическое равновесие

- Вернемся к закону сохранения энергии (20) лекции XVIII ($d/dt \equiv d/da\dot{a}$):
$$\frac{d}{da}\varepsilon + \frac{3}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\ln a}\varepsilon + 3(\varepsilon + P) = 0. \quad (1)$$
- Предположим, что Вселенная заполнена газом частиц с массой покоя m, находящемся в термодинамическом равновесии с температурой $T(t)$. Равновесное изотропное распределение Максвелла - Больцмана частиц газа есть [1]:
$$f_0(t,p) = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{p_4}{T(t)}} = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{m^2+p^2}}{T(t)}}, \quad (2)$$
где $A(t)$ – некоторая нормировочная функция.
- Моменты функции этой распределения имеют следующее значение:
$$n^i(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i f_0(t,p), \quad T^i_k(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i p_k f_0(t,p). \quad (3)$$
- Вследствие изотропии трехмерного пространства в четырехмерном пространстве-времени Фридмана имеется лишь одно выделенное направление $u^i = \delta^i_4$, и один симметричный тензор g_{ik} (δ^i_k). Поэтому моменты (3) могут иметь лишь следующую алгебраическую структуру:
$$n^i = u^i n, \quad T^i_k = a u^i u_k + b\delta^i_k, \quad (4)$$
Тензор T^i_k имеет структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости. Поэтому из сравнения их найдем: $a = \varepsilon + P$, $b = -P$. Таким образом, найдем: $\varepsilon = T^4_4$, $T^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta P$, $P = -1/3T^\alpha_\alpha$.

[1] *Мы выбираем универсальную систему единиц: $G = \hbar = c = k = 1$, k – постоянная Больцмана.*

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Вернемся к закону сохранения энергии (20) лекции XVIII ($d/dt \equiv d/da\dot{a}$):
$$\frac{d}{da}\varepsilon + \frac{3}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\ln a}\varepsilon + 3(\varepsilon + P) = 0. \tag{1}$$
- Предположим, что Вселенная заполнена газом частиц с массой покоя m, находящемся в термодинамическом равновесии с температурой $T(t)$. Равновесное изотропное распределение Максвелла - Больцмана частиц газа есть [1]:
$$f_0(t,p) = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{p_4}{T(t)}} = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{m^2+p^2}}{T(t)}}, \tag{2}$$
где $A(t)$ – некоторая нормировочная функция.
- Моменты функции этой распределения имеют следующее значение:
$$n^i(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i f_0(t,p), \quad T^i_k(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i p_k f_0(t,p). \tag{3}$$
- Вследствие изотропии трехмерного пространства в четырехмерном пространстве-времени Фридмана имеется лишь одно выделенное направление $u^i = \delta^i_4$, и один симметричный тензор g_{ik} (δ^i_k). Поэтому моменты (3) могут иметь лишь следующую алгебраическую структуру:
$$n^i = u^i n; \quad T^i_k = a u^i u_k + b\delta^i_k, \tag{4}$$
Тензор T^i_k имеет структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости. Поэтому из сравнения их найдем: $a = \varepsilon + P$, $b = -P$. Таким образом, найдем: $\varepsilon = T^4_4$, $T^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta P$, $P = -1/3T^\alpha_\alpha$.

[1] *Мы выбираем универсальную систему единиц: $G = \hbar = c = k = 1$, k – постоянная Больцмана.*

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Вернемся к закону сохранения энергии (20) лекции XVIII ($d/dt \equiv d/da\dot{a}$):
$$\frac{d}{da}\varepsilon + \frac{3}{a}(\varepsilon + P(\varepsilon)) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\ln a}\varepsilon + 3(\varepsilon + P) = 0. \tag{1}$$
- Предположим, что Вселенная заполнена газом частиц с массой покоя m, находящемся в термодинамическом равновесии с температурой $T(t)$. Равновесное изотропное распределение Максвелла - Больцмана частиц газа есть [1]:
$$f_0(t,p) = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{p_4}{T(t)}} = A(t)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{m^2+p^2}}{T(t)}}, \tag{2}$$
где $A(t)$ – некоторая нормировочная функция.
- Моменты функции этой распределения имеют следующее значение:
$$n^i(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i f_0(t,p), \quad T^i_k(t) = \int\limits_P \frac{d^3\mathbf{p}}{p_4} p^i p_k f_0(t,p). \tag{3}$$
- Вследствие изотропии трехмерного пространства в четырехмерном пространстве-времени Фридмана имеется лишь одно выделенное направление $u^i = \delta^i_4$, и один симметричный тензор g_{ik} (δ^i_k). Поэтому моменты (3) могут иметь лишь следующую алгебраическую структуру:
$$n^i = u^i n; \quad T^i_k = a u^i u_k + b\delta^i_k, \tag{4}$$
Тензор T^i_k имеет структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости. Поэтому из сравнения их найдем: $a = \varepsilon + P$, $b = -P$. Таким образом, найдем: $\varepsilon = T^4_4$, $T^\alpha_\beta = -\delta^\alpha_\beta P$, $P = -1/3T^\alpha_\alpha$.

[1] *Мы выбираем универсальную систему единиц: $G = \hbar = c = k = 1$, k – постоянная Больцмана.*

Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления этих скаляров перейдем к сферической системе координат в пространстве импульсов, а затем сделаем подстановку: $p = m\,\mathrm{sh}x$. В результате получим ($p^\alpha p_\alpha = -p^2$):

$$n(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^3 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \quad (5)$$

$$P(t) = \frac{1}{3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^2 f_0(t,p) = \frac{4\pi}{3} A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^4 x \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \quad (6)$$

$$\varepsilon(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \quad (7)$$

где $\lambda(t) = m/T(t)$.

- Рассмотрим интегралы вида (Н.Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения // М-Л: ГИФМЛ. – 1963. – 359 с.):

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^{2n+1} x \cdot \mathrm{ch}^{2k} x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx = \frac{(2n+1)!}{\lambda^{2k+1}} K_{2k+1}(\lambda)$$

– функции Бесселя Мнимого аргумента (функции Макдональда).

- Таким образом, сразу найдем давление:

$$P(t) = \frac{4\pi}{3} A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^4 x \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx = \frac{4\pi}{3} A(t) m^4 \frac{3!}{\lambda^5} K_5(\lambda)$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления этих скаляров перейдем к сферической системе координат в пространстве импульсов, а затем сделаем подстановку: $p = m\,\mathrm{sh}x$. В результате получим ($p^\alpha p_\alpha = -p^2$):

$$n(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^3 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \qquad (5)$$

$$P(t) = \frac{1}{3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^2 f_0(t,p) = \frac{4\pi}{3} A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^4 x \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \qquad (6)$$

$$\varepsilon(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \qquad (7)$$

где $\lambda(t) = m/T(t)$.

- Рассмотрим интегралы вида (Н.Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения // М-Л: ГИФМЛ. – 1963. – 359 с.):

$$\mathrm{K}_n(z) = \frac{z^n}{(2n-1)!!} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-z \mathrm{ch}\, x} \mathrm{sh}^{2n} x dx \qquad (8)$$

– функции Бесселя Мнимого аргумента (функции Макдональда).

- Таким образом, сразу найдем давление:

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления этих скаляров перейдем к сферической системе координат в пространстве импульсов, а затем сделаем подстановку: $p = m\,\mathrm{sh}x$. В результате получим ($p^\alpha p_\alpha = -p^2$):

$$n(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^3 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \quad (5)$$

$$P(t) = \frac{1}{3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^2 f_0(t,p) = \frac{4\pi}{3} A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^4 x \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \quad (6)$$

$$\varepsilon(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \quad (7)$$

где $\lambda(t) = m/T(t)$.

- Рассмотрим интегралы вида (Н.Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения // М-Л: ГИФМЛ. – 1963. – 359 с.):

$$\mathrm{K}_n(z) = \frac{z^n}{(2n-1)!!} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-z \mathrm{ch} x} \mathrm{sh}^{2n} x dx \quad (8)$$

– функции Бесселя Мнимого аргумента (функции Макдональда).

- Таким образом, сразу найдем давление:

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления этих скаляров перейдем к сферической системе координат в пространстве импульсов, а затем сделаем подстановку: $p = m\,\mathrm{sh}x$. В результате получим ($p^\alpha p_\alpha = -p^2$):

$$n(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^3 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \quad (5)$$

$$P(t) = \frac{1}{3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^2 f_0(t,p) = \frac{4\pi}{3} A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^4 x \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \quad (6)$$

$$\varepsilon(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \quad (7)$$

где $\lambda(t) = m/T(t)$.

- Рассмотрим интегралы вида (Н.Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения // М-Л: ГИФМЛ. – 1963. – 359 с.):

$$\mathrm{K}_n(z) = \frac{z^n}{(2n-1)!!} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-z \mathrm{ch} x} \mathrm{sh}^{2n} x dx \quad (8)$$

– функции Бесселя Мнимого аргумента (функции Макдональда).

- Таким образом, сразу найдем давление:

$$P(t) = 4\pi A(t) m^4 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2}. \quad (9)$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления этих скаляров перейдем к сферической системе координат в пространстве импульсов, а затем сделаем подстановку: $p = m\,\mathrm{sh}x$. В результате получим ($p^\alpha p_\alpha = -p^2$):

$$n(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^3 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \tag{5}$$

$$P(t) = \frac{1}{3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^2 f_0(t,p) = \frac{4\pi}{3} A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^4 x \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \tag{6}$$

$$\varepsilon(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \tag{7}$$

где $\lambda(t) = m/T(t)$.

- Рассмотрим интегралы вида (Н.Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения // М-Л: ГИФМЛ. – 1963. – 359 с.):

$$\mathrm{K}_n(z) = \frac{z^n}{(2n-1)!!} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-z \mathrm{ch} x} \mathrm{sh}^{2n} x dx \tag{8}$$

– функции Бесселя Мнимого аргумента (функции Макдональда).

- Таким образом, сразу найдем давление:

$$P(t) = 4\pi A(t) m^4 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2}. \tag{9}$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления этих скаляров перейдем к сферической системе координат в пространстве импульсов, а затем сделаем подстановку: $p = m\,\mathrm{sh}x$. В результате получим ($p^\alpha p_\alpha = -p^2$):

$$n(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^3 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \tag{5}$$

$$P(t) = \frac{1}{3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^2 f_0(t,p) = \frac{4\pi}{3} A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^4 x \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \tag{6}$$

$$\varepsilon(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_0(t,p) = 4\pi A(t) m^4 \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx, \tag{7}$$

где $\lambda(t) = m/T(t)$.

- Рассмотрим интегралы вида (Н.Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения // М-Л: ГИФМЛ. – 1963. – 359 с.):

$$\mathrm{K}_n(z) = \frac{z^n}{(2n-1)!!} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-z \mathrm{ch} x} \mathrm{sh}^{2n} x dx \tag{8}$$

– функции Бесселя Мнимого аргумента (функции Макдональда).

- Таким образом, сразу найдем давление:

$$P(t) = 4\pi A(t) m^4 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2}. \tag{9}$$

Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры

- Для вычисления плотности числа частиц $n(t)$ используем тождество:

$$\int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \qquad (10)$$

  а также дифференциальное соотношение между функциями Макдональда:

$$\mathrm{K}_1(\lambda) = -\lambda \mathrm{K}_0(\lambda) - \frac{d}{d\lambda} \mathrm{K}_0(\lambda). \qquad (11)$$

- Таким образом, получим:

$$n(t) = \frac{4\pi m^3 c^3}{\lambda^2} \mathrm{K}_0(\lambda). \qquad (12)$$

- Наконец, для плотности энергии (7), используя тождество $\mathrm{ch}^2 x \equiv \mathrm{sh}^2 x + 1$ и определение (8), найдем:

$$\varepsilon(t) = \frac{4\pi m^4 c^5}{\lambda^2} \left[\mathrm{K}_0(\lambda) + \frac{3}{\lambda} \mathrm{K}_1(\lambda) \right]. \qquad (13)$$

- Сравнивая (12) и (9), получим соотношение между давлением и плотностью числа частиц:

$$p(t) = n(t) \cdot \frac{c^2}{\lambda}. \qquad (14)$$

  С помощью этого соотношения выражение для плотности энергии (13) можно переписать в формах;

$$\varepsilon(t) = \frac{4\pi m^3 c^3}{\lambda^2} \left[\mathrm{K}_0(\lambda) + \frac{3}{\lambda} \mathrm{K}_1(\lambda) \right] \cdot \frac{c^2}{\lambda}. \qquad (15)$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Локальное термодинамическое равновесие: макроскопические скаляры

- Для вычисления плотности числа частиц $n(t)$ используем тождество:

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{10}$$

  а также дифференциальное соотношение между функциями Макдональда:

$$\frac{d}{dz} z^{-n} \mathrm{K}_n(z) = -z^{-n} \mathrm{K}_{n+1}(z). \tag{11}$$

- Таким образом, получим:

$$\text{[illegible]} \tag{12}$$

- Наконец, для плотности энергии (7), используя тождество $\mathrm{ch}^2 x \equiv \mathrm{sh}^2 x + 1$ и определение (8), найдем:

$$\text{[illegible]} \tag{13}$$

- Сравнивая (12) и (9), получим соотношение между давлением и плотностью числа частиц:

$$\text{[illegible]}$$

  С помощью этого соотношения выражение для плотности энергии (13) можно переписать в формах;

$$\text{[illegible]}$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления плотности числа частиц $n(t)$ используем тождество:

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x\cdot \mathrm{ch}\, x\cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x}dx \equiv -\frac{d}{d\lambda}\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^2 x\cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x}dx \equiv -\frac{d}{d\lambda}\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \qquad (10)$$

а также дифференциальное соотношение между функциями Макдональда:

$$\frac{d}{dz}z^{-n}\mathrm{K}_n(z) = -z^{-n}\mathrm{K}_{n+1}(z). \qquad (11)$$

- Таким образом, получим:

$$n(t) = 4\pi A(t) m^3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}. \qquad (12)$$

- Наконец, для плотности энергии (7), используя тождество $\mathrm{ch}^2 x \equiv \mathrm{sh}^2 x + 1$ и определение (8), найдем:

$$\varepsilon(t) = 4\pi A(t) m^4\left(3\frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}\right) \equiv 3P + 4\pi A(t) m^4 \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}. \qquad (13)$$

- Сравнивая (12) и (9), получим соотношение между давлением и плотностью числа частиц:

$$P(t) = n(t)T(t). \qquad (14)$$

С помощью этого соотношения выражение для плотности энергии (13) можно переписать в формах;

$$\varepsilon = n\left(m\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} + 3T\right) \equiv P\left(\lambda\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} + 3\right). \qquad (15)$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления плотности числа частиц $n(t)$ используем тождество:

$$\int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{10}$$

а также дифференциальное соотношение между функциями Макдональда:

$$\frac{d}{dz} z^{-n} \mathrm{K}_n(z) = -z^{-n} \mathrm{K}_{n+1}(z). \tag{11}$$

- Таким образом, получим:

$$n(t) = 4\pi A(t) m^3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}. \tag{12}$$

- Наконец, для плотности энергии (7), используя тождество $\mathrm{ch}^2 x \equiv \mathrm{sh}^2 x + 1$ и определение (8), найдем:

$$\rho(t) = 4\pi A(t) m^4 \left(\frac{\mathrm{K}_3(\lambda)}{\lambda} - \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2} \right).$$

- Сравнивая (12) и (9), получим соотношение между давлением и плотностью числа частиц:

$$p(t) = n(t) \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\mathrm{K}_3(\lambda) - \mathrm{K}_2(\lambda)/\lambda}.$$

С помощью этого соотношения выражение для плотности энергии (13) можно переписать в формах;

$$\rho(t) = \frac{n(t)}{\lambda} \left(\frac{\mathrm{K}_3(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{n(t)}{\lambda} \left(\frac{\mathrm{K}_3(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} - \frac{\mathrm{K}_3(\lambda) - \mathrm{K}_2(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} \right) = \frac{n(t)}{\lambda} \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} = \frac{n(t)}{\lambda}.$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления плотности числа частиц $n(t)$ используем тождество:

$$\int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{10}$$

а также дифференциальное соотношение между функциями Макдональда:

$$\frac{d}{dz} z^{-n} \mathrm{K}_n(z) = -z^{-n} \mathrm{K}_{n+1}(z). \tag{11}$$

- Таким образом, получим:

$$n(t) = 4\pi A(t) m^3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}. \tag{12}$$

- Наконец, для плотности энергии (7), используя тождество $\mathrm{ch}^2 x \equiv \mathrm{sh}^2 x + 1$ и определение (8), найдем:

$$\varepsilon(t) = 4\pi A(t) m^4 \left[\frac{\mathrm{K}_3(\lambda)}{\lambda} + \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda} \right].$$

- Сравнивая (12) и (9), получим соотношение между давлением и плотностью числа частиц:

$$p(t) = n(t) \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\mathrm{K}_3(\lambda) + \mathrm{K}_2(\lambda)}.$$

С помощью этого соотношения выражение для плотности энергии (13) можно переписать в формах;

$$\varepsilon(t) = 3p(t) + n(t) \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)}.$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления плотности числа частиц $n(t)$ используем тождество:

$$\int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{10}$$

а также дифференциальное соотношение между функциями Макдональда:

$$\frac{d}{dz} z^{-n} \mathrm{K}_n(z) = -z^{-n} \mathrm{K}_{n+1}(z). \tag{11}$$

- Таким образом, получим:

$$n(t) = 4\pi A(t) m^3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}. \tag{12}$$

- Наконец, для плотности энергии (7), используя тождество $\mathrm{ch}^2 x \equiv \mathrm{sh}^2 x + 1$ и определение (8), найдем:

$$\varepsilon(t) = 4\pi A(t) m^4 \left(3\frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda} \right) = 3P + 4\pi A(t) m^4 \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}. \tag{13}$$

- Сравнивая (12) и (9), получим соотношение между давлением и плотностью числа частиц:

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

С помощью этого соотношения выражение для плотности энергии (13) можно переписать в формах;

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления плотности числа частиц $n(t)$ используем тождество:

$$\int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{10}$$

а также дифференциальное соотношение между функциями Макдональда:

$$\frac{d}{dz} z^{-n} \mathrm{K}_n(z) = -z^{-n} \mathrm{K}_{n+1}(z). \tag{11}$$

- Таким образом, получим:

$$n(t) = 4\pi A(t) m^3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}. \tag{12}$$

- Наконец, для плотности энергии (7), используя тождество $\mathrm{ch}^2 x \equiv \mathrm{sh}^2 x + 1$ и определение (8), найдем:

$$\varepsilon(t) = 4\pi A(t) m^4 \left(3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda} \right) \equiv 3P + 4\pi A(t) m^4 \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}. \tag{13}$$

- Сравнивая (12) и (9), получим соотношение между давлением и плотностью числа частиц:

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

С помощью этого соотношения выражение для плотности энергии (13) можно переписать в формах;

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления плотности числа частиц $n(t)$ используем тождество:

$$\int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{10}$$

а также дифференциальное соотношение между функциями Макдональда:

$$\frac{d}{dz} z^{-n} \mathrm{K}_n(z) = -z^{-n} \mathrm{K}_{n+1}(z). \tag{11}$$

- Таким образом, получим:

$$n(t) = 4\pi A(t) m^3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}. \tag{12}$$

- Наконец, для плотности энергии (7), используя тождество $\mathrm{ch}^2 x \equiv \mathrm{sh}^2 x + 1$ и определение (8), найдем:

$$\varepsilon(t) = 4\pi A(t) m^4 \left(3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda} \right) \equiv 3P + 4\pi A(t) m^4 \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}. \tag{13}$$

- Сравнивая (12) и (9), получим соотношение между давлением и плотностью числа частиц:

$$P(t) = n(t) T(t). \tag{14}$$

С помощью этого соотношения выражение для плотности энергии (13) можно переписать в формах;

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления плотности числа частиц $n(t)$ используем тождество:

$$\int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{10}$$

а также дифференциальное соотношение между функциями Макдональда:

$$\frac{d}{dz} z^{-n} \mathrm{K}_n(z) = -z^{-n} \mathrm{K}_{n+1}(z). \tag{11}$$

- Таким образом, получим:

$$n(t) = 4\pi A(t) m^3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}. \tag{12}$$

- Наконец, для плотности энергии (7), используя тождество $\mathrm{ch}^2 x \equiv \mathrm{sh}^2 x + 1$ и определение (8), найдем:

$$\varepsilon(t) = 4\pi A(t) m^4 \left(3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda} \right) \equiv 3P + 4\pi A(t) m^4 \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}. \tag{13}$$

- Сравнивая (12) и (9), получим соотношение между давлением и плотностью числа частиц:

$$\boxed{P(t) = n(t) T(t). \qquad (14)}$$

С помощью этого соотношения выражение для плотности энергии (13) можно переписать в формах;

$$\varepsilon = n \left(m \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} + 3T \right) \equiv P \left(\lambda \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} + 3 \right). \tag{15}$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления плотности числа частиц $n(t)$ используем тождество:

$$\int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{10}$$

а также дифференциальное соотношение между функциями Макдональда:

$$\frac{d}{dz} z^{-n} \mathrm{K}_n(z) = -z^{-n} \mathrm{K}_{n+1}(z). \tag{11}$$

- Таким образом, получим:

$$n(t) = 4\pi A(t) m^3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}. \tag{12}$$

- Наконец, для плотности энергии (7), используя тождество $\mathrm{ch}^2 x \equiv \mathrm{sh}^2 x + 1$ и определение (8), найдем:

$$\varepsilon(t) = 4\pi A(t) m^4 \left(3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda} \right) \equiv 3P + 4\pi A(t) m^4 \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}. \tag{13}$$

- Сравнивая (12) и (9), получим соотношение между давлением и плотностью числа частиц:

$$\boxed{P(t) = n(t) T(t). \qquad (14)}$$

С помощью этого соотношения выражение для плотности энергии (13) можно переписать в формах;

$$\varepsilon = n \left(m \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} + 3T \right) \equiv P \left(\lambda \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} + 3 \right). \tag{15}$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Для вычисления плотности числа частиц $n(t)$ используем тождество:

$$\int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty \mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{ch}\, x} dx \equiv -\frac{d}{d\lambda} \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}, \tag{10}$$

а также дифференциальное соотношение между функциями Макдональда:

$$\frac{d}{dz} z^{-n} \mathrm{K}_n(z) = -z^{-n} \mathrm{K}_{n+1}(z). \tag{11}$$

- Таким образом, получим:

$$n(t) = 4\pi A(t) m^3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda}. \tag{12}$$

- Наконец, для плотности энергии (7), используя тождество $\mathrm{ch}^2 x \equiv \mathrm{sh}^2 x + 1$ и определение (8), найдем:

$$\varepsilon(t) = 4\pi A(t) m^4 \left(3 \frac{\mathrm{K}_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda} \right) \equiv 3P + 4\pi A(t) m^4 \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\lambda}. \tag{13}$$

- Сравнивая (12) и (9), получим соотношение между давлением и плотностью числа частиц:

$$\boxed{P(t) = n(t) T(t).} \tag{14}$$

С помощью этого соотношения выражение для плотности энергии (13) можно переписать в формах;

$$\varepsilon = n \left(m \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} + 3T \right) \equiv P \left(\lambda \frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} + 3 \right). \tag{15}$$

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:

$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \qquad (16)$$

- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:

$$\frac{m}{T} \gg 1 \Rightarrow \lambda \gg 1.$$

- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):

$$\mathrm{K}_1(\lambda) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left(1+\frac{3}{8\lambda}\right)e^{-\lambda}, \quad \mathrm{K}_2(\lambda) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left(1+\frac{15}{8\lambda}\right)e^{-\lambda}.$$

- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:

$$\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} \approx 1 - \frac{3}{8\lambda}.$$

- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:

$$\rho \approx m + \frac{3}{2}T,$$

т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.

- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохранения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{3}{2}T\right) + \frac{3}{a}\frac{da}{d\eta}\left(\frac{3}{2}T\right) = 0.$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:

$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$

- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:

$$\frac{m}{T} \gg 1.$$

- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):

$$\mathrm{K}_1(\lambda) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left(1 + \frac{3}{8\lambda} + \frac{15}{128\lambda^2} + \ldots\right),$$

$$\mathrm{K}_2(\lambda) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left(1 - \frac{1}{8\lambda} + \frac{9}{128\lambda^2} + \ldots\right).$$

- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:

$$\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} \approx 1 + \frac{1}{\lambda} + \ldots$$

- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:

$$\rho = m + \frac{3}{2}T,$$

т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.

- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохра-
нения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{3}{2}T\right) + \frac{3}{a}\frac{da}{d\eta}\left(\frac{3}{2}T\right) = 0.$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:

$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$

- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:

$$mc^2 \gg kT \Rightarrow \lambda \gg 1. \tag{17}$$

- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):

$$\mathrm{K}_1(\lambda) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left(1+\frac{3}{8\lambda}\right)e^{-\lambda}, \quad \mathrm{K}_2(\lambda) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left(1+\frac{15}{8\lambda}\right)e^{-\lambda}.$$

- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:

$$\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} \approx 1 + \frac{3}{8\lambda}.$$

- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:

$$\rho = mc^2 n + \frac{3}{2}kTn,$$

т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.

- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохранения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{3}{2}kTa^3 n\right) + p\frac{d}{d\eta}a^3 = 0.$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:

$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$

- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:

$$mc^2 \gg kT \Rightarrow \lambda \gg 1. \tag{17}$$

- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):

$$\mathrm{K}_1(\lambda) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left(1 + \frac{3}{8\lambda} - \frac{15}{128\lambda^2} + \ldots\right)$$

$$\mathrm{K}_2(\lambda) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\left(1 + \frac{15}{8\lambda} - \frac{105}{128\lambda^2} + \ldots\right)$$

- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:

$$\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} \approx 1 - \frac{3}{8\lambda} + \frac{15}{8\lambda} + \ldots = 1 + \frac{3}{\lambda} + \ldots$$

- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:

$$\rho = mc^2 n + \frac{3}{2}kTn,$$

т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.

- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохранения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{3}{2}kTa^3 n\right) + p\frac{d}{d\eta}a^3 = 0$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:
$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$
- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:
$$mc^2 \gg kT \Rightarrow \lambda \gg 1. \tag{17}$$
- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):
$$\mathrm{K}_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}\left(1 + \frac{4n^2-1}{8z} + O(z^{-2})\right), \quad z \to \infty. \tag{18}$$
- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:
$$\frac{\mathrm{K}_1(\lambda)}{\mathrm{K}_2(\lambda)} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + \frac{4\cdot 1^2-1}{8\lambda} + O(\lambda^{-2})\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + \frac{4\cdot 2^2-1}{8\lambda} + O(\lambda^{-2})\right)} = 1 + \frac{1}{\lambda} + O(\lambda^{-2}).$$
- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:
$$\rho = \frac{mc^2 n}{a^3} + \frac{3}{2}\frac{kT n}{a^3},$$
т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.
- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохранения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:
$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{mc^2 n}{a^3} + \frac{3}{2}\frac{kT n}{a^3}\right) + \frac{kT n}{a^3}\frac{d}{d\eta}\ln a^3 = 0.$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:
$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$
- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:
$$mc^2 \gg kT \Rightarrow \lambda \gg 1. \tag{17}$$
- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):
$$\mathrm{K}_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}\left(1 + \frac{4n^2-1}{8z} + O(z^{-2})\right), \quad z \to \infty. \tag{18}$$
- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:
$$\rho = mc^2 n + \frac{3}{2}kTn.$$
- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:
$$\rho = mc^2 n + \frac{3}{2}kTn,$$
т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.
- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохранения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:
$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{3}{2}kTn\right) + kTn\frac{d}{d\eta}\ln a^3 = 0.$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:
$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$
- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:
$$mc^2 \gg kT \Rightarrow \lambda \gg 1. \tag{17}$$
- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):
$$\mathrm{K}_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}\big(1 + \frac{4n^2-1}{8z} + O(z^{-2})\big), \quad z \to \infty. \tag{18}$$
- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:
$$\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda) \approx 1 - \frac{3}{2\lambda}. \tag{19}$$
- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:
$$\rho = mc^2 n + \frac{3}{2}nkT,$$
т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.
- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохранения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:
$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{3}{2}nkT\right) + nkT\frac{d}{d\eta}\ln a^3 = 0.$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:
$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$
- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:
$$mc^2 \gg kT \Rightarrow \lambda \gg 1. \tag{17}$$
- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):
$$\mathrm{K}_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}\big(1 + \frac{4n^2-1}{8z} + O(z^{-2})\big), \quad z \to \infty. \tag{18}$$
- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:
$$\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda) \approx 1 - \frac{3}{2\lambda}. \tag{19}$$
- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:
$$\rho = mc^2 n + \frac{3}{2}kTn \tag{20}$$
т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.
- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохранения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:
$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{3}{2}kTa^3 n\right) + p\frac{d}{d\eta}a^3 = 0 \tag{21}$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:
$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$
- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:
$$mc^2 \gg kT \Rightarrow \lambda \gg 1. \tag{17}$$
- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):
$$\mathrm{K}_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}\big(1 + \frac{4n^2-1}{8z} + O(z^{-2})\big), \quad z \to \infty. \tag{18}$$
- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:
$$\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda) \approx 1 - \frac{3}{2\lambda}. \tag{19}$$
- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:
$$\varepsilon \approx nm + \frac{3}{2}nT, \tag{20}$$
т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.
- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохранения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:
$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{3}{2}nT\right) + \frac{3}{a}\frac{da}{d\eta}\frac{3}{2}nT = 0.$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:
$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$
- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:
$$mc^2 \gg kT \Rightarrow \lambda \gg 1. \tag{17}$$
- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):
$$\mathrm{K}_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}\big(1 + \frac{4n^2-1}{8z} + O(z^{-2})\big), \quad z \to \infty. \tag{18}$$
- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:
$$\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda) \approx 1 - \frac{3}{2\lambda}. \tag{19}$$
- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:
$$\varepsilon \approx nm + \frac{3}{2}nT, \tag{20}$$
т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.
- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохра-
нения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:
$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$
- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:
$$mc^2 \gg kT \Rightarrow \lambda \gg 1. \tag{17}$$
- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):
$$\mathrm{K}_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}\big(1 + \frac{4n^2-1}{8z} + O(z^{-2})\big), \quad z \to \infty. \tag{18}$$
- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:
$$\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda) \approx 1 - \frac{3}{2\lambda}. \tag{19}$$
- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:
$$\varepsilon \approx nm + \frac{3}{2}nT, \tag{20}$$
т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.
- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохра-
нения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:
$$\frac{1}{2}\frac{dT}{da} + \frac{T}{a} = 0 \Rightarrow T = \frac{T_0}{a^2} \tag{21}$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:
$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$
- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:
$$mc^2 \gg kT \Rightarrow \lambda \gg 1. \tag{17}$$
- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):
$$\mathrm{K}_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}\big(1 + \frac{4n^2-1}{8z} + O(z^{-2})\big), \quad z \to \infty. \tag{18}$$
- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:
$$\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda) \approx 1 - \frac{3}{2\lambda}. \tag{19}$$
- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:
$$\varepsilon \approx nm + \frac{3}{2}nT, \tag{20}$$
т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.
- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохра-
нения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:
$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{dT}{da} + \frac{T}{a} = 0 \Rightarrow T = \frac{T_0}{a^2}.} \tag{21}$$

Законы сохранения и эволюция температуры: нерелятивистский газ

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Предположим, что число частиц сохраняется в ходе космологической эволюции. Тогда должен выполняться закон:
$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{d\eta}a^3 n = 0 \Rightarrow \frac{d}{da}a^3 n = 0 \Rightarrow n(a)a^3 = \mathrm{const}. \tag{16}$$
- Предположим, что газ является нерелятивистским, т.е.:
$$mc^2 \gg kT \Rightarrow \lambda \gg 1. \tag{17}$$
- При больших значениях аргумента функции Макдональда имеют следующую асимптотику (Лебедев):
$$\mathrm{K}_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}\big(1 + \frac{4n^2-1}{8z} + O(z^{-2})\big), \quad z \to \infty. \tag{18}$$
- Вычисляя необходимое нам отношение $\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda)$, получим в линейном приближении:
$$\mathrm{K}_1(\lambda)/\mathrm{K}_2(\lambda) \approx 1 - \frac{3}{2\lambda}. \tag{19}$$
- Таким образом, получим из (15) в нерелятивистском пределе:
$$\varepsilon \approx nm + \frac{3}{2}nT, \tag{20}$$
т.е., классическую формулу, состоящую из суммы энергии покоя и тепловой энергии газа.
- Подставляя это выражение для плотности энергии в закон сохранения энергии (1) и учитывая при этом закон сохранения числа частиц (16), получим замкнутое уравнение на температуру газа:
$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{dT}{da} + \frac{T}{a} = 0 \Rightarrow T = \frac{T_0}{a^2}.} \tag{21}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, в прошлом, Вселенная имела более высокую температуру, а в космологической сингулярности $a(0) \to 0$ температура должна обращаться в бесконечность.
- Но тогда становится непригодным нерелятивистское приближение, и необходимо все вычисления проводить в другом крайнем случае $\lambda \to 0$. В этом случае функции Макдональда имеют следующую асимптотику:

$$K_1(\lambda) \to \frac{1}{\lambda}, \quad K_2(\lambda) \to \frac{2}{\lambda^2}, \quad K_3(\lambda) \to \frac{6}{\lambda^3}.$$

- В этом случае из (15) найдем:

$$\rho \to 3p.$$

- Тогда закон сохранения энергии (1) с учетом закона сохранения частиц приводит к следующему закону эволюции температуры:

$$T \to \frac{C_1}{a}.$$

– температура все равно обращается в бесконечность в космологической сингулярности.
- Этот вывод является базовым для горячей модели Гамова. Если в прошлом Вселенной были достижимы сколь угодно большие значения температуры, то это означает, что вблизи космологической сингулярности могли протекать ядерные реакции и образовываться более тяжелые элементы из более легких.
- В частности, в определенный момент времени t_i температура плазмы опускается до так называемой температуры рекомбинации, ниже которой ионизированный водород превращается в нейтральный, вследствие чего резко уменьшается поглощение квантов света, – плазма становится прозрачной, а фотоны – свободными. Эти фотоны и составляют современное реликтовое излучение.

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, в прошлом, Вселенная имела более высокую температуру, а в космологической сингулярности $a(0) \to 0$ температура должна обращаться в бесконечность.
- Но тогда становится непригодным нерелятивистское приближение, и необходимо все вычисления проводить в другом крайнем случае $\lambda \to 0$. В этом случае функции Макдональда имеют следующую асимптотику:

$$\mathrm{K}_n(z) \approx \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad z \to 0. \tag{22}$$

- В этом случае из (15) найдем:

$$\rho \approx \frac{3\mu c^2}{\pi^2 a^4}.$$

- Тогда закон сохранения энергии (1) с учетом закона сохранения частиц приводит к следующему закону эволюции температуры:

$$T \approx \frac{\mu c^2}{\pi^2 k a^3}.$$

– температура все равно обращается в бесконечность в космологической сингулярности.
- Этот вывод является базовым для горячей модели Гамова. Если в прошлом Вселенной были достижимы сколь угодно большие значения температуры, то это означает, что вблизи космологической сингулярности могли протекать ядерные реакции и образовываться более тяжелые элементы из более легких.
- В частности, в определенный момент времени t_i температура плазмы опускается до так называемой температуры рекомбинации, ниже которой ионизированный водород превращается в нейтральный, вследствие чего резко уменьшается поглощение квантов света, – плазма становится прозрачной, а фотоны – свободными. Эти фотоны и составляют современное реликтовое излучение.

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, в прошлом, Вселенная имела более высокую температуру, а в космологической сингулярности $a(0) \to 0$ температура должна обращаться в бесконечность.
- Но тогда становится непригодным нерелятивистское приближение, и необходимо все вычисления проводить в другом крайнем случае $\lambda \to 0$. В этом случае функции Макдональда имеют следующую асимптотику:

$$\mathrm{K}_n(z) \approx \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad z \to 0. \tag{22}$$

- В этом случае из (15) найдем:

$$\rho = 3\lambda^4 \tag{23}$$

- Тогда закон сохранения энергии (1) с учетом закона сохранения частиц приводит к следующему закону эволюции температуры:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{a}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda(0)}{a(0)} \tag{24}$$

– температура все равно обращается в бесконечность в космологической сингулярности.
- Этот вывод является базовым для горячей модели Гамова. Если в прошлом Вселенной были достижимы сколь угодно большие значения температуры, то это означает, что вблизи космологической сингулярности могли протекать ядерные реакции и образовываться более тяжелые элементы из более легких.
- В частности, в определенный момент времени t_i температура плазмы опускается до так называемой температуры рекомбинации, ниже которой ионизированный водород превращается в нейтральный, вследствие чего резко уменьшается поглощение квантов света, – плазма становится прозрачной, а фотоны – свободными. Эти фотоны и составляют современное реликтовое излучение.

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, в прошлом, Вселенная имела более высокую температуру, а в космологической сингулярности $a(0) \to 0$ температура должна обращаться в бесконечность.
- Но тогда становится непригодным нерелятивистское приближение, и необходимо все вычисления проводить в другом крайнем случае $\lambda \to 0$. В этом случае функции Макдональда имеют следующую асимптотику:

$$\mathrm{K}_n(z) \approx \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad z \to 0. \tag{22}$$

- В этом случае из (15) найдем:

$$\varepsilon \approx 3nT. \tag{23}$$

- Тогда закон сохранения энергии (1) с учетом закона сохранения частиц приводит к следующему закону эволюции температуры:

$$T \approx \frac{\varepsilon_0 a_0^3}{3n_0 a^3} = \frac{T_0 a_0^3}{a^3}$$

– температура все равно обращается в бесконечность в космологической сингулярности.
- Этот вывод является базовым для горячей модели Гамова. Если в прошлом Вселенной были достижимы сколь угодно большие значения температуры, то это означает, что вблизи космологической сингулярности могли протекать ядерные реакции и образовываться более тяжелые элементы из более легких.
- В частности, в определенный момент времени t_i температура плазмы опускается до так называемой температуры рекомбинации, ниже которой ионизированный водород превращается в нейтральный, вследствие чего резко уменьшается поглощение квантов света, – плазма становится прозрачной, а фотоны – свободными. Эти фотоны и составляют современное реликтовое излучение.

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, в прошлом, Вселенная имела более высокую температуру, а в космологической сингулярности $a(0) \to 0$ температура должна обращаться в бесконечность.
- Но тогда становится непригодным нерелятивистское приближение, и необходимо все вычисления проводить в другом крайнем случае $\lambda \to 0$. В этом случае функции Макдональда имеют следующую асимптотику:

$$\mathrm{K}_n(z) \approx \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad z \to 0. \tag{22}$$

- В этом случае из (15) найдем:

$$\varepsilon \approx 3nT. \tag{23}$$

- Тогда закон сохранения энергии (1) с учетом закона сохранения частиц приводит к следующему закону эволюции температуры:

$$T \propto \frac{1}{a(t)}$$

– температура все равно обращается в бесконечность в космологической сингулярности.
- Этот вывод является базовым для горячей модели Гамова. Если в прошлом Вселенной были достижимы сколь угодно большие значения температуры, то это означает, что вблизи космологической сингулярности могли протекать ядерные реакции и образовываться более тяжелые элементы из более легких.
- В частности, в определенный момент времени t_i температура плазмы опускается до так называемой температуры рекомбинации, ниже которой ионизированный водород превращается в нейтральный, вследствие чего резко уменьшается поглощение квантов света, – плазма становится прозрачной, а фотоны – свободными. Эти фотоны и составляют современное реликтовое излучение.

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, в прошлом, Вселенная имела более высокую температуру, а в космологической сингулярности $a(0) \to 0$ температура должна обращаться в бесконечность.
- Но тогда становится непригодным нерелятивистское приближение, и необходимо все вычисления проводить в другом крайнем случае $\lambda \to 0$. В этом случае функции Макдональда имеют следующую асимптотику:

$$\mathrm{K}_n(z) \approx \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad z \to 0. \tag{22}$$

- В этом случае из (15) найдем:

$$\varepsilon \approx 3nT. \tag{23}$$

- Тогда закон сохранения энергии (1) с учетом закона сохранения частиц приводит к следующему закону эволюции температуры:

$$\dot{T} + \frac{\dot{a}}{a}T = 0 \Rightarrow T = \frac{T_0}{a} \tag{24}$$

– температура все равно обращается в бесконечность в космологической сингулярности.
- Этот вывод является базовым для горячей модели Гамова. Если в прошлом Вселенной были достижимы сколь угодно большие значения температуры, то это означает, что вблизи космологической сингулярности могли протекать ядерные реакции и образовываться более тяжелые элементы из более легких.
- В частности, в определенный момент времени t_i температура плазмы опускается до так называемой температуры рекомбинации, ниже которой ионизированный водород превращается в нейтральный, вследствие чего резко уменьшается поглощение квантов света, – плазма становится прозрачной, а фотоны – свободными. Эти фотоны и составляют современное реликтовое излучение.

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, в прошлом, Вселенная имела более высокую температуру, а в космологической сингулярности $a(0) \to 0$ температура должна обращаться в бесконечность.
- Но тогда становится непригодным нерелятивистское приближение, и необходимо все вычисления проводить в другом крайнем случае $\lambda \to 0$. В этом случае функции Макдональда имеют следующую асимптотику:

$$\mathrm{K}_n(z) \approx \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad z \to 0. \tag{22}$$

- В этом случае из (15) найдем:

$$\varepsilon \approx 3nT. \tag{23}$$

- Тогда закон сохранения энергии (1) с учетом закона сохранения частиц приводит к следующему закону эволюции температуры:

$$\dot{T} + \frac{\dot{a}}{a}T = 0 \Rightarrow T = \frac{T_0}{a} \tag{24}$$

– температура все равно обращается в бесконечность в космологической сингулярности.

- Этот вывод является базовым для горячей модели Гамова. Если в прошлом Вселенной были достижимы сколь угодно большие значения температуры, то это означает, что вблизи космологической сингулярности могли протекать ядерные реакции и образовываться более тяжелые элементы из более легких.
- В частности, в определенный момент времени t_i температура плазмы опускается до так называемой температуры рекомбинации, ниже которой ионизированный водород превращается в нейтральный, вследствие чего резко уменьшается поглощение квантов света, – плазма становится прозрачной, а фотоны – свободными. Эти фотоны и составляют современное реликтовое излучение.

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, в прошлом, Вселенная имела более высокую температуру, а в космологической сингулярности $a(0) \to 0$ температура должна обращаться в бесконечность.
- Но тогда становится непригодным нерелятивистское приближение, и необходимо все вычисления проводить в другом крайнем случае $\lambda \to 0$. В этом случае функции Макдональда имеют следующую асимптотику:

$$\mathrm{K}_n(z) \approx \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad z \to 0. \tag{22}$$

- В этом случае из (15) найдем:

$$\varepsilon \approx 3nT. \tag{23}$$

- Тогда закон сохранения энергии (1) с учетом закона сохранения частиц приводит к следующему закону эволюции температуры:

$$\dot{T} + \frac{\dot{a}}{a}T = 0 \Rightarrow T = \frac{T_0}{a} \tag{24}$$

– температура все равно обращается в бесконечность в космологической сингулярности.

- Этот вывод является базовым для горячей модели Гамова. Если в прошлом Вселенной были достижимы сколь угодно большие значения температуры, то это означает, что вблизи космологической сингулярности могли протекать ядерные реакции и образовываться более тяжелые элементы из более легких.
- В частности, в определенный момент времени t_i температура плазмы опускается до так называемой температуры рекомбинации, ниже которой ионизированный водород превращается в нейтральный, вследствие чего резко уменьшается поглощение квантов света, – плазма становится прозрачной, а фотоны – свободными. Эти фотоны и составляют современное реликтовое излучение.

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, в прошлом, Вселенная имела более высокую температуру, а в космологической сингулярности $a(0) \to 0$ температура должна обращаться в бесконечность.
- Но тогда становится непригодным нерелятивистское приближение, и необходимо все вычисления проводить в другом крайнем случае $\lambda \to 0$. В этом случае функции Макдональда имеют следующую асимптотику:
$$\mathrm{K}_n(z) \approx \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad z \to 0. \tag{22}$$
- В этом случае из (15) найдем:
$$\varepsilon \approx 3nT. \tag{23}$$
- Тогда закон сохранения энергии (1) с учетом закона сохранения частиц приводит к следующему закону эволюции температуры:
$$\dot{T} + \frac{\dot{a}}{a}T = 0 \Rightarrow T = \frac{T_0}{a} \tag{24}$$
– температура все равно обращается в бесконечность в космологической сингулярности.
- Этот вывод является базовым для горячей модели Гамова. Если в прошлом Вселенной были достижимы сколь угодно большие значения температуры, то это означает, что вблизи космологической сингулярности могли протекать ядерные реакции и образовываться более тяжелые элементы из более легких.
- В частности, в определенный момент времени t_i температура плазмы опускается до так называемой температуры рекомбинации, ниже которой ионизированный водород превращается в нейтральный, вследствие чего резко уменьшается поглощение квантов света, – плазма становится прозрачной, а фотоны – свободными. Эти фотоны и составляют современное реликтовое излучение.

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, в прошлом, Вселенная имела более высокую температуру, а в космологической сингулярности $a(0) \to 0$ температура должна обращаться в бесконечность.
- Но тогда становится непригодным нерелятивистское приближение, и необходимо все вычисления проводить в другом крайнем случае $\lambda \to 0$. В этом случае функции Макдональда имеют следующую асимптотику:
$$\mathrm{K}_n(z) \approx \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad z \to 0. \tag{22}$$
- В этом случае из (15) найдем:
$$\varepsilon \approx 3nT. \tag{23}$$
- Тогда закон сохранения энергии (1) с учетом закона сохранения частиц приводит к следующему закону эволюции температуры:
$$\dot{T} + \frac{\dot{a}}{a}T = 0 \Rightarrow T = \frac{T_0}{a} \tag{24}$$
– температура все равно обращается в бесконечность в космологической сингулярности.
- Этот вывод является базовым для горячей модели Гамова. Если в прошлом Вселенной были достижимы сколь угодно большие значения температуры, то это означает, что вблизи космологической сингулярности могли протекать ядерные реакции и образовываться более тяжелые элементы из более легких.
- В частности, в определенный момент времени t_i температура плазмы опускается до так называемой температуры рекомбинации, ниже которой ионизированный водород превращается в нейтральный, вследствие чего резко уменьшается поглощение квантов света, – плазма становится прозрачной, а фотоны – свободными. Эти фотоны и составляют современное реликтовое излучение.

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Поскольку при приближении к космологической сингулярности температура вещества – космологической плазмы, а стало быть, и кинетической энергии частиц, могла достигать сколь угодно больших значений, то при приближении к космологической сингулярности кинетическая энергия частиц рано или поздно превысит потенциальную энергию их связи, что приведет к распаду составных частиц на элементарные: молекул – на атомы; атомы – на электроны и ядра; ядра – на протоны и нейтроны и тд.. Поэтому при приближении к космологической сингулярности свойства космологической плазмы определяются физикой элементарных частиц при высоких энергиях: именно в этом пункте происходит стыковка физики микромира и физики макромира. Вселенная представляет собой естественный гигантский ускоритель частиц, дающий нам все более высокие энергии частиц, чем ближе мы подступаем к исследованию ее начала[2]
- Поскольку мы здесь рассматриваем космологическую плазму, состоящую из элементарных частиц, нам необходимо перейти к квантовостатистическому описанию этих частиц. Все элементарные частицы делятся на два больших класса по своей дискретной квантовой характеристике – спину, S, который принимает целочисленные значения $S = n$ – для бозонов и полуцелые значения $S = (2n + 1)/2$ – для фермионов. Бозонами являются, например, Хиггсовы бозоны H, а также W, Z $(S = 0)$; глюоны g фотоны γ $(S = 1)$; гравитоны g $(S = 2)$ и др. Фермионами являются, например, электроны и позитроны $S = 1/2$; протоны и нейтроны с их античастицами p, n $(S = 1/2)$; нейтрино и антинейтрино $\nu_e, \nu_m u$ (S=1/2); ано- и като- кварки различных зарядов и цветов q $(s = 1/2)$.

[2] *Мы здесь не будем рассматривать самый ранний этап эволюции Вселенной, который по мнению многих ученых является квазивакуумным.*

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Поскольку при приближении к космологической сингулярности температура вещества – космологической плазмы, а стало быть, и кинетической энергии частиц, могла достигать сколь угодно больших значений, то при приближении к космологической сингулярности кинетическая энергия частиц рано или поздно превысит потенциальную энергию их связи, что приведет к распаду составных частиц на элементарные: молекул – на атомы; атомы – на электроны и ядра; ядра – на протоны и нейтроны и тд.. Поэтому при приближении к космологической сингулярности свойства космологической плазмы определяются физикой элементарных частиц при высоких энергиях: именно в этом пункте происходит стыковка физики микромира и физики макромира. Вселенная представляет собой естественный гигантский ускоритель частиц, дающий нам все более высокие энергии частиц, чем ближе мы подступаем к исследованию ее начала[2]
- Поскольку мы здесь рассматриваем космологическую плазму, состоящую из элементарных частиц, нам необходимо перейти к квантовостатистическому описанию этих частиц. Все элементарные частицы делятся на два больших класса по своей дискретной квантовой характеристике – спину, S, который принимает целочисленные значения $S = n$ – для бозонов и полуцелые значения $S = (2n + 1)/2$ – для фермионов. Бозонами являются, например, Хиггсовы бозоны H, а также W, Z $(S = 0)$; глюоны g фотоны γ $(S = 1)$; гравитоны g $(S = 2)$ и др. Фермионами являются, например, электроны и позитроны $S = 1/2$; протоны и нейтроны с их античастицами p, n $(S = 1/2)$; нейтрино и антинейтрино $\nu_e, \nu_m u$ (S=1/2); ано- и като- кварки различных зарядов и цветов q $(s = 1/2)$.

[2] *Мы здесь не будем рассматривать самый ранний этап эволюции Вселенной, который по мнению многих ученых является квазивакуумным.*

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Поскольку при приближении к космологической сингулярности температура вещества – космологической плазмы, а стало быть, и кинетической энергии частиц, могла достигать сколь угодно больших значений, то при приближении к космологической сингулярности кинетическая энергия частиц рано или поздно превысит потенциальную энергию их связи, что приведет к распаду составных частиц на элементарные: молекул – на атомы; атомы – на электроны и ядра; ядра – на протоны и нейтроны и тд.. Поэтому при приближении к космологической сингулярности свойства космологической плазмы определяются физикой элементарных частиц при высоких энергиях: именно в этом пункте происходит стыковка физики микромира и физики макромира. Вселенная представляет собой естественный гигантский ускоритель частиц, дающий нам все более высокие энергии частиц, чем ближе мы подступаем к исследованию ее начала[2]
- Поскольку мы здесь рассматриваем космологическую плазму, состоящую из элементарных частиц, нам необходимо перейти к квантовостатистическому описанию этих частиц. Все элементарные частицы делятся на два больших класса по своей дискретной квантовой характеристике – спину, S, который принимает целочисленные значения $S = n$ – для бозонов и полуцелые значения $S = (2n + 1)/2$ – для фермионов. Бозонами являются, например, Хиггсовы бозоны H, а также W, Z $(S = 0)$; глюоны g фотоны γ $(S = 1)$; гравитоны g $(S = 2)$ и др. Фермионами являются, например, электроны и позитроны $S = 1/2$; протоны и нейтроны с их античастицами p, n $(S = 1/2)$; нейтрино и антинейтрино $\nu_e, \nu_m u$ (S=1/2); ано- и като- кварки различных зарядов и цветов q $(s = 1/2)$.

[2] *Мы здесь не будем рассматривать самый ранний этап эволюции Вселенной, который по мнению многих ученых является квазивакуумным.*

Ферми и Бозе газы элементарных частиц

- Фермионы и бозоны подчиняются статистике Ферми и Бозе, соответственно. В частности, равновесные распределения частиц описываются не классическим распределением Максвелла-Больцмана (2), а распределениями Ферми и Бозе:

$$f_0(p) = \frac{2S+1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu + c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{T}\right) \pm 1}, \tag{25}$$

  где μ – химический потенциал, знак «-» соответствует бозонам, «+» – фермионам.
- Пусть в равновесной плазме протекают реакции с участием элементарных частиц a, b, c, d:

$$a + b \rightleftarrows c + d. \tag{26}$$

  Тогда химические потенциалы этих частиц удовлетворяют условиям химического равновесия:

$$\mu_a + \mu_b = \mu_c + \mu_d. \tag{27}$$

- В принципе, при высоких энергиях могут протекать любые реакции с элементарными частицами. Единственным ограничением на алгебру взаимодействий является некоторый набор законов сохранения квантовых чисел, например, спина, электрического, лептонного и барионного зарядов, цвета и т.п. Так, например, электроны и нейтрино являются лептонами, а нейтроны и протоны – барионами. Эти законы сохранения запрещают, например, реакцию $p + e \rightleftarrows n$ вследствие нарушения закона сохранения лептонного заряда, но разрешают реакцию $p + e \rightleftarrows n + \nu_e$ (урка-процесс).
- С другой стороны, все указанные квантовые числа, кроме спина, включая и массу покоя, для фотонов равны нулю. Это означает, что число фотонов в различных реакциях может быть произвольным при условии сохранения суммарного спина. Так, например, возможны следующие реакции аннигиляции электрона и позитрона:

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Ферми и Бозе газы элементарных частиц

- Фермионы и бозоны подчиняются статистике Ферми и Бозе, соответственно. В частности, равновесные распределения частиц описываются не классическим распределением Максвелла-Больцмана (2), а распределениями Ферми и Бозе:

$$f_0(p) = \frac{2S+1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu + c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{T}\right) \pm 1}, \tag{25}$$

  где μ – химический потенциал, знак «-» соответствует бозонам, «+» – фермионам.
- Пусть в равновесной плазме протекают реакции с участием элементарных частиц a, b, c, d:

$$a + b \rightleftarrows c + d$$

  Тогда химические потенциалы этих частиц удовлетворяют условиям химического равновесия:

$$\mu_a + \mu_b = \mu_c + \mu_d$$

- В принципе, при высоких энергиях могут протекать любые реакции с элементарными частицами. Единственным ограничением на алгебру взаимодействий является некоторый набор законов сохранения квантовых чисел, например, спина, электрического, лептонного и барионного зарядов, цвета и т.п. Так, например, электроны и нейтрино являются лептонами, а нейтроны и протоны – барионами. Эти законы сохранения запрещают, например, реакцию $p + e \rightleftarrows n$ вследствие нарушения закона сохранения лептонного заряда, но разрешают реакцию $p + e \rightleftarrows n + \nu_e$ (урка-процесс).
- С другой стороны, все указанные квантовые числа, кроме спина, включая и массу покоя, для фотонов равны нулю. Это означает, что число фотонов в различных реакциях может быть произвольным при условии сохранения суммарного спина. Так, например, возможны следующие реакции аннигиляции электрона и позитрона:

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Ферми и Бозе газы элементарных частиц

- Фермионы и бозоны подчиняются статистике Ферми и Бозе, соответственно. В частности, равновесные распределения частиц описываются не классическим распределением Максвелла-Больцмана (2), а распределениями Ферми и Бозе:

$$f_0(p) = \frac{2S+1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu + c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{T}\right) \pm 1}, \tag{25}$$

где μ – химический потенциал, знак «-» соответствует бозонам, «+» – фермионам.

- Пусть в равновесной плазме протекают реакции с участием элементарных частиц a, b, c, d:

$$a + b \rightleftarrows c + d. \tag{26}$$

Тогда химические потенциалы этих частиц удовлетворяют условиям химического равновесия:

$$\mu_a + \mu_b = \mu_c + \mu_d. \tag{27}$$

- В принципе, при высоких энергиях могут протекать любые реакции с элементарными частицами. Единственным ограничением на алгебру взаимодействий является некоторый набор законов сохранения квантовых чисел, например, спина, электрического, лептонного и барионного зарядов, цвета и т.п. Так, например, электроны и нейтрино являются лептонами, а нейтроны и протоны – барионами. Эти законы сохранения запрещают, например, реакцию $p + e \rightleftarrows n$ вследствие нарушения закона сохранения лептонного заряда, но разрешают реакцию $p + e \rightleftarrows n + \nu_e$ (урка-процесс).
- С другой стороны, все указанные квантовые числа, кроме спина, включая и массу покоя, для фотонов равны нулю. Это означает, что число фотонов в различных реакциях может быть произвольным при условии сохранения суммарного спина. Так, например, возможны следующие реакции аннигиляции электрона и позитрона:

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Ферми и Бозе газы элементарных частиц

- Фермионы и бозоны подчиняются статистике Ферми и Бозе, соответственно. В частности, равновесные распределения частиц описываются не классическим распределением Максвелла-Больцмана (2), а распределениями Ферми и Бозе:

$$f_0(p) = \frac{2S+1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu + c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{T}\right) \pm 1}, \tag{25}$$

где μ – химический потенциал, знак «-» соответствует бозонам, «+» – фермионам.

- Пусть в равновесной плазме протекают реакции с участием элементарных частиц a, b, c, d:

$$a + b \rightleftarrows c + d. \tag{26}$$

Тогда химические потенциалы этих частиц удовлетворяют условиям химического равновесия:

$$\mu_a + \mu_b = \mu_c + \mu_d. \tag{27}$$

- В принципе, при высоких энергиях могут протекать любые реакции с элементарными частицами. Единственным ограничением на алгебру взаимодействий является некоторый набор законов сохранения квантовых чисел, например, спина, электрического, лептонного и барионного зарядов, цвета и т.п. Так, например, электроны и нейтрино являются лептонами, а нейтроны и протоны – барионами. Эти законы сохранения запрещают, например, реакцию $p + e \rightleftarrows n$ вследствие нарушения закона сохранения лептонного заряда, но разрешают реакцию $p + e \rightleftarrows n + \nu_e$ (урка-процесс).
- С другой стороны, все указанные квантовые числа, кроме спина, включая и массу покоя, для фотонов равны нулю. Это означает, что число фотонов в различных реакциях может быть произвольным при условии сохранения суммарного спина. Так, например, возможны следующие реакции аннигиляции электрона и позитрона:

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Ферми и Бозе газы элементарных частиц

- Фермионы и бозоны подчиняются статистике Ферми и Бозе, соответственно. В частности, равновесные распределения частиц описываются не классическим распределением Максвелла-Больцмана (2), а распределениями Ферми и Бозе:
$$f_0(p) = \frac{2S+1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu + c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{T}\right) \pm 1}, \tag{25}$$
где μ – химический потенциал, знак «-» соответствует бозонам, «+» – фермионам.
- Пусть в равновесной плазме протекают реакции с участием элементарных частиц a, b, c, d:
$$a + b \rightleftarrows c + d. \tag{26}$$
Тогда химические потенциалы этих частиц удовлетворяют условиям химического равновесия:
$$\mu_a + \mu_b = \mu_c + \mu_d. \tag{27}$$
- В принципе, при высоких энергиях могут протекать любые реакции с элементарными частицами. Единственным ограничением на алгебру взаимодействий является некоторый набор законов сохранения квантовых чисел, например, спина, электрического, лептонного и барионного зарядов, цвета и т.п. Так, например, электроны и нейтрино являются лептонами, а нейтроны и протоны – барионами. Эти законы сохранения запрещают, например, реакцию $p + e \rightleftarrows n$ вследствие нарушения закона сохранения лептонного заряда, но разрешают реакцию $p + e \rightleftarrows n + \nu_e$ (урка-процесс).
- С другой стороны, все указанные квантовые числа, кроме спина, включая и массу покоя, для фотонов равны нулю. Это означает, что число фотонов в различных реакциях может быть произвольным при условии сохранения суммарного спина. Так, например, возможны следующие реакции аннигиляции электрона и позитрона:

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Ферми и Бозе газы элементарных частиц

- Фермионы и бозоны подчиняются статистике Ферми и Бозе, соответственно. В частности, равновесные распределения частиц описываются не классическим распределением Максвелла-Больцмана (2), а распределениями Ферми и Бозе:
$$f_0(p) = \frac{2S+1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu + c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{T}\right) \pm 1}, \tag{25}$$
где μ – химический потенциал, знак «-» соответствует бозонам, «+» – фермионам.
- Пусть в равновесной плазме протекают реакции с участием элементарных частиц a, b, c, d:
$$a + b \rightleftarrows c + d. \tag{26}$$
Тогда химические потенциалы этих частиц удовлетворяют условиям химического равновесия:
$$\mu_a + \mu_b = \mu_c + \mu_d. \tag{27}$$
- В принципе, при высоких энергиях могут протекать любые реакции с элементарными частицами. Единственным ограничением на алгебру взаимодействий является некоторый набор законов сохранения квантовых чисел, например, спина, электрического, лептонного и барионного зарядов, цвета и т.п. Так, например, электроны и нейтрино являются лептонами, а нейтроны и протоны – барионами. Эти законы сохранения запрещают, например, реакцию $p + e \rightleftarrows n$ вследствие нарушения закона сохранения лептонного заряда, но разрешают реакцию $p + e \rightleftarrows n + \nu_e$ (урка-процесс).
- С другой стороны, все указанные квантовые числа, кроме спина, включая и массу покоя, для фотонов равны нулю. Это означает, что число фотонов в различных реакциях может быть произвольным при условии сохранения суммарного спина. Так, например, возможны следующие реакции аннигиляции электрона и позитрона:

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Ферми и Бозе газы элементарных частиц

- Фермионы и бозоны подчиняются статистике Ферми и Бозе, соответственно. В частности, равновесные распределения частиц описываются не классическим распределением Максвелла-Больцмана (2), а распределениями Ферми и Бозе:
$$f_0(p) = \frac{2S+1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu + c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{T}\right) \pm 1}, \tag{25}$$
где μ – химический потенциал, знак «-» соответствует бозонам, «+» – фермионам.
- Пусть в равновесной плазме протекают реакции с участием элементарных частиц a, b, c, d:
$$a + b \rightleftarrows c + d. \tag{26}$$
Тогда химические потенциалы этих частиц удовлетворяют условиям химического равновесия:
$$\mu_a + \mu_b = \mu_c + \mu_d. \tag{27}$$
- В принципе, при высоких энергиях могут протекать любые реакции с элементарными частицами. Единственным ограничением на алгебру взаимодействий является некоторый набор законов сохранения квантовых чисел, например, спина, электрического, лептонного и барионного зарядов, цвета и т.п. Так, например, электроны и нейтрино являются лептонами, а нейтроны и протоны – барионами. Эти законы сохранения запрещают, например, реакцию $p + e \rightleftarrows n$ вследствие нарушения закона сохранения лептонного заряда, но разрешают реакцию $p + e \rightleftarrows n + \nu_e$ (урка-процесс).
- С другой стороны, все указанные квантовые числа, кроме спина, включая и массу покоя, для фотонов равны нулю. Это означает, что число фотонов в различных реакциях может быть произвольным при условии сохранения суммарного спина. Так, например, возможны следующие реакции аннигиляции электрона и позитрона:
$$e + \bar{e} = \gamma; \; e + \bar{e} = \gamma + \gamma; \; e + \bar{e} = \gamma + \gamma + \gamma;$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Ферми и Бозе газы элементарных частиц

- Фермионы и бозоны подчиняются статистике Ферми и Бозе, соответственно. В частности, равновесные распределения частиц описываются не классическим распределением Максвелла-Больцмана (2), а распределениями Ферми и Бозе:
$$f_0(p) = \frac{2S+1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu + c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{T}\right) \pm 1}, \tag{25}$$
где μ – химический потенциал, знак «-» соответствует бозонам, «+» – фермионам.
- Пусть в равновесной плазме протекают реакции с участием элементарных частиц a, b, c, d:
$$a + b \rightleftarrows c + d. \tag{26}$$
Тогда химические потенциалы этих частиц удовлетворяют условиям химического равновесия:
$$\mu_a + \mu_b = \mu_c + \mu_d. \tag{27}$$
- В принципе, при высоких энергиях могут протекать любые реакции с элементарными частицами. Единственным ограничением на алгебру взаимодействий является некоторый набор законов сохранения квантовых чисел, например, спина, электрического, лептонного и барионного зарядов, цвета и т.п. Так, например, электроны и нейтрино являются лептонами, а нейтроны и протоны – барионами. Эти законы сохранения запрещают, например, реакцию $p + e \rightleftarrows n$ вследствие нарушения закона сохранения лептонного заряда, но разрешают реакцию $p + e \rightleftarrows n + \nu_e$ (урка-процесс).
- С другой стороны, все указанные квантовые числа, кроме спина, включая и массу покоя, для фотонов равны нулю. Это означает, что число фотонов в различных реакциях может быть произвольным при условии сохранения суммарного спина. Так, например, возможны следующие реакции аннигиляции электрона и позитрона:
$$e + \bar{e} = \gamma; \; e + \bar{e} = \gamma + \gamma; \; e + \bar{e} = \gamma + \gamma + \gamma \tag{28}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

Ферми и Бозе газы элементарных частиц

- Фермионы и бозоны подчиняются статистике Ферми и Бозе, соответственно. В частности, равновесные распределения частиц описываются не классическим распределением Максвелла-Больцмана (2), а распределениями Ферми и Бозе:
$$f_0(p) = \frac{2S+1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{-\mu + c\sqrt{m^2c^2+p^2}}{T}\right) \pm 1}, \tag{25}$$
где μ – химический потенциал, знак «-» соответствует бозонам, «+» – фермионам.
- Пусть в равновесной плазме протекают реакции с участием элементарных частиц a, b, c, d:
$$a + b \rightleftarrows c + d. \tag{26}$$
Тогда химические потенциалы этих частиц удовлетворяют условиям химического равновесия:
$$\mu_a + \mu_b = \mu_c + \mu_d. \tag{27}$$
- В принципе, при высоких энергиях могут протекать любые реакции с элементарными частицами. Единственным ограничением на алгебру взаимодействий является некоторый набор законов сохранения квантовых чисел, например, спина, электрического, лептонного и барионного зарядов, цвета и т.п. Так, например, электроны и нейтрино являются лептонами, а нейтроны и протоны – барионами. Эти законы сохранения запрещают, например, реакцию $p + e \rightleftarrows n$ вследствие нарушения закона сохранения лептонного заряда, но разрешают реакцию $p + e \rightleftarrows n + \nu_e$ (урка-процесс).
- С другой стороны, все указанные квантовые числа, кроме спина, включая и массу покоя, для фотонов равны нулю. Это означает, что число фотонов в различных реакциях может быть произвольным при условии сохранения суммарного спина. Так, например, возможны следующие реакции аннигиляции электрона и позитрона:
$$e + \bar{e} = \gamma;\ e + \bar{e} = \gamma + \gamma;\ e + \bar{e} = \gamma + \gamma + \gamma; \ldots \tag{28}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Поэтому, если электроны, позитроны и фотоны находятся в термодинамическом равновесии, согласно (27) должны выполняться следующие условия химического равновесия для реакций (28):

$$\mu_e + \bar{\mu}_e = \mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 2\mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 3\mu_\gamma;\ \ldots \qquad (29)$$

- Очевидно, что единственным решением этой системы уравнений является $\mu_\gamma = 0$. Отсюда получаем следующее важное следствие:

В условиях термодинамического равновесия химический потенциал фотонов равен нулю, а химические потенциалы частиц и античастиц противоположны:

$$\mu_e = -\bar{\mu}_e. \qquad (30)$$

- Таким образом, в космологической плазме:

$$\mu_\gamma = 0, \qquad (31)$$

- Таким образом, производя замену переменной $cp/T = x$, получим макроскопические скаляры (5) – (7) для фотонов в космологической плазме при температуре $T > m_e c^2$:

$$n_\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 2\zeta(3); \quad (32)$$

$$\varepsilon_\gamma(t) = 3P^\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 6\zeta(4), \quad (33)$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Поэтому, если электроны, позитроны и фотоны находятся в термодинамическом равновесии, согласно (27) должны выполняться следующие условия химического равновесия для реакций (28):

$$\mu_e + \bar{\mu}_e = \mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 2\mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 3\mu_\gamma; \ldots \tag{29}$$

- Очевидно, что единственным решением этой системы уравнений является $\mu_\gamma = 0$. Отсюда получаем следующее важное следствие:

В условиях термодинамического равновесия химический потенциал фотонов равен нулю, а химические потенциалы частиц и античастиц противоположны:

$$\mu_e = -\bar{\mu}_e, \quad \mu_p = -\bar{\mu}_p, \quad \mu_n = -\bar{\mu}_n, \quad \mu_\nu = -\bar{\mu}_\nu. \tag{30}$$

- Таким образом, в космологической плазме:

$$\mu_\gamma = 0, \quad \mu_e = -\bar{\mu}_e, \quad \mu_p = -\bar{\mu}_p, \quad \mu_n = -\bar{\mu}_n, \quad \mu_\nu = -\bar{\mu}_\nu. \tag{31}$$

- Таким образом, производя замену переменной $cp/T = x$, получим макроскопические скаляры (5) – (7) для фотонов в космологической плазме при температуре $T > m_e c^2$:

$$n_\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 2\zeta(3); \tag{32}$$

$$\varepsilon_\gamma(t) = 3P^\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 6\zeta(4), \tag{33}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Поэтому, если электроны, позитроны и фотоны находятся в термодинамическом равновесии, согласно (27) должны выполняться следующие условия химического равновесия для реакций (28):

$$\mu_e + \bar{\mu}_e = \mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 2\mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 3\mu_\gamma; \ldots. \tag{29}$$

- Очевидно, что единственным решением этой системы уравнений является $\mu_\gamma = 0$. Отсюда получаем следующее важное следствие:

В условиях термодинамического равновесия химический потенциал фотонов равен нулю, а химические потенциалы частиц и античастиц противоположны:

$$\mu_\gamma = 0; \quad \bar{\mu} = -\mu. \tag{30}$$

- Таким образом, в космологической плазме:

$$f_\gamma^0(t,p) = \frac{1}{\mathrm{e}^{cp/T} - 1}. \tag{31}$$

- Таким образом, производя замену переменной $cp/T = x$, получим макроскопические скаляры (5) – (7) для фотонов в космологической плазме при температуре $T > m_e c^2$:

$$n_\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_\gamma^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 2\zeta(3); \tag{32}$$

$$\varepsilon_\gamma(t) = 3P^\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_\gamma^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 6\zeta(4), \tag{33}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Поэтому, если электроны, позитроны и фотоны находятся в термодинамическом равновесии, согласно (27) должны выполняться следующие условия химического равновесия для реакций (28):

$$\mu_e + \bar{\mu}_e = \mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 2\mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 3\mu_\gamma; \ldots. \tag{29}$$

- Очевидно, что единственным решением этой системы уравнений является $\mu_\gamma = 0$. Отсюда получаем следующее важное следствие:

В условиях термодинамического равновесия химический потенциал фотонов равен нулю, а химические потенциалы частиц и античастиц противоположны:

$$\mu_\gamma = 0; \quad \bar{\mu} = -\mu. \tag{30}$$

- Таким образом, в космологической плазме:

$$\mathbf{S}_\gamma = \mathbf{S}_{\bar{\gamma}} = \mathbf{S}_{\bar{e}} = \mathbf{S}_e = \mathbf{S}_{\bar{\nu}} = \mathbf{S}_\nu = \mathbf{S}_{\bar{\mu}} = \mathbf{S}_\mu = \mathbf{S}_{\bar{\tau}} = \mathbf{S}_\tau = \mathbf{S}_{\bar{p}} = \mathbf{S}_p = \mathbf{S}_{\bar{n}} = \mathbf{S}_n = \mathbf{S}_{\bar{\alpha}} = \mathbf{S}_\alpha = \mathbf{S}_{\bar{D}} = \mathbf{S}_D = \mathbf{S}_{\bar{T}} = \mathbf{S}_T = \mathbf{S}_{\bar{He}} = \mathbf{S}_{He} = \mathbf{S}_{\bar{Li}} = \mathbf{S}_{Li} = \mathbf{S}_{\bar{Be}} = \mathbf{S}_{Be} = \mathbf{S}_{\bar{B}} = \mathbf{S}_B = \mathbf{S}_{\bar{C}} = \mathbf{S}_C = \mathbf{S}_{\bar{N}} = \mathbf{S}_N = \mathbf{S}_{\bar{O}} = \mathbf{S}_O = \mathbf{S}_{\bar{F}} = \mathbf{S}_F = \mathbf{S}_{\bar{Ne}} = \mathbf{S}_{Ne} = \mathbf{S}_{\bar{Na}} = \mathbf{S}_{Na} = \mathbf{S}_{\bar{Mg}} = \mathbf{S}_{Mg} = \mathbf{S}_{\bar{Al}} = \mathbf{S}_{Al} = \mathbf{S}_{\bar{Si}} = \mathbf{S}_{Si} = \mathbf{S}_{\bar{P}} = \mathbf{S}_P = \mathbf{S}_{\bar{S}} = \mathbf{S}_S = \mathbf{S}_{\bar{Cl}} = \mathbf{S}_{Cl} = \mathbf{S}_{\bar{Ar}} = \mathbf{S}_{Ar} = \mathbf{S}_{\bar{K}} = \mathbf{S}_K = \mathbf{S}_{\bar{Ca}} = \mathbf{S}_{Ca} = \mathbf{S}_{\bar{Sc}} = \mathbf{S}_{Sc} = \mathbf{S}_{\bar{Ti}} = \mathbf{S}_{Ti} = \mathbf{S}_{\bar{V}} = \mathbf{S}_V = \mathbf{S}_{\bar{Cr}} = \mathbf{S}_{Cr} = \mathbf{S}_{\bar{Mn}} = \mathbf{S}_{Mn} = \mathbf{S}_{\bar{Fe}} = \mathbf{S}_{Fe} = \mathbf{S}_{\bar{Co}} = \mathbf{S}_{Co} = \mathbf{S}_{\bar{Ni}} = \mathbf{S}_{Ni} = \mathbf{S}_{\bar{Cu}} = \mathbf{S}_{Cu} = \mathbf{S}_{\bar{Zn}} = \mathbf{S}_{Zn} = \mathbf{S}_{\bar{Ga}} = \mathbf{S}_{Ga} = \mathbf{S}_{\bar{Ge}} = \mathbf{S}_{Ge} = \mathbf{S}_{\bar{As}} = \mathbf{S}_{As} = \mathbf{S}_{\bar{Se}} = \mathbf{S}_{Se} = \mathbf{S}_{\bar{Br}} = \mathbf{S}_{Br} = \mathbf{S}_{\bar{Kr}} = \mathbf{S}_{Kr} = \mathbf{S}_{\bar{Rb}} = \mathbf{S}_{Rb} = \mathbf{S}_{\bar{Sr}} = \mathbf{S}_{Sr} = \mathbf{S}_{\bar{Y}} = \mathbf{S}_Y = \mathbf{S}_{\bar{Zr}} = \mathbf{S}_{Zr} = \mathbf{S}_{\bar{Nb}} = \mathbf{S}_{Nb} = \mathbf{S}_{\bar{Mo}} = \mathbf{S}_{Mo} = \mathbf{S}_{\bar{Tc}} = \mathbf{S}_{Tc} = \mathbf{S}_{\bar{Ru}} = \mathbf{S}_{Ru} = \mathbf{S}_{\bar{Rh}} = \mathbf{S}_{Rh} = \mathbf{S}_{\bar{Pd}} = \mathbf{S}_{Pd} = \mathbf{S}_{\bar{Ag}} = \mathbf{S}_{Ag} = \mathbf{S}_{\bar{Cd}} = \mathbf{S}_{Cd} = \mathbf{S}_{\bar{In}} = \mathbf{S}_{In} = \mathbf{S}_{\bar{Sn}} = \mathbf{S}_{Sn} = \mathbf{S}_{\bar{Sb}} = \mathbf{S}_{Sb} = \mathbf{S}_{\bar{Te}} = \mathbf{S}_{Te} = \mathbf{S}_{\bar{I}} = \mathbf{S}_I = \mathbf{S}_{\bar{Xe}} = \mathbf{S}_{Xe} = \mathbf{S}_{\bar{Cs}} = \mathbf{S}_{Cs} = \mathbf{S}_{\bar{Ba}} = \mathbf{S}_{Ba} = \mathbf{S}_{\bar{La}} = \mathbf{S}_{La} = \mathbf{S}_{\bar{Ce}} = \mathbf{S}_{Ce} = \mathbf{S}_{\bar{Pr}} = \mathbf{S}_{Pr} = \mathbf{S}_{\bar{Nd}} = \mathbf{S}_{Nd} = \mathbf{S}_{\bar{Pm}} = \mathbf{S}_{Pm} = \mathbf{S}_{\bar{Sm}} = \mathbf{S}_{Sm} = \mathbf{S}_{\bar{Eu}} = \mathbf{S}_{Eu} = \mathbf{S}_{\bar{Gd}} = \mathbf{S}_{Gd} = \mathbf{S}_{\bar{Tb}} = \mathbf{S}_{Tb} = \mathbf{S}_{\bar{Dy}} = \mathbf{S}_{Dy} = \mathbf{S}_{\bar{Ho}} = \mathbf{S}_{Ho} = \mathbf{S}_{\bar{Er}} = \mathbf{S}_{Er} = \mathbf{S}_{\bar{Tm}} = \mathbf{S}_{Tm} = \mathbf{S}_{\bar{Yb}} = \mathbf{S}_{Yb} = \mathbf{S}_{\bar{Lu}} = \mathbf{S}_{Lu} = \mathbf{S}_{\bar{Hf}} = \mathbf{S}_{Hf} = \mathbf{S}_{\bar{Ta}} = \mathbf{S}_{Ta} = \mathbf{S}_{\bar{W}} = \mathbf{S}_W = \mathbf{S}_{\bar{Re}} = \mathbf{S}_{Re} = \mathbf{S}_{\bar{Os}} = \mathbf{S}_{Os} = \mathbf{S}_{\bar{Ir}} = \mathbf{S}_{Ir} = \mathbf{S}_{\bar{Pt}} = \mathbf{S}_{Pt} = \mathbf{S}_{\bar{Au}} = \mathbf{S}_{Au} = \mathbf{S}_{\bar{Hg}} = \mathbf{S}_{Hg} = \mathbf{S}_{\bar{Tl}} = \mathbf{S}_{Tl} = \mathbf{S}_{\bar{Pb}} = \mathbf{S}_{Pb} = \mathbf{S}_{\bar{Bi}} = \mathbf{S}_{Bi} = \mathbf{S}_{\bar{Po}} = \mathbf{S}_{Po} = \mathbf{S}_{\bar{At}} = \mathbf{S}_{At} = \mathbf{S}_{\bar{Rn}} = \mathbf{S}_{Rn} = \mathbf{S}_{\bar{Fr}} = \mathbf{S}_{Fr} = \mathbf{S}_{\bar{Ra}} = \mathbf{S}_{Ra} = \mathbf{S}_{\bar{Ac}} = \mathbf{S}_{Ac} = \mathbf{S}_{\bar{Th}} = \mathbf{S}_{Th} = \mathbf{S}_{\bar{Pa}} = \mathbf{S}_{Pa} = \mathbf{S}_{\bar{U}} = \mathbf{S}_U = \mathbf{S}_{\bar{Np}} = \mathbf{S}_{Np} = \mathbf{S}_{\bar{Pu}} = \mathbf{S}_{Pu} = \mathbf{S}_{\bar{Am}} = \mathbf{S}_{Am} = \mathbf{S}_{\bar{Cm}} = \mathbf{S}_{Cm} = \mathbf{S}_{\bar{Bk}} = \mathbf{S}_{Bk} = \mathbf{S}_{\bar{Cf}} = \mathbf{S}_{Cf} = \mathbf{S}_{\bar{Es}} = \mathbf{S}_{Es} = \mathbf{S}_{\bar{Fm}} = \mathbf{S}_{Fm} = \mathbf{S}_{\bar{Md}} = \mathbf{S}_{Md} = \mathbf{S}_{\bar{No}} = \mathbf{S}_{No} = \mathbf{S}_{\bar{Lr}} = \mathbf{S}_{Lr} = \mathbf{S}_{\bar{Rf}} = \mathbf{S}_{Rf} = \mathbf{S}_{\bar{Db}} = \mathbf{S}_{Db} = \mathbf{S}_{\bar{Sg}} = \mathbf{S}_{Sg} = \mathbf{S}_{\bar{Bh}} = \mathbf{S}_{Bh} = \mathbf{S}_{\bar{Hs}} = \mathbf{S}_{Hs} = \mathbf{S}_{\bar{Mt}} = \mathbf{S}_{Mt} = \mathbf{S}_{\bar{Ds}} = \mathbf{S}_{Ds} = \mathbf{S}_{\bar{Rg}} = \mathbf{S}_{Rg} = \mathbf{S}_{\bar{Cn}} = \mathbf{S}_{Cn} = \mathbf{S}_{\bar{Nh}} = \mathbf{S}_{Nh} = \mathbf{S}_{\bar{Fl}} = \mathbf{S}_{Fl} = \mathbf{S}_{\bar{Mc}} = \mathbf{S}_{Mc} = \mathbf{S}_{\bar{Lv}} = \mathbf{S}_{Lv} = \mathbf{S}_{\bar{Ts}} = \mathbf{S}_{Ts} = \mathbf{S}_{\bar{Og}} = \mathbf{S}_{Og}$$

- Таким образом, производя замену переменной $cp/T = x$, получим макроскопические скаляры (5) – (7) для фотонов в космологической плазме при температуре $T > m_e c^2$:

$$n_\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 2\zeta(3); \tag{32}$$

$$\varepsilon_\gamma(t) = 3P^\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 6\zeta(4), \tag{33}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Поэтому, если электроны, позитроны и фотоны находятся в термодинамическом равновесии, согласно (27) должны выполняться следующие условия химического равновесия для реакций (28):

$$\mu_e + \bar{\mu}_e = \mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 2\mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 3\mu_\gamma; \ldots. \tag{29}$$

- Очевидно, что единственным решением этой системы уравнений является $\mu_\gamma = 0$. Отсюда получаем следующее важное следствие:

В условиях термодинамического равновесия химический потенциал фотонов равен нулю, а химические потенциалы частиц и античастиц противоположны:

$$\mu_\gamma = 0; \quad \bar{\mu} = -\mu. \tag{30}$$

- Таким образом, в космологической плазме:

$$f_\gamma^0(p) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{cp}{T}} - 1}. \tag{31}$$

- Таким образом, производя замену переменной $cp/T = x$, получим макроскопические скаляры (5) – (7) для фотонов в космологической плазме при температуре $T > m_e c^2$:

$$n_\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_\gamma^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 2\zeta(3); \tag{32}$$

$$\varepsilon_\gamma(t) = 3P^\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4}(p^4)^2 f_\gamma^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 6\zeta(4), \tag{33}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Поэтому, если электроны, позитроны и фотоны находятся в термодинамическом равновесии, согласно (27) должны выполняться следующие условия химического равновесия для реакций (28):

$$\mu_e + \bar{\mu}_e = \mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 2\mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 3\mu_\gamma; \ldots. \tag{29}$$

- Очевидно, что единственным решением этой системы уравнений является $\mu_\gamma = 0$. Отсюда получаем следующее важное следствие:

В условиях термодинамического равновесия химический потенциал фотонов равен нулю, а химические потенциалы частиц и античастиц противоположны:

$$\mu_\gamma = 0; \quad \bar{\mu} = -\mu. \tag{30}$$

- Таким образом, в космологической плазме:

$$f^0_\gamma(p) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{cp}{T}} - 1}, \tag{31}$$

- Таким образом, производя замену переменной $cp/T = x$, получим макроскопические скаляры (5) – (7) для фотонов в космологической плазме при температуре $T > m_e c^2$:

$$n_\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 2\zeta(3); \tag{32}$$

$$\varepsilon_\gamma(t) = 3P^\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4}(p^4)^2 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 6\zeta(4), \tag{33}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Поэтому, если электроны, позитроны и фотоны находятся в термодинамическом равновесии, согласно (27) должны выполняться следующие условия химического равновесия для реакций (28):

$$\mu_e + \bar{\mu}_e = \mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 2\mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 3\mu_\gamma; \ldots. \tag{29}$$

- Очевидно, что единственным решением этой системы уравнений является $\mu_\gamma = 0$. Отсюда получаем следующее важное следствие:

В условиях термодинамического равновесия химический потенциал фотонов равен нулю, а химические потенциалы частиц и античастиц противоположны:

$$\mu_\gamma = 0; \quad \bar{\mu} = -\mu. \tag{30}$$

- Таким образом, в космологической плазме:

$$f^0_\gamma(p) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{cp}{T}} - 1}, \tag{31}$$

- Таким образом, производя замену переменной $cp/T = x$, получим макроскопические скаляры (5) – (7) для фотонов в космологической плазме при температуре $T > m_e c^2$:

$$n_\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 2\zeta(3); \tag{32}$$

$$\varepsilon_\gamma(t) = 3P^\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4}(p^4)^2 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 6\zeta(4), \tag{33}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Поэтому, если электроны, позитроны и фотоны находятся в термодинамическом равновесии, согласно (27) должны выполняться следующие условия химического равновесия для реакций (28):

$$\mu_e + \bar{\mu}_e = \mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 2\mu_\gamma;\ \mu_e + \bar{\mu}_e = 3\mu_\gamma; \ldots \tag{29}$$

- Очевидно, что единственным решением этой системы уравнений является $\mu_\gamma = 0$. Отсюда получаем следующее важное следствие:

В условиях термодинамического равновесия химический потенциал фотонов равен нулю, а химические потенциалы частиц и античастиц противоположны:

$$\mu_\gamma = 0; \quad \bar{\mu} = -\mu. \tag{30}$$

- Таким образом, в космологической плазме:

$$f^0_\gamma(p) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{cp}{T}} - 1}, \tag{31}$$

- Таким образом, производя замену переменной $cp/T = x$, получим макроскопические скаляры (5) – (7) для фотонов в космологической плазме при температуре $T > m_e c^2$:

$$n_\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 2\zeta(3); \tag{32}$$

$$\varepsilon_\gamma(t) = 3P^\gamma(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4}(p^4)^2 f^0_\gamma(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x - 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 6\zeta(4), \tag{33}$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- где

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int\limits_0^\infty \frac{z^{x-1}dz}{e^z - 1} \qquad (34)$$

– ζ-функция Римана (см., например, И.С. Грандштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М:ГИФМЛ. – 1963. – 1100 с.).

- Для $x = 2m$ имеет место соотношение (см. там же):

$$\zeta(2m) = \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_m, \qquad (35)$$

где B_n – так называемые числа Бернулли (см. там же). Приведем частные значения функций $\zeta(x)$ и B_n (их можно вычислить в Maple):

-

$$B_1 = \frac{1}{6}; \quad B_3 = \frac{1}{30}; \qquad B_3 = \frac{1}{42}; \quad B_4 = \frac{1}{30},$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,612; \quad \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1,341; \quad \zeta(3) \approx 1,202; \quad \zeta(5) \approx 1,037.$$

- Рассмотрим теперь газ безмассовых Ферми-частиц с равным нулю химическим потенциалом. Проводя аналогичные вычисления, получим:

$$n_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \frac{3}{2}\zeta(3); \quad (36)$$

$$\varepsilon_F(t) = 3P_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \frac{21}{4}\zeta(4). \quad (37)$$

- где

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int\limits_0^\infty \frac{z^{x-1} dz}{\mathrm{e}^z - 1} \tag{34}$$

– ζ-функция Римана (см., например, И.С. Грандштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М:ГИФМЛ. – 1963. – 1100 с.).

- Для $x = 2m$ имеет место соотношение (см. там же):

$$\zeta(2m) = \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} \mathrm{B}_m \tag{35}$$

где B_n – так называемые числа Бернулли (см. там же). Приведем частные значения функций $\zeta(x)$ и B_n (их можно вычислить в Maple):

-

$$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{6}; \quad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{30}; \qquad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{42}; \quad \mathrm{B}_4 = \frac{1}{30},$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,612; \quad \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1,341; \quad \zeta(3) \approx 1,202; \quad \zeta(5) \approx 1,037.$$

- Рассмотрим теперь газ безмассовых Ферми-частиц с равным нулю химическим потенциалом. Проводя аналогичные вычисления, получим:

$$n_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \frac{3}{2}\zeta(3); \tag{36}$$

$$\varepsilon_F(t) = 3P_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \frac{21}{4}\zeta(4). \tag{37}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- где

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int\limits_0^\infty \frac{z^{x-1} dz}{\mathrm{e}^z - 1} \tag{34}$$

– ζ-функция Римана (см., например, И.С. Грандштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М:ГИФМЛ. – 1963. – 1100 с.).

- Для $x = 2m$ имеет место соотношение (см. там же):

$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!} \mathrm{B}_{2m}, \tag{35}$$

где B_n – так называемые числа Бернулли (см. там же). Приведем частные значения функций $\zeta(x)$ и B_n (их можно вычислить в Maple):

-

$$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{6}; \quad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{30}; \qquad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{42}; \quad \mathrm{B}_4 = \frac{1}{30},$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,612; \quad \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1,341; \quad \zeta(3) \approx 1,202; \quad \zeta(5) \approx 1,037.$$

- Рассмотрим теперь газ безмассовых Ферми-частиц с равным нулю химическим потенциалом. Проводя аналогичные вычисления, получим:

$$n_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \frac{3}{2}\zeta(3); \tag{36}$$

$$\varepsilon_F(t) = 3P_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \frac{21}{4}\zeta(4). \tag{37}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- где

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int\limits_0^\infty \frac{z^{x-1} dz}{\mathrm{e}^z - 1} \tag{34}$$

– ζ-функция Римана (см., например, И.С. Грандштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М:ГИФМЛ. – 1963. – 1100 с.).

- Для $x = 2m$ имеет место соотношение (см. там же):

$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!} \mathrm{B}_{2m}, \tag{35}$$

где B_n – так называемые числа Бернулли (см. там же). Приведем частные значения функций $\zeta(x)$ и B_n (их можно вычислить в Maple):

- $$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{6}; \quad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{30}; \qquad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{42}; \quad \mathrm{B}_4 = \frac{1}{30},$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,612; \quad \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1,341; \quad \zeta(3) \approx 1,202; \quad \zeta(5) \approx 1,037.$$

- Рассмотрим теперь газ безмассовых Ферми-частиц с равным нулю химическим потенциалом. Проводя аналогичные вычисления, получим:

$$n_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \frac{3}{2}\zeta(3); \tag{36}$$

$$\varepsilon_F(t) = 3P_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \frac{21}{4}\zeta(4). \tag{37}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- где

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int\limits_0^\infty \frac{z^{x-1} dz}{\mathrm{e}^z - 1} \tag{34}$$

– ζ-функция Римана (см., например, И.С. Грандштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М:ГИФМЛ. – 1963. – 1100 с.).

- Для $x = 2m$ имеет место соотношение (см. там же):

$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!} \mathrm{B}_{2m}, \tag{35}$$

где B_n – так называемые числа Бернулли (см. там же). Приведем частные значения функций $\zeta(x)$ и B_n (их можно вычислить в Maple):

- $$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{6}; \quad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{30}; \qquad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{42}; \quad \mathrm{B}_4 = \frac{1}{30},$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,612; \quad \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1,341; \quad \zeta(3) \approx 1,202; \quad \zeta(5) \approx 1,037.$$

- Рассмотрим теперь газ безмассовых Ферми-частиц с равным нулю химическим потенциалом. Проводя аналогичные вычисления, получим:

$$n_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \frac{3}{2}\zeta(3); \tag{36}$$

$$\varepsilon_F(t) = 3P_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \frac{21}{4}\zeta(4). \tag{37}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- где

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int\limits_0^\infty \frac{z^{x-1} dz}{\mathrm{e}^z - 1} \tag{34}$$

– ζ-функция Римана (см., например, И.С. Грандштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М:ГИФМЛ. – 1963. – 1100 с.).

- Для $x = 2m$ имеет место соотношение (см. там же):

$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!} \mathrm{B}_{2m}, \tag{35}$$

где B_n – так называемые числа Бернулли (см. там же). Приведем частные значения функций $\zeta(x)$ и B_n (их можно вычислить в Maple):

- $$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{6}; \quad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{30}; \qquad \mathrm{B}_3 = \tfrac{1}{42}; \quad \mathrm{B}_4 = \tfrac{1}{30},$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,612; \quad \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1,341; \quad \zeta(3) \approx 1,202; \quad \zeta(5) \approx 1,037.$$

- Рассмотрим теперь газ безмассовых Ферми-частиц с равным нулю химическим потенциалом. Проводя аналогичные вычисления, получим:

$$n_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \frac{3}{2}\zeta(3); \tag{36}$$

$$\varepsilon_F(t) = 3P_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} (p^4)^2 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \frac{21}{4}\zeta(4). \tag{37}$$

© Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- где
$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int\limits_0^\infty \frac{z^{x-1}dz}{\mathrm{e}^z - 1} \tag{34}$$
– ζ-функция Римана (см., например, И.С. Грандштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М:ГИФМЛ. – 1963. – 1100 с.).
- Для $x = 2m$ имеет место соотношение (см. там же):
$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!}\mathrm{B}_{2m}, \tag{35}$$
где B_n – так называемые числа Бернулли (см. там же). Приведем частные значения функций $\zeta(x)$ и B_n (их можно вычислить в Maple):
- $$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{6}; \quad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{30}; \qquad \mathrm{B}_3 = \tfrac{1}{42}; \quad \mathrm{B}_4 = \tfrac{1}{30},$$
$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,612; \quad \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1,341; \quad \zeta(3) \approx 1,202; \quad \zeta(5) \approx 1,037.$$
- Рассмотрим теперь газ безмассовых Ферми-частиц с равным нулю химическим потенциалом. Проводя аналогичные вычисления, получим:
$$n_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4} p^4 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \frac{3}{2}\zeta(3); \tag{36}$$
$$\varepsilon_F(t) = 3P_F(t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^4}(p^4)^2 f_F^0(t,p) = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \int\limits_0^\infty \frac{x^3dx}{\mathrm{e}^x + 1} = \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \frac{21}{4}\zeta(4). \tag{37}$$

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, получим окончательно для плотности энергии газа элементарных частиц:

$$\varepsilon_\gamma = \frac{\pi^4}{15}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4; \quad \varepsilon_F = \frac{7}{8}\frac{\pi^4}{15}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \Rightarrow \tag{38}$$

$$\varepsilon = \frac{\pi^4}{15}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4\left(\sum_B \frac{2S+1}{2} + \frac{7}{8}\sum_F \frac{2S+1}{2}\right), \tag{39}$$

где суммирование проходит по всем бозонам и фермионам.

-

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, получим окончательно для плотности энергии газа элементарных частиц:

$$\varepsilon_\gamma = \frac{\pi^4}{15}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4; \quad \varepsilon_F = \frac{7}{8}\frac{\pi^4}{15}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \Rightarrow \tag{38}$$

$$\varepsilon = \frac{\pi^4}{15}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4\left(\sum_B \frac{2S+1}{2} + \frac{7}{8}\sum_F \frac{2S+1}{2}\right), \tag{39}$$

где суммирование проходит по всем бозонам и фермионам.

@ Professor Yurii G. Ignat'ev, Kazan Federal University

- Таким образом, получим окончательно для плотности энергии газа элементарных частиц:

$$\varepsilon_\gamma = \frac{\pi^4}{15}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4; \quad \varepsilon_F = \frac{7}{8}\frac{\pi^4}{15}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4 \Rightarrow \tag{38}$$

$$\varepsilon = \frac{\pi^4}{15}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^4\left(\sum_B \frac{2S+1}{2} + \frac{7}{8}\sum_F \frac{2S+1}{2}\right), \tag{39}$$

где суммирование проходит по всем бозонам и фермионам.

-