

УДК 372.851
ББК 74.262.21

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ ВЫЗОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Л. Р. Шакирова, М. В. Фалилеева

Аннотация. В статье рассматривается интеллектуальный вызов как один из приемов стимулирования познавательной деятельности учащихся средней школы. Выделены психологические характеристики и методические особенности деятельности учителя, способного «принимать и бросать» интеллектуальный вызов учащимся в процессе решения математических задач. В исследовании, предусматривающем изучение умения диагностировать задачи по уровню трудности, составлять их и применять на уроках задачи с возрастающим уровнем трудности, в том числе исследовательского типа, приняли участие 25 учителей математики г. Казани. В работе использовались смешанные методы исследования (наблюдение, анкетирование, интервьюирование, анализ уроков). Результаты исследования показали, что даже при достаточно высоком уровне предметно-методической подготовки большинство учителей не готовы к интеллектуальному вызову. Участники испытывали затруднения при проектировании задач, требующих не только качественного понимания учебного материала, но и творческого его использования. Лишь небольшая часть учителей способна бросать интеллектуальный вызов учащимся, развивая их интеллектуальные умения, воспитывая смелость и решительность при встрече с задачами, требующими нестандартного подхода для их решения.

Ключевые слова: интеллектуальный вызов, математическая задача, обучение математике в средней школе, распознавание задач по уровню трудности.

INTELLECTUAL CHALLENGE IN TEACHING MATHEMATICAL PROBLEMS SOLVING

L. R. Shakirova, M. V. Falileeva

Abstract. The article deals with the intellectual challenge as one of the ways to stimulate cognitive activity of secondary school students. Psychological characteristics and methodic peculiarities of activity of teachers, capable “to take and send” intellectual challenge to students in the process of solving mathematical problems are highlighted. Twenty five teachers of mathematics from Kazan secondary school participated in the investigation. Ability of teachers to diagnose tasks in accordance with the level of difficulty, compose them and apply tasks at the lessons with the increasing level of difficulty, including the researching type are studied. Mixed methods of investigation, such as observation, questioning, interviewing, and analysis of lessons are presented in the article. The result of investigation has shown that teachers are able to recognize mathematical tasks on the level of difficulty. At the same time the participants experienced difficulties in composing tasks on reproduction and tasks demanding not only qualitative understanding of the educational material but its creative application as well. Even with such sufficient high level of content and pedagogical knowledge teachers are not ready to intellectual challenge. Only individuals are able to challenge students, developing their intellectual abilities, training courage and resolution while meeting tasks, demanding non-standard approach for their solving.

Keywords: intellectual challenge, mathematical problem, teaching of mathematics in secondary school, recognize tasks according to the level of difficulty.

Одна из важных проблем учителя математики – это поиск эффективных методических приемов и способов повышения продуктивности решения математических задач школьниками. При решении математических задач на уроке учитель и ученики должны быть связаны единой целью – выработать у учащихся умение самостоятельно решать математические задачи. Учитель в этом процессе должен исполнять роль «катализатора»¹, который значительно повышает уровень понимания у учащихся того, как можно и нужно решать математические задачи. К сожалению, практика показывает, что многие учителя математики при решении задачи часто сами изящно переформулируют ее, логически выстраивают этапы решения, обращаются к красивым математическим идеям, но ученик при этом не является активным участником процесса решения задачи. Как отмечал Г. Фройденталь, «идеи решения падают с небес, а не являются продуктом размышлений учащегося» [1, с. 77].

Для организации процесса активного стимулирования интеллектуальной деятельности учащихся на уроках математики учитель должен обладать совокупностью психологических и профессиональных качеств. *Психологический портрет учителя*: находится в положительном деятельностном, эмоциональном, интеллектуальном состоянии, обусловленном позитивным отношением к работе, ученикам [2]. *Методические особенности деятельности учителя*: предлагает учебный материал, обладающий новизной, необычностью для учащихся, не только по содержанию, но в приемах, формах учебной деятельности. Это может быть и новый взгляд на известные факты, необычные сравнения, вопросы с иной формулировкой, изменение данных задачи, выдвижение необычных гипотез решения задачи и др.

Рассмотренные психологические характеристики и методические особенности деятельности основаны на внутренней уверенности учителя в своей предметной и методической подготовке, четкой направленности на сознательную активизацию интеллектуальной деятельности учащихся. В этом случае мы можем говорить о готовности учителя принять *интел-*

лектуальный вызов. При этом учитель, бросающий вызов учащимся, должен своевременно реагировать на их встречные вопросы и ответы, получая ответный интеллектуальный вызов от детей, реагирующих на его стимулирующие действия. Отсюда можно утверждать, что понятия «бросать» и «принимать» интеллектуальный вызов – это две стороны одной медали.

Российские ученые не использовали понятие «интеллектуальный вызов» при изучении проблем, связанных с процессом решения математических задач на уроке» зачастую связывали с термином «эвристика». Эвристикой называют «всякий способ, применение которого может привести к отысканию нужного метода решения задачи или доказательства теоремы» [3, с. 106]. В методике обучения математике при подготовке будущих учителей к решению математических задач основное внимание обращается на «конкретные» компоненты подготовки – предметную составляющую (решение задач различных уровней сложности в области элементарной и высшей математики) и методическую (понятие задачи, классификация задач, методы и приемы решения, эвристики). И ни в одном учебнике по методике математики нет информации о том, совокупность каких методических и психологических приемов, используемых учителем, может способствовать активизации учебной деятельности учащихся для эффективного решения математических задач.

При обучении учащихся решению математических задач учителю необходимо:

- 1) вырабатывать элементарные умения использовать при решении необходимые математические понятия и их свойства;
- 2) стимулировать интерес к решению математических задач (как к получению результата, так и к самому процессу решения задачи);
- 3) активно развивать творческий и научно-исследовательский потенциал учащегося при решении математических задач.

Самым сложным является выполнение 2-го и 3-го требований, поскольку они зависят от наличия у учителя: а) внутренней активной позиции в развитии самостоятельности учащихся; б) увлеченности математикой и мето-

¹ Катализатор – химическое вещество, ускоряющее реакцию, но не входящее в состав продуктов реакции.

дикой ее преподавания; в) уверенности в своих силах в решении любой школьной задачи. Эти личностные компетенции позволяют учителю организовывать эффективный интеллектуальный процесс при обучении решению задач, который зарубежные авторы называют умением «бросать интеллектуальный вызов» учащимся [4]. Для того чтобы разобраться в содержании данного понятия, рассмотрим зарубежный опыт.

В Соединенных Штатах количество мыслительной деятельности учащихся в сегодняшних математических классах минимально [5]. Если учитель математики предлагает учащимся лишь задачи на запоминание и решаемые по алгоритму, то это ограничивает возможности развития их мышления [6]. Использование на практике задач исследовательского характера стимулирует развитие интеллектуальных умений учащихся. Кроме того, и эти данные были задокументированы, знания учителя и ученика параллельны [7], то есть склонность учителя к решению сложных математических задач и проблем передается или развивает склонность учащихся, сталкивающихся с решением таких задач, не пасовать, а браться за их решение. Отсутствие же твердых знаний учителя, опасение и тревога при решении сложных математических задач напрямую отражается на учениках, они не готовы принимать интеллектуальных вызов, приступать к решению трудных задач, так как учитель их не предлагал [4; 8; 9].

Готовность учителя принять интеллектуальный вызов изучалась в ходе экспериментальной качественной проверки американскими учеными из Техасского университета в г. Эль-Пасо (США) под руководством профессора М. А. Чошанова. Проведено обследование учителей математики старшего звена школы с целью выяснить их отношение к интеллектуальному вызову, в частности к решению математических задач с возрастающим уровнем сложности [4]. Изучена корреляция этого отношения с практикой преподавания и обученностью учащихся. Результаты исследования показали, что большинство учителей отказываются принимать интеллектуальный вызов на уроках, и отказ от вызова педагогически заразен: учитель, избегающий вызова, передает ту же склонность своим ученикам.

С целью изучить отношение российских учителей математики к интеллектуальному вызову при решении задач на уроках математики нами проведено исследование, результаты которого отражены в данной статье. В нем приняло участие 25 учителей математики из 5 школ г. Казани. Для этого была разработана программа обследования, включающая анкетирование учителей математики средней школы с последующим анализом их уроков и собеседования с ними. Анкета состояла из двух частей: в первой учитель должен был решить четыре задачи различного уровня трудности (на воспроизведение, типовая, «нетиповая», исследовательская); во второй части учителю предлагалось предложить свои задачи четырех соответствующих уровней трудности. Далее анализировалась деятельность учителя в процессе обучения учащихся решению математических задач: постановка вопросов, увлеченность учителя, доля самостоятельной работы учащихся на уроке и пр.

При диагностике школьных математических задач, как правило, придерживаются двух характеристик – сложность и трудность задачи. Первая характеристика определяется объективными показателями – формулировкой задачи, конструкцией текста, количеством и характером связей, вторая включает в себя и субъективный компонент, определяемый знаниями, интеллектуальными умениями и опытом решающего задачу.

В настоящем исследовании условимся классифицировать задачи по четырем уровням трудности: первый уровень – *задачи на воспроизведение* (вопрос, требующий воспроизведения по памяти ранее изученных фактов (правил, формул, определений) и не требующих качественного понимания); второй уровень – *типовые задачи* (простейшие задачи, требующие применения известных способов действий в стандартных условиях); третий уровень – *«нетиповые» задачи* (задачи, требующие качественного понимания и выполнения математических способов действий в нестандартных условиях); четвертый уровень – *исследовательские задачи* (задачи, требующие не только качественного понимания учебного материала, но и творческого его использования).

Анализ решений предложенных учителям задач показал, что 54% учителей смогли ре-



Рис. 1. Результаты решения задач учителями

шить задачу на воспроизведение знаний и только 4% справились с решением задачи исследовательского уровня (рис. 1).

«Сомнительные» решения – это решения, имеющие некоторое логическое объяснение, основанное на верных математических представлениях, но не имеющие четко обоснованного решения (например, учитель находит правильный ответ, пишет общие фразы о решении, но не само решение).

По числу правильно решенных задач можно сделать вывод об уровне подготовки учителей: только 37% учителей обладают достаточным уровнем математической подготовки (знание теории на репродуктивном уровне, умение применять теорию при решении задач). Остальные допускают ошибки в формулировках, путаются в решениях.

Во второй части эксперимента учителя сами предлагали задачи четырех уровней трудности по теме «Площадь треугольника». Мы проанализировали все предложенные задачи. Оказалось, что ни один учитель не смог предложить четыре задачи по возрастанию уровня трудности; только треть учителей предложили по три задачи, соответствующие заданным уровням трудности. Например, учитель предлагает следующие задачи: *первого уровня* трудности: «Чему равно отношение площадей двух треугольников, если их высоты равны?»; *второго уровня*: «Площадь треугольника равна 30 см². Найдите высоту треугольника, если

основание равно 10 см»; *третьего уровня*: «Биссектриса BD делит треугольник ABC на два треугольника. Площадь треугольника BCD равна 14 см². Найдите площадь треугольника ABD , если $AB = 8$ см, $BC = 7$ см». В качестве задачи четвертого, исследовательского уровня учитель предлагает задачу третьего уровня трудности.

Качественный анализ предложенных учителями задач показал, что только 33% предложенных задач на первый уровень трудности являются таковыми; среди задач второго

уровня трудности – лишь 62%; третьего уровня – 71%; и четвертого уровня – 13% соответствуют заявленному уровню трудности согласно предложенной классификации (рис. 2).

Только 33% учителей смогли предложить три задачи из четырех в соответствии с предлагаемыми уровнями трудности. Наибольшее затруднение вызвали задачи исследовательского характера: видимо, учителя не совсем понимают отличие исследовательской задачи от «нетиповой». Второе место в затруднениях учителей вызвал подбор задач первого, самого простого уровня (33%).

Отсюда следует вывод, что основное затруднение у учителей вызывает диагностика задач первого и четвертого уровней трудности. Этот вывод подтвердим следующими данными. Подсчитаем, какой процент составляют задачи каждого уровня из всех предлагаемых учителями задач (рис. 3). Наибольшее число предло-

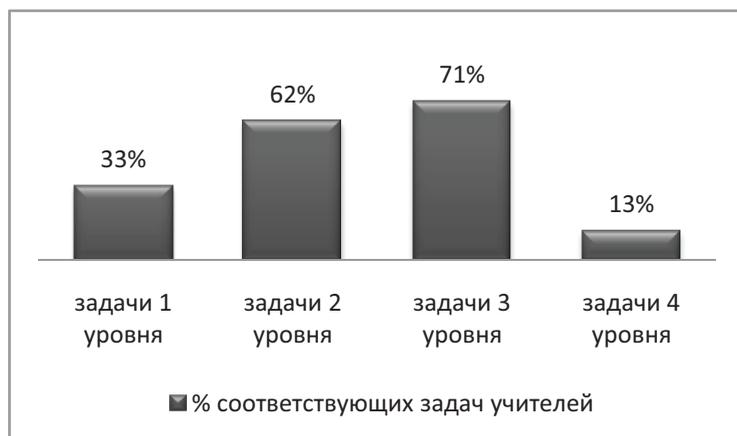


Рис. 2. Число предложенных задач на каждый уровень трудности

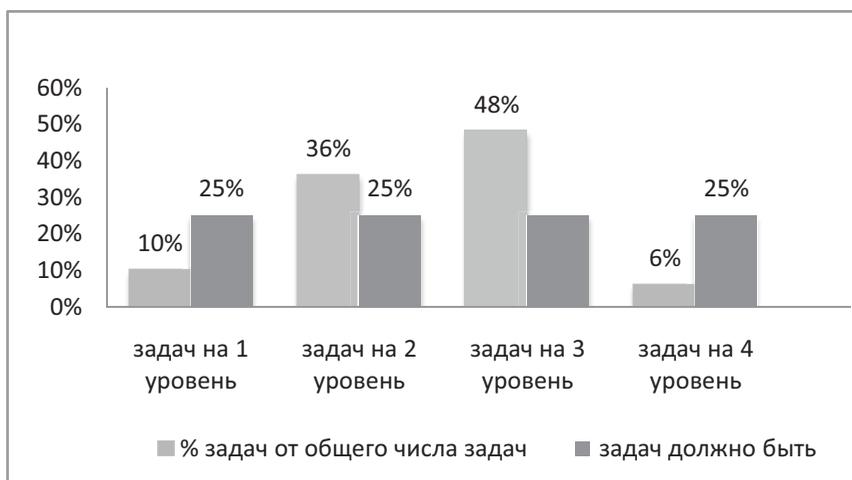


Рис. 3. Число задач различного уровня трудности, предлагаемых учителями, от общего числа задач

женных учителями задач – «нетиповые» задачи (третьего уровня). Такими задачами чаще всего подменялись исследовательские задачи (четвертого уровня).

По результатам анкетирования учителей математики оказалось, что осуществлять диагностику задач по уровню трудности и придумывать такие задачи готовы лишь 1–2 учителя из 25.

Следующий этап исследования состоял в анализе уроков учителей с целью изучения их готовности к интеллектуальному вызову. Для этого каждый учитель предоставил аудиозапись урока решения задач с приложением списка задач или конспекта урока. Так были созданы максимально комфортные условия для учителя в процессе решения задач на уроке (произвольная тема, отсутствие видеосъемки, можно несколько раз записать урок и выбрать лучший и т. п.). Было замечено, что после анкетирования учителя пытались улучшить подборку задач (сделать ее разнообразной по уровню трудности, добавить исследовательские задачи). Тем не менее даже учителя, имеющие более высокие показатели по результатам анкетирования, на уроке выбирали задачи в основном второго и третьего уровней трудности, избегая задач исследовательского характера.

Среди учителей, способных «бросить» интеллектуальный вызов учащимся, можно выделить типичные характеристики поведения на уроке математики при решении задач: учитель хорошо решает задачи первого, второго, третьего уровней трудности (и даже некоторые ис-

следовательские задачи), имеет большой опыт работы (как правило, возраст более 40 лет), уверен в себе (уверенная речь, спокойное уверенное общение с учащимися), но не имеет больших ожиданий от учащихся при решении предлагаемых задач. Не дает времени учащимся самостоятельно подумать над решением задачи, при их малейшем затруднении начинает подсказывать необходимые теоремы, определения, факты, актив-

но направляет учащихся в сторону своего решения задачи и т. п. Наблюдается последовательное выполнение плана урока, но не активизация творческого, исследовательского потенциала учащихся при решении задач.

Другая категория учителей, хорошо решая задачи первого, второго, третьего уровней трудности, имеет представление об исследовательских задачах, размышляет над методическими вопросами (например, красиво, методически грамотно выстраивает систему задач), с уважением относится к решению учащихся (внимательно выслушивает, делает выводы по итогам решения задачи); понимает глубину интеллектуального потенциала учеников, но свободно не владеет решением задач исследовательского уровня, поэтому избегает их или предлагает очень редко.

Таким образом, можно сделать вывод, что интеллектуальный вызов – редкое явление при решении математических задач на уроках математики в школе. Причины этого имеют объективный и субъективный характер. Объективные причины заключаются в сложившихся традиционных подходах к методике решения математических задач, в формулировках задач, предлагаемых в учебных пособиях, характере и количестве связей, конструкции текста. Анализ учебников математики 7–9-го классов показал, что в них практически отсутствуют задачи первого и четвертого уровней трудности, и задачи не всегда качественно раскрывают изучаемое понятие на репродуктивном и продуктивном уровнях [10; 11]. Субъективные причи-

ны заключаются в субъектном опыте учителя математики и его сформировавшихся профессиональных компетенциях [12]. По результатам исследования заметим, что в наших школах есть небольшая доля учителей математики, которая имеет внутренний потенциал и при желании готова бросить интеллектуальный вызов учащимся, развивая их интеллектуальные умения, воспитывая смелость и решительность при встрече с проблемами и задачами, требующими нестандартного подхода для их решения. Для обеспечения психологической и методической поддержки учителям математики необходима целенаправленная работа по проектированию технологии обучения решению математических задач, требующих «принятия» интеллектуального вызова.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фройденталь, Г. Математика как педагогическая наука [Текст]: в 2 ч. / Г. Фройденталь; под ред. Н. Я. Виленкина. – Ч. 1. – М.: Просвещение, 1982. – 208 с.
2. Прохоров, А. О. Психические состояния и их проявления в учебном процессе [Текст] / А. О. Прохоров. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1991. – 198 с.
3. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе [Текст] / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.
4. Valverde, Y. High school mathematics teacher's avoidance of challenge and its effect on teaching practice: Case of Lorenzo [Текст] / Y. Valverde, M. Tchoshanov // Материалы 4-го Международной научно-практической конференции, посвященной 210-летию Казанского университета и Дню математики «Математическое образование в школе и вузе», 28–29 ноября 2014 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – С. 8–17.
5. Tchoshanov, M. Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching, practice, and student achievement in middle grades mathematics [Text] / M. Tchoshanov // Educational Studies in Mathematics. An International Journal. – 2010. – Vol. 76. – P. 141–164.
6. Smith, M. S. Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice [Text] / M. S. Smith, M. K. Stein // Mathematics Teaching in the Middle School. – 1998. – No. 3(5). – P. 344–350.
7. Tchoshanov, M. Teacher knowledge and student achievement: Revealing patterns [Text] / M. Tchoshanov, L. Lesser, J. Salazar // Journal of Mathematics Education Leadership. – 2008. – Vol. 13, pp. 39–49.
8. Solomon, J. Chapter 6: Mathematical Conversations [Text] / J. Solomon, R. Nemirovsky // Journal for Research in Mathematics Education Monograph. – 2005 Jan. – Vol. 13. – P. 1–21.
9. Sullivan, P. Identifying and describing the knowledge needed by teachers of mathematics [Text] / P. Sullivan // Journal of Mathematics Teacher Education. – 2011. – Vol. 14 (3). P. 171–173. – doi: 10.1007/s10857-011-9188-6.
10. Фалилеева, М. В. Методические аспекты обучения решению уравнений и неравенств с параметрами [Текст] / М. В. Фалилеева // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 4 (Ч. 5). – С. 1230–1235.
11. Фалилеева, М. В. Представление четырехугольников в школьном курсе планиметрии [Текст] / М. В. Фалилеева, И. И. Валеев // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы 13-й молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2014». – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – Т. 50. – С. 34–36.
12. Чошанов М. А., Субъектный опыт учителя при обучении учащихся решению математических задач [Текст] / Л. Р. Шакирова, М. В. Фалилеева // 23-я Международная конференция «Математика. Образование. Информатизация», Казань, 27–31 мая 2015 г.: сб. тез. – Казань, 2015. – С. 99.

REFERENCES

1. Freudenthal H. *Matematika kak pedagogicheskaya nauka*. Part 1. Moscow: Prosveshchenie, 1982. 208 p. (In Russian)
2. Prokhorov A. O. *Psikhicheskie sostoyaniya i ikh proyavleniya v uchebnom protsesse*. Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta, 1991. 198 p.
3. Sarantsev G. I. *Metodika obucheniya matematike v sredney shkole*. Moscow: Prosveshchenie, 2002. 224 p.
4. Valverde Y., Tchoshanov M. High school mathematics teacher's avoidance of challenge and its effect on teaching practice: Sase of Lorenzo.

- Materialy IV Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyashchennoy 210-letiyu Kazanskogo universiteta i Dnyu matematiki "Matematicheskoe obrazovanie v shkole i vuze", 28–29 nov. 2014.* Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta, 2014. Pp. 8–17.
5. Tchoshanov M. Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching, practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics. An International Journal*. 2010 (76), pp. 141–164.
 6. Smith M. S., Stein M. K. Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 1998, No. 3(5), pp. 344–350.
 7. Tchoshanov M., Lesser L., Salazar J. Teacher knowledge and student achievement: Revealing patterns. *Journal of Mathematics Education Leadership*. 2008, Vol. 13, pp. 39–49.
 8. Solomon J., Nemirovsky R. Chapter 6: Mathematical Conversations. *Journal for Research in Mathematics Monograph*, 2005 Jan., Vol. 13, pp. 1–21.
 9. Sullivan, P. Identifying and describing the knowledge needed by teachers of mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 2011, Vol. 14(3), pp. 171–173. doi: 10.1007/s10857-011-9188-6.
 10. Falileeva M. V. Metodicheskie aspekty obucheniya resheniyu uravneniy i neravenstv s parametrami. *Fundamentalnye issledovaniya*. 2013, No. 4 (part 5), pp. 1230–1235.
 11. Falileeva M. V., Valeev I. I. Predstavlenie chetyrehugolnikov v shkolnom kurse planimetrii. *Trudy Matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo: materialy XIII molodezhnoy nauchnoy shkoly-konferentsii "Lobachevskie chteniya – 2014"*. Kazan: Izd-vo Kazan. un-ta, 2014. Vol. 50, pp. 34–36.
 12. Choshanov M. A., Shakirova L. R., Falileeva M. V. Subyektnyy opyt uchitelya pri obuchenii uchashchikhsya resheniyu matematicheskikh zadach. *XXIII Mezhdunarodnaya konferentsiya „Matematika. Obrazovanie. Informatizatsiya”*, Kazan, 27–31 may 2015: sb. tez. Kazan, 2015. P. 99.

Шакирова Лилиана Рафиковна, доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой теории и технологий преподавания математики и информатики Казанского (Приволжского) федерального университета
e-mail: liliana008@mail.ru

Shakirova Liliana R., ScD in Education, Professor, Chairperson, Theories and Technologies of Mathematics and Information Technology teaching Department, Kazan (Volga Region) Federal University
e-mail: liliana008@mail.ru

Фалилеева Марина Викторовна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики Казанского (Приволжского) федерального университета
e-mail: mmwwff@yandex.ru

Falileeva Marina V., PhD in Education, Associate Professor, Theories and Technologies of Mathematics and Information Technology teaching Department, Kazan (Volga Region) Federal University
e-mail: mmwwff@yandex.ru