

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт геологии и нефтегазовых технологий
Кафедра геофизики и геоинформационных технологий

А. В. Гусев

Вращение и внутреннее строение Луны

Учебное пособие по курсу “Физика Земли и планет”



Казань 2019

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Института геологии и нефтегазовых технологий
Казанского федерального университета

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов естественнонаучных специальностей университетов по курсу “Физика Земли и планет”, специалистов по планетарной геофизике и сравнительной планетологии.

Предисловие:

Успешно реализованные лунные международные проекты “Kaguya” (2007 - 2009 гг.), “Chang’E - 1/2, 3/4” (2007 – 2015+ гг.), Chandrayaan (2008 - 2009гг.), LRO (2009 – 2015+ гг.), GRAIL (2011 – 2012гг.), LADEE (2013-2014гг.) не только усилили наблюдательный обвал высокоточной и многопараметрической информации с относительно недорогого и многофункционального научного оборудования на космических аппаратах, но и увеличили всплеск широкого публичного и профессионального междисциплинарного интереса, исследовательского энтузиазма и амбициозных государственных планов ведущих мировых держав по робототехническому освоения Луны к 2025 г. и полету человека на Марс в 2030–35 гг.

Исследование физики Луны получило мощный импульс с начала запуска космических аппаратов к ночной соседке в беспилотном и пилотируемом режимах – «Луна», «Зонд», «Луноход» (СССР), «Apollo» (США). Запуск американских научных спутников «CLEMENTINE» (1994 г.) и «Lunar Prospector» (1998–99 гг.), LRO (2009 – 2014+ гг.), “GRAIL” (2011 – 2012 гг.), LADEE (2013-2014гг.) европейского исследовательского зонда “SMART” (2005 - 2006 гг.), японского научно-го аппарата-лаборатории “Kaguya” (2007-2009 гг.), китайских спутников серии “ChangE-1/2, 3/4” (2007 – 2014+ гг.), индийского спутника “Chandrayaan” (2008-2009гг.) стремительно, кардинально и качественно изменил ситуацию в исследовании Луны.

Уже в новом тысячелетии серия космических экспериментов, направленных на глобальное исследование нашего уникального в Солнечной системе спутника, стартовала с проекта SMART-1, открывшего новые технологические возможности лунных экспериментов, обеспечивающих широкий спектр данных о Луне. 2007 год – это год триумфального включения в лунные исследования космических агентств Японии, Китая, Индии. Речь идет, в первую очередь, о японской миссии SELENE (Kaguya), впервые обеспечившей за более чем годовой срок пребывания на лунной орбите высокоточное топографическое и гравитационное картирование всей лунной поверхности, включая ранее недоступные области обратной стороны и зоны лимба (Araki et al., 2009; Namiki et al., 2009). С помо-

щью бортового лазерного измерителя «Кагуя» определены высоты 6,8 млн. точек на всей поверхности Луны, включая полярные зоны, с погрешностью в пределах 4 метров. Удалось изучить также зоны лунных полюсов, куда не попадает солнечный свет. Установлено, что разница между самой высокой и самой низкой точками на поверхности Луны составляет 19,8 км, что на 2 км больше, чем предполагалось ранее. Наиболее высокая точка Луны находится на краю кратера Дирихле-Джексона вблизи экватора и возвышается над поверхностью на 11 км. Наиболее глубокая впадина на Луне - дно кратера Антониади около южного полюса, погруженное на 9 км от среднего уровня поверхности Луны.

Лунный разведчик “LRO – LCROSS” (NASA, США), запущенный в июне 2009 года, с первых же дней своего функционирования на лунной орбите предоставляет на Землю уникальные снимки высоко разрешения лунной поверхности. Лунный зонд LCROSS в октябре 2009г. столкнувшийся с поверхностью спутника Земли, нашел доказательства присутствия там значительного количества водяного льда.

LRO нашел также самую холодную точку Солнечной системы. Она находится в затененных кратерах рядом с южным полюсом Луны. Зонд обнаружил самое холодное место в ходе составления температурной карты Луны. Температура внутри кратеров достигает минус 240 градусов Цельсия. Это всего на 33 градуса выше абсолютного нуля. Даже на Плутоне, который расположен в 40 раз дальше от Солнца, на несколько градусов теплее.

Миссия LRO - это первый серьезный шаг в реализации долговременной программы установки обитаемых лунных баз, запланированных многими странами на 20-е годы. В задачу LRO входит поиск наиболее подходящее место для дислокации базы. Для этого ему предстоит найти воду и источники энергии, «разведать», насколько опасна радиационная обстановка в окололунном пространстве для человека. Эти задачи решаются с помощью шести научных инструментов LRO. К настоящему времени (август 2015г) на основе всего комплекса наблюдений созданы четыре массива баз данных: 1) топографический (6.4 млрд. высотных измерений; модели топокарт учитывают сферические гармоники до 2500 степени и порядка); 2) данные поверхностных наклонов; 3) данные неровностей поверхности (точность достигает 5 м.); 4) данные альбедо в нулевой фа-

зе. По результатам анализа данных в полярной области наибольшая яркость наблюдается в кратере Shackleton. На южном полюсе Луны, как наиболее интересном районе будущих научных исследований, рекомендована площадка размером 2 км x 1.5 км для будущих международных миссий.

В октябре 2010 году Китай запустил к Луне зонд "ChangE-2", который подвергся существенным усовершенствованиям, поэтому аппарат может быть отнесен к следующему поколению лунных зондов: на нем была установлена цифровая камера, которая позволила получать снимки более высокого разрешения в разных диапазонах частот.

Весь 2012 год прошел для изучения Луны под знаком американской уникальной миссии "GRAIL" (NASA, США), результатом которой явилось построение моделей гравитационного поля Луны вначале до 600 порядка, а в рамках данных расширенной миссии, до 1200 порядка! Точность модели гравполя Луны была улучшена сразу на три-четыре порядка по сравнению с предыдущими моделями гравполя Луны! Поверхностное разрешение гравполя достигает в линейном масштабе 5 км и наблюдается высокая корреляция гравполя и лунной топографии зонда LRO. По результатам исследований средняя толщина коры на видимой стороне Луны имеет значение 35 км (меньше чем оценивалось ранее), пористость лунной коры на видимой и невидимой сторонах достигает до 5% - 20%, и чем глубже, тем больше! Плотность коры оказалось меньше чем ожидалось. Появились дополнительные аргументы о двухслойной структуре лунного ядра: внешнее жидкое FeS и внутреннее твердое Fe.

2013 год открылся новой американской лунной миссией "LADEE", главной целью которой было изучение экзосферы Луны, ее пылевой и газовой составляющих, на высотах 30-100 км. Выяснилось, что дневная температура на поверхности достигает плюс +107° C, а ночная падает до минус -173° C, перепад температур равен +280° C. Структура атмосферы Луны меняется с ее фазами. Атмосфера Луны содержит многочисленные простейшие молекулы очень низкой концентрации, ее пылевая составляющая неоднородна и образуется при падении многочисленных микрометеоритов. За время работы этого зонда наблюдалось до 10 тыс падений микрометеоритов.

В декабре 2013г успешно совершил посадку на Луну китайский посадочный модуль "ChangE-3" с мини ровером (луноход) "Юта". Высокостабильный радиомаяк, размещенный на луноходе, в течение прошедшего года активно включается с наступлением каждого лунного дня и дает уникальную по точности и объему информацию о движении и вращении Луны с точностью до 0.3мм по линейной шкале! После первого года наблюдений методами Радио Локации Луны (RLR) объем и точность полученной информации о спин-орбитальном движении Луны уже превышает массив данных, полученных Лазерной Локацией Луны (LLR) за 44 года ее наблюдений!

Большой объем научной информации о внутреннем строении Луне может быть получен из наблюдения физической либрации, а так-же из ее теоретического моделирования. Период собственного вращения Луны совпадает с периодом обращения ее вокруг Земли (спин-орбитальный резонанс 1:1), поэтому мы видим ее только с одной стороны (50%). Но в действительности с Земли можно видеть примерно 59% лунной поверхности благодаря оптической либрации (покачиванию) Луны при неравномерном движении по эллиптической траектории и малому наклонению оси ее вращения к плоскости лунной орбиты. Физическая либрация неоднородной Луны с жидким ядром, малая по величине, но мощная как источник информации о внутреннем строении и динамической фигуре Луны и Земли, уже имеет своим источником гравитационное и приливное взаимодействие с Землей и Солнцем.

Начало нового тысячелетия отмечено рядом работ, в которых дается обзор результатов и проблем в этой области (Kuskov, Kronrod, 1998-2019; Gusev, Petrova, 1999-2019; Williams et al., 2001-2015; "New Views of the Moon", 2006). Изучение вращения небесного тела открывает возможности проникать в сложную внутреннюю структуру небесного тела, особенно в тех случаях, когда другие (геофизические) методы недоступны. Показано, что определение периодов и амплитуд свободной либрации позволит сделать вывод о наличии жидкого ядра Луны и планет, оценить размеры, форму, состав и тепловой профиль, а также периоды чандлеровых колебаний внутреннего твердого ядра и свободной нутации внутреннего жидкого и внутреннего твердого ядра Луны. Авторами впервые рассчи-

тан спектр свободной либрации и проведено структурно-параметрическое моделирование внутреннего строения Луны. Выполнено моделирование с целью определения зависимости полученных периодов свободного вращения от радиуса, плотности, химического состава ядра, а также от диссипативных характеристик зоны ядро-мантия. Представлены модельные геофизические разрезы Луны и структурная детализация лунного двухслойного ядра.

Особого внимания заслуживают результаты моделирования звездных треков с целью организации наблюдений при помощи полярного оптического телескопа, который планируется разместить на одном из полюсов Луны в рамках японской робототехнической программы ILOM, реализация которой намечена на 2019г. Предложен проект оценок и рекомендаций по наблюдению физической либрации многослойной Луны. Наряду с этим, изложены современные фундаментальные проблемы международных астрономических и геофизических исследований Луны с учетом перспективы создания долговременных лунных баз, сформулирована концепция лунного навигационного ежегодника.

Анализ лазерной локации Луны (LLR, 45года) показывает смещение оси вращения Луны, который указывает на сильную диссипацию при вращении Луны. Возможны два источника диссипации – месячные твердотельные приливы, возбуждаемые Землей и Солнцем, и дифференциальное вращающееся двухслойное жидко/твердое ядро. Аналитические следствия приливов и вращения ядра анализируются: диссипация от этих двух эффектов проявляется по-разному. Это дает возможность найти закон зависимости параметра диссипации Q от частоты. Анализ LLR указывает на четыре дополнительных малых члена диссипации, ответственных за смещение оси вращения. Только приливная диссипация не дает хорошего согласия для всех четырех амплитуд смещения оси. В настоящее время энергия диссипации твердотельных приливов и жидкого ядра мала, но ситуация драматически меняется для ранней Луны. В ранней период Луна может проходить через сильные спин-орбитальные резонансы, при которых может выделяться мощная энергия в мантии и на СМВ. Энергия, локализованная на СМВ, поддерживает конвекцию и функционирование магнито-динамо в жидком лунном ядре первые 2,0 млрд лет. Остаточная намагниченность лунных пород пред-

сказывает это событие в лунной истории и дает временные отметки прохождения Луны через спин-орбитальные резонансы.

Изучение свободной и вынужденной либрации в теории физической либрации вязко-упругой многослойной Луны также является одним из важных этапов в изучении динамики и внутреннего строения нашего естественного спутника.

Реализация современных долгосрочных программ исследования Луны в рамках проектов ЛЛЛ, SELENE, ILOM (JAXA, Япония), LRO, GRAIL (NASA, США), Chang'E (Китай), Chandrayaan (Индия), Луна-Глоб-Ресурс (РКА, Россия) направлена как на создание долго-временных лунных баз, так и на получение широкого спектра информации о лунном гравитационном поле, о точном положении Луны в инерциальной системе координат, динамической и геометрической фигуре Луны и ее внутреннем строении, включая многослойное жидкое лунное ядро.

Из обработки данных лазерной локации было показано наличие свободной либрации и существование жидкого ядра Луны. Но механизм поддержания долго-временной свободной либрации недостаточно ясен. Свободная либрация по долготе блендирует с двумя гармониками вынужденной либрации, обусловленной влиянием Венеры. Поэтому для наиболее точного определения параметров свободной либрации необходим как можно более точный учет дополнительных и планетных членов. Кроме того, данные ЛЛЛ привели к открытию диссипации вращательного движения Луны. Природа аномальной диссипации не определяется однозначно. Хотя учет приливной диссипации уменьшает расхождение теории с наблюдениями, этого эффекта недостаточно, чтобы объяснить полностью обнаруженную диссипацию.

1. Введение

Древнейшие письменные источники многих народов свидетельствуют о том, что для определения времени служила Луна. В системе счета времени древнейших народов лунный месяц играл более важную роль, чем сутки и год. На протяжении месяца Луна проходит полный цикл смены фаз. Смена лунных фаз более точно определяла начало и конец этого короткого периода (лунный месяц), тогда как длинный год не имел четкого обозначения начала и конца, а сутки были слишком скоротечны. Первые высказывания о том, что Луна светит отраженным светом Солнца, были найдены в сочинениях древнегреческого философа, математика и астронома Анаксагора (IV в. до н.э.). Один из величайших астрономов древнего мира Гиппарх (II в. до н.э.) построил достаточно точную теорию движения Луны, с помощью которой можно было предвычислять моменты солнечных и лунных затмений. Первые упоминания о зарисовках Луны встречаются в записных книжках великого живописца, скульптора, инженера и ученого Леонардо да Винчи. Самая ранняя из дошедших до нас лунных карт была составлена в Англии Вильямом Гильбертом в конце XVI в. по наблюдениям невооруженным глазом. Великий итальянский ученый Галилео Галилей впервые увидел поверхность Луны в телескоп и был радостно “сражен” видом ее бескрайних темных “морей” и светлых неизведанных “материков”. С начала XVII в. и по конец XIX в. изучение движения и вращения Луны (Ж. Кассини, А. Клеро, Л. Эйлер и другие) сформировалось в строгую небесно-механическую теорию фундаментального и прикладного значения. Что мы знаем о происхождении и эволюции системы Луна-Земля?

Мы знаем, что 4.6 млрд. лет назад небесное тело, размера и массы Марса, со скоростью 11 км в сек, скользящим ударом столкнулось с прото-Землей, сформировавшейся только на 95% из протопланетного диска вокруг Солнца, срезало, разогрело и распылила значительный кусок прото-Земли на околоземной орбите за несколько часов контакта! В дальнейшем из образовавшегося горячего диска частиц и обломков в окрестности Земли в течение нескольких тысячелетий образовалась горячая Луна за счет аккреции и слипания планетозималей на расстоянии в несколько земных радиусов от Земли и с периодом враще-

ния всего в 4-5 часа! Для сравнения, в настоящее время смолоду застывшая, вечно молодая, в кратерном макияже Луна вращается уже на расстоянии примерно 58 радиусов Земли и с периодом в 27 дней и удаляется от Земли со скоростью 4 см в год в силу солнечно-земной приливной диссипации!

Чтобы мы хотели бы узнать о Луне? Почему так сильно отличается видимая и обратная сторона Луны по рельефу, тектоническим образованиям, гравитационным, геохимическим, минералогическим и магнитным распределениям и аномалиям? Есть ли водяной лед в полярных областях Луны и возможно ли его промышленное освоение и использования для лунных баз? Какова природа и происхождение самого большого кратера (более 2500 км в диаметре, глубиной до 12 км) в Солнечной системе, расположенного у южного полюса Луны? Каковы размеры и геохимический состав жидкого ядра, вязко-упругой мантии и твердой коры тонкой морской и толстой континентальной частей Луны? Каков источник палеомагнитного поля Луны, обнаруженного в лунных образцах? Какова дальнейшая судьба системы Луна-Земля? Ответом на поставленные научные вопросы может быть информация с целой флотилии новых и планируемых космических аппаратов к ночной спутнице – европейский технический спутник “SMART-1”(ESA, 2003+),

японская миссия на обратную сторону Луны “SELENE” (JAXA, 2006), индийский корабль “Chandrayaan-1” (2007), китайский челнок “CHANG’E-1” (2007), американский разведчик полярного льда “LRO” (NASA, 2008). На повестке дня этой космической армады также зреет вопрос о выборе

наилучшего места для долговременных лунных обитаемых поселений землян по всему спектру жизнеобеспечения и промышленного освоения недр Луны.

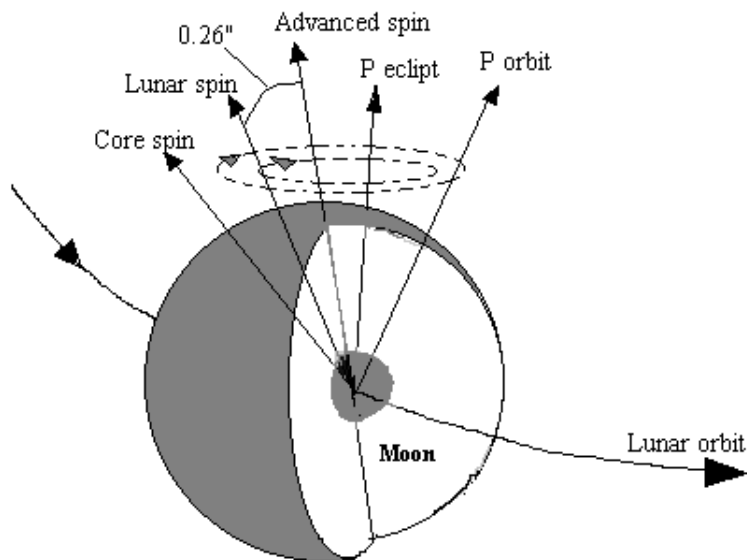


Рис. 1. Внутреннее строение и либрации двухслойной Луны.

Луна все время повернута одной стороной к Земле. Это простое утверждение иллюстрирует известное небесно-механическое явление как спин-орбитальный резонанс (SOR) 1:1, синхронность вращения системы Земля-Луна, согласованность периодов собственного вращения и обращения Луны вокруг Земли. Но нет никаких причин утверждать, что подобный SOR присутствовал при рождении системы Земля-Луна 4.5 млрд лет назад. Значит должен существовать один или несколько механизмов изменения вращательного углового момента и энергии. Лазерная локация Луны с Земли производится с 1969 г. [Dickey et al., 1994, Williams et al., 2001]. И сейчас можно сделать некоторые выводы из наблюдений: вращение Луны подчиняется законам Кассини, так что прецессирующая с периодом 18.6 лет нормаль к лунному экватору, нормаль к плоскости эклиптики и нормально лунной орбиты лежат в одной плоскости. При отсутствии диссипации восходящий узел экватора и нисходящий узел совпадают. Анализ LLR показал небольшой сдвиг между двумя узлами, который указывает на действие диссипации. Современное наблюдаемое смещение равно $-9.8''$ в узле экватора, что эквивалентно эклиптическому смещению по длине дуги, равное $0.263''$ в направлении полюса (Рис.1). Точность эффекта смещения предсказывается на уровне 1%. Можно предложить два механизма для лунной вращательной диссипации: твердотельная приливная диссипация [Yoder, 1979] и диссипация на границе СМВ [Yoder, 1981]. Приливная диссипация существует во всем объеме Луны, в то время как диссипация на СМВ возможна только при жидком лунном ядре. Существуют многочисленные наблюдательные и теоретические причины, свидетельствующие о жидком ядре Луны: данные от американского спутника Lunar Prospector (LP, NASA, 1998-1999) однозначно указывает на наличие небольшого лунного ядра и остается неясным только его физико-химический состав. Как приливная диссипация, так и диссипация в жидком ядре, может смещать плоскость экватора. В прошлом при наблюдениях было невозможно разделить действие этих эффектов. В настоящее время при возрастающей точности и продолжительности наблюдений мы можем различать действие этих механизмов.

В настоящее время Луна является объектом исследования по многим космическим экспериментам и центром пристального внимания ученых, как в области астрономии, так и планетологии. В программу исследований включается изучение тонких эффектов вращательного движения (физической либрации), а также многообразия внутреннего строения. На сегодня уже накоплены и продолжают накапливаться интереснейшие данные по динамике и внутреннему строению Луны, полученные в результате самых разнообразных наблюдений и космических экспериментов. К ним относятся: миссия Клементины (1994) и Лунар Проспектора (1998 – 1999), обработка результатов лазерной локации Луны (LLR), реализуемой в течение 50 лет, Европейского лунного спутника SMART-1, запущенного в августе 2003 года. Методы структурного анализа внутреннего строения, разработанные для Земли, могут быть успешно использованы и для Луны, но необходимость принимать во внимание резонансный характер ее орбитально-вращательного движения существенно усложняет математическое описание этих процессов. Эта теория должна быть пригодна для уточнений соответствующих параметров гравитационного поля, характеристик резонансных либраций, чисел Лява, коэффициента добротности Q , вязкости мантии и ядра, характеризующих внутреннюю диссипацию, характеристики пограничной зоны мантия-ядро и другие величины, определяющие внутреннюю и внешнюю структуру спутника. Все это даст возможность получить точное решение, аналогичное прецессионно-нутационным рядам, описывающим вращение Земли. Такая теория физической либрации Луны может быть положена в основу лунного астрономического ежегодника (Petrova, 1997; Williams et al., 2003).

Особое значение приобретает исследование свободной либрации. С одной стороны, из наблюдений ФЛЛ обнаружена заметная диссипация лунного вращения, и, как результат, свободные колебания должны бы к настоящему времени затухнуть. С другой стороны, эти же наблюдения показывают их присутствие в современном вращении Луны. Поэтому необходимо принимать во внимание спин-орбитальные взаимодействия, в частности, резонансное взаимодействие с Венерой, а также рассмотрение двух- и/или трехслойной модели нетвердой Луны с приливной или турбулентной диссипацией в мантии и ядре, что может быть сле-

лано в рамках Гамильтонова подхода, применяемого для описания вращения Земли (Gusev, Petrova, 2015).

Другой важной проблемой, которая может быть исследована теми же методами, являются энергетические изменения, связанные с потенциально различными эндогенными процессами, управляемыми Солнцем, Землей и планетами (Ferrandiz, Barkin, 2001). Особый интерес представляют процессы на границе жидкого ядра и мантии, подверженные разному воздействию на оболочки Луны со стороны солнечно-земных приливных моментов.

Вращение Луны чувствительно к ее внутреннему строению. Численные модели физической либрации Луны (Williams et al., 2001; Krasinsky, 2002), удовлетворяющие современным данным лазерной локации, обязательно включают сложную внутреннюю стратиграфию лунного тела. Для аналитических теорий это сделать гораздо сложнее. Тем не менее, такая необходимость существует. Основное преимущество аналитического подхода в теории ФЛЛ является возможность разделения вынужденной и свободной либрации. Высокоточные данные лазерной локации Луны дают для этого прекрасную наблюдательную основу. Феррандиш и Баркин (Ferrandiz, Barkin, 2001) разработали аналитический метод для учета взаимодействия гидродинамической и упругой оболочек Земли с Луной и Солнцем, который затем был эффективно применен для изучения вращения Луны. При этом аналитический метод описания резонансного вращения твердой Луны (Баркин, 1989) получил обобщение и развитие на случай двухслойной модели Луны. В результате было получено:

1. Обобщение законов Кассини для двухслойной модели. А). Векторы угловых скоростей и угловых моментов ядра и Луны совпадают с полярной осью инерции. В). Система мантия-ядро вращается как одно твердое тело вокруг полярной оси инерции в направлении орбитального движения Луны с постоянной угловой скоростью, равной среднему орбитальному движению по отношению к геоцентрической орбитальной системе координат, привязанной к среднему узлу лунной орбиты на плоскости эклиптики. В моменты прохождения узлов орбиты одна из экваториальных осей инерции Луны (соответствующая меньшему моменту инерции) ориентирована строго на центр Земли. С). Средний восхо-

дящий узел лунной орбиты на эклиптике совпадает со средним нисходящим узлом общей плоскости, ортогональной к векторам угловых моментов ядра и всей Луны, вектору угловой скорости Луны. Эта плоскость совпадает с лунным экватором. Нормали к плоскости эклиптики, к экваториальной плоскости, векторы угловых моментов Луны и ее ядра, вектор угловой скорости Луны расположены в одной плоскости, ортогональной плоскости эклиптики и линии узлов лунной орбиты. D). Векторы угловых моментов Луны и ее ядра (а также угловая скорость Луны) образуют постоянный угол с нормалью к плоскости эклиптики $\rho = 1^{\circ}32'48''$, значение которого зависит от скорости прецессии лунной орбиты, от резонансных свойств поступательно-вращательного движения Луны и ее динамического сжатия. **2.** Были получены оценки периодов (и частот) резонансных и квази-месячного колебаний для модели Луны с жидким ядром (2.87 г., 20.1 г., 75.0 г. и 27.2068 сут.). **3.** Было открыто и аналитически описано новое явление малого взаимного наклона векторов угловых моментов мантии и жидкого ядра.

Основываясь на Гамильтоновом подходе, разработанном для двухслойной Земли Хетино (Getino, 1995), Петрова и Гусев (1999, 2001, 2003, 2015) построили модель свободного вращения двухслойной Луны. В результате была получено, что при изменении радиуса ядра R_c от 200 км до 600 км период свободных нутаций ядра P_{FCN} изменяется не более чем на 1%. Такая слабая зависимость определяется медленным вращением Луны, малостью ее ядра и его эллиптичностью. Для сравнения в Таб.2 приведены аналогичные значения для Земли и Марса. Определение P_{FCN} из наблюдений позволит однозначно сделать вывод о том, что, во-первых, у Луны есть жидкое ядро, и, во-вторых, оценить его размеры.

2. Вращательная динамика

Притяжение Земли и Солнца создает на несферической Луне различные моменты сил. Моменты со стороны Земли превалируют. Как следствие, плоскость лунного экватора прецессирует вдоль плоскости эклиптики с периодом 18.6 лет (наклон оси вращения равен 1.54°), что проявляется как периодическое колебание полюса Луны, и вращение синхронизовано с вариациями вращения около полярной оси.

Таб.1 Периоды Чандлеровский колебаний и свободной нутации жидкого ядра для Земли, Луны и Марса.

Планета	Отношение моментов (тела и мантии)	Скорость вращения (оборот в день)	P_{FCN}	Ссылка
Земля	$\frac{A}{A_m} = 1.12$	$\Omega_{\text{Земля}} = 1/24$ ч	435 д	Defraigne et al., 1994
Марс	$\frac{A}{A_m} = 1.03$	$\Omega_{\text{Марс}} = 1/23$ ч	231 – 283 д	Van Hoolst, 2000
Луна	$\frac{A}{A_m} = 1.000065$	$\Omega_{\text{Луна}} = 1/27$ д	144 г 147,5 г	Petrova, Gusev, 2015 Баркин и др.; 2014

Более точные и чувствительные данные LLR чрезвычайно важны для времени зависимого трехмерного вращения Луны, называемого физической либрация (PhLL). Параметры физической либрации включают комбинации моментов инерции $\beta = (C-A)/B$, $\gamma = (B-A)/C$, семь членов третьего порядка в разложении гравитационного потенциала, диссипации мантийных приливов и ядра, число Лява k_2 [Dickey et al., 1994]. Точность LLR наблюдений постоянно увеличивается и в настоящее время достигает 15 мм при определении расстояния между Землей и Луной. При такой точности наблюдений требуется более точная теория орбитального и вращательного движения Луны. Уравнения орбиты Луны, планет и вращения Луны одновременно численно интегрируются. Начальные данные для интегрирования и параметры моделей берутся из оптимизации лунных данных методом наименьших квадратов. Численное интегрирование уравнений лунного вращения требует уравнения движения и модель гравитационных и приливных моментов взаимодействия. Ориентация Луны определяется тремя углами Эйлера. Угловые скорости вычисляются из углов Эйлера и его скоростей. Вращение Луны вычисляется из дифференциальных уравнений углового момента. Вектор-

ное дифференциальное уравнение есть уравнение Эйлера, записанное в системе отсчета вращающееся вместе с Луной

$$\frac{d(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T} \quad (1)$$

где \mathbf{I} - матрица моментов инерции, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости, t – время. Вектор углового момента равен $\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$. Вектор моментов \mathbf{T} включает гравитационное взаимодействие несферической Луны с внешними телами. Обычно, при интегрировании учитывается взаимодействие с Землей, Солнцем, Венерой и Юпитером. Для сферического притягивающего тела, второго порядка моменты, зависящие от \mathbf{I} , имеют вид

$$\mathbf{T}_2 = \frac{3GM}{r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{I}\mathbf{r} \quad (2)$$

где M – масса притягивающего тела, \mathbf{r} – радиус-вектор относительно системы координат в центре Луны, G - гравитационная константа. Для определения ориентации Луны требуется вычисление моментов и угловых скоростей в зависимости от углов Эйлера и их производных.

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi \\ -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (3)$$

В численной JPL модели углы Эйлера определяются углом узла ψ на эпоху J2000 точки весны и эпоху J2000 земной орбиты для нисходящего узла лунного экватора, углом наклона θ между двумя экваторами и углом φ отсчитываемым от линии узла лунного экватора к лунному нулевому меридиану. Для аналитических вычислений более полезным оказывается задание углов Эйлера таким образом, чтобы плоскость земного экватора была замещена плоскостью эклиптики для соответствующих трех углов. Уравнение (1) эквивалентно в координатах трем нелинейным дифференциальным уравнениям второго порядка для углов Эйлера. Приливные эффекты, вызванные \mathbf{I} и гравитационными гармониками, зависят от времени. Если существует жидкое ядро, то в дополнении к уравнениям (1) необходимо уравнение для описания вращения ядра. Также необходимо учесть моменты от взаимодействия поверхностей ядра и мантии, которые равны по величине, но противоположны по знаку. В дополнении к тра-

диционными моментам, взаимодействие с Землей и Солнцем приводит также к появлению приливов на Луне. Времени-зависимые приливные деформации Луны изменяются как за счет моментов инерции, так и моментов, вызванные вращением. Собственная скорость вращения (спин) Луны также меняется и временная зависимость согласована с временным характером приливов.

Луна испытывает твердотельные приливы по всему объему тела. Упругий приливной отклик Луны моделируется числами Лява. Величина неупругой приливной диссипации неизвестна априорно, но диссипация должна присутствовать. Ранние исследования [Peale, 1973] влияние упругого приливного эффекта на вращение вокруг оси показали, что эффект довольно мал, но он не обнаружил большого эффекта на движение полюса. Аналитические теории для упругих приливов и приливной диссипации были представлены [Yoder, 1979] и [Eckhardt, 1981]. Численные теории были реализованы [Bois, Journet, 1993] и [Newhall, Williams, 1997] на базе LLR данных. Выражение для моментов инерции распадается на три слагаемых: момент инерции твердого тела, второе - для приливной деформации, третье – деформации, вызванные вращением.

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_{\text{rigid}} + \mathbf{I}_{\text{tide}} + \mathbf{I}_{\text{spin}} \quad (4)$$

В системе координат, связанной с твердым телом, принципиальных моментов инерции связаны соотношением $A < B < C$. Первая ось, связанная с A , приблизительно направлена на Землю, третья ось, связанная с C , близка с направлением вектора спина

$$\mathbf{I}_{\text{rigid}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (5)$$

Используемые моменты инерции твердого тела определяют $\alpha = (C-B)/A$, $\beta = (C-A)/B$, $\gamma = (B-A)/C$. Только два из этих параметров независимы и они связаны $\alpha = (\beta - \gamma)/(1 - \beta\gamma)$. Через эти параметры можно определить отношения моментов инерции $A/C = (1 - \beta\gamma)/(1 + \beta)$ и $B/C = (1 + \gamma)/(1 + \beta)$ более точно, чем сами моменты инерции. Приливы действуют на моменты. Во втором порядке приливообразующего потенциала в точке на поверхности Луны (с единичным вектором \mathbf{u}') представляется

$$V_{\text{tide}} = \frac{GMR^2}{r^3} P_2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') \quad (6)$$

где M – масса Земли, \mathbf{r} – радиус-вектор, исходящий из центра Луны, $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r = (u^i)$. Для Луны $R = 1738$ км. $P_2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') = (3/2)[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')^2 - 1/3]$ – полином Лежандра второго порядка. Вдоль линии Земля-Луна ускорение направлено от Луны. Для приливной части матрица моментов инерции задается

$$I_{\text{tide}, ij} = -\frac{k_2 MR^5}{r^3} \left(u_i u_j - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) \quad (7)$$

где k_2 – лунный коэффициент Лява второго порядка. Упругое тело также деформируется при вращении. Во вращающейся системе координат дополнительный потенциал на поверхности разделяется на две части: сферически-симметричную часть и вклад других гармоник второго порядка.

$$V_{\text{spin}} = \frac{R^2 \omega^2}{3} [1 - P_2(\mathbf{u}' \cdot \hat{\omega})] \quad (8)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega^i)$ – вектор угловой скорости, ω – скаляр вектора, $\hat{\omega}$ – единичный вектор. Вклад в моменты инерции от обеих частей потенциала имеет вид

$$I_{\text{spin}, ij} = \frac{R^5}{3G} \left[k_2 \left(\omega_i \omega_j - \frac{\omega^2}{3} \delta_{ij} \right) + s \omega^2 \delta_{ij} \right] \quad (9)$$

Коэффициент Лява k_2 и параметр сферичности s зависят от упругих свойств Луны. В приливной, спиновой частях \mathbf{I} , радиус-вектор \mathbf{r} и угловая скорость вращения (спин) $\boldsymbol{\omega}$ являются функцией времени. Чувствительность данных LLR к числу Лява k_2 приходит из этих величин. Приливная и спиновая диссипация возникает, если деформации не является мгновенным откликом, а возникает с запаздыванием, испытывая фазовый сдвиг в положении и вращении. Некоторые численные значения могут подчеркивать эти эффекты диссипации. Модель использует лунные и планетные эфемериды DE403, учитывающие приливную диссипацию, но не включает диссипацию жидкого ядра, поэтому решение с этой эфемеридой представляет ограниченные возможности с числом Лява $k_2 = 0.0300$, время задержки $\Delta t = 0.1673$ дня и нормализованным моментом инерции Луны $C/mR^2 = 0.3944$. С этим значением отношение приливного момента к C имеет вид $(k_2 MR^5)/Ca^3 = 5.7 \cdot 10^{-7}$, где $a = 384,399$ км – большая полуось лунной орбиты. Аналогично, беря общий множитель в формуле (9) с $\omega = n$

(для постоянной части момента инерции) и деля на C , получим $(k_2 n^2 R^5)/3CG = 1.9 \cdot 10^{-7}$. Временные вариации еще меньше, чем эти значения. Направление на Землю, как это было бы видно в лунной системе координат, варьируется с 0.1 радиана в обоих направлениях с севера на юг и с востока на запад. Эксцентриситет e лунной орбиты равен 0.055 так что приливной фактор $(a/r)^3$ изменяется на уровне $3e$. Направление скорости спина изменяется в диапазоне < 0.001 радиана относительно принципиальной оси, а величина скорости спина меняется не больше чем 10^{-4} . Поэтому, относительные изменения моментов порядка 10^{-7} для приливов и 10^{-10} для спина. Относительные вариации времени задержки еще меньше, так как она включает дополнительно фактор $n \Delta t$, который равен $0.039 = 1/26$ для DE403.

3. Приливная и вращательная диссипация: аналитическое решение

Каковы динамические последствия для вращательных углов благодаря приливной и вращательной деформации и диссипации? Серии решений с численными коэффициентами были даны Yoder [1979] и Eckardt [1981]. Ответ зависит от зависимости параметра диссипации Q от частоты. Таб. 2 Параметры Лява и добротности из LLR и LP наблюдений

Параметр Лява k_2	0.0257 ± 0.0025
Параметры диссипации	
Q	26.5 ± 1.0
k_2/Q	$(11.36 \pm 0.16) \times 10^{-4}$
k_2	0.025 ± 0.003
Q за месяц	37 (-4,+6)
Q за один год	60 (-15, +30)

Параметры Q и k_2 зависят как от вязко-упругих свойств тела Луны так и радиуса, поэтому k_2/Q является функцией только внутренней диссипации. Численные модели с постоянной по времени задержкой эквивалентны случаю, когда Q пропорционально $1/\text{частоту}$. Для времени задержки и k_2 , описанной ранее, $Q = 26$, и как будет показано позднее, это соответствует периоду в 1 месяц. Вернемся к аналитическому описанию. Подставляя приливной момент в уравнение Эйлера, получим

$$\frac{d(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \frac{3GM}{r^3} \mathbf{u} \times \mathbf{I}\mathbf{u} \quad (10)$$

Приливная и спиновая часть момента инерции \mathbf{I} зависит от r , \mathbf{u} и $\boldsymbol{\omega}$. Тогда в матричной записи получим

$$\mathbf{I}_{\text{tide}} = -\frac{k_2 MR^5}{r^3} \left(\mathbf{u}\mathbf{u} - \frac{1}{3} \mathbf{i} \right) \quad (11)$$

$$\mathbf{I}_{\text{spin}} = \frac{R^5}{3G} \left[k_2 \left(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega} - \frac{\omega^2}{3} \mathbf{i} \right) + s\omega^2 \mathbf{i} \right] \quad (12)$$

где \mathbf{i} – единичная матрица. Подставляя эти значения в (10) получим

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_{\text{rigid}} \boldsymbol{\omega} - \frac{3GM}{r^3} \mathbf{u} \times \mathbf{I}_{\text{rigid}} \mathbf{u} = \\ k_2 R^5 \left[-\frac{3GM M^*}{r^3 r^{*3}} \mathbf{u} \times \mathbf{u}^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* + \frac{M}{r^3} \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}^* + \frac{M^*}{r^{*3}} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}^* \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}^* - \frac{1}{3G} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}^* \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}^* \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Когда приливообразующее тело и тело, создающее момент, совпадает, то звездочка указывает параметры с временной задержкой и $M^* = M$. Когда приливообразующее и возмущающее тела различны, то звездочка указывает на параметры с временной задержкой для приливообразующего тела и в правой части требуется суммирование членов от всех других тел. Заметим, что если отсутствует диссипация ($r = r^*$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^*$) и приливообразующее тело и возмущающее тело совпадают ($M = M^*$), то первый и четвертый члены в правой части (13) равны нулю. Четыре члена в правой части (13) учитывают диссипацию. Наибольший вклад дает приливные члены от Земли. В то время как «солнечные» члены менее важны. В компонентном представлении они имеют вид $U_{ij} = (a/r)^3 u_i u_j$ и $\omega_i \omega_j / n^2$. Таблицы для этих функций были вычислены, используя орбитальную теорию Луны Chapront-Touze, Chapront [1988, 1991, 1997] и таблицы физической либрации Луны Williams et al., [2001]. Так как $u_1 \approx 1$ и $\omega_3 \approx 1$, члены с наибольшей деформацией включены в эти члены. Например, наиболее важная пара членов в правой части (13), включающая третью компоненту вектора, записывается

$$-k_2 R^5 - \frac{3GM^2}{a^6} [U_{11} U_{12}^* - U_{12} U_{11}^*] \quad (14)$$

При отсутствии диссипации эта пара членов отсутствует, но при учете диссипации эта компонента умножается на фазовый сдвиг в зависимости от вы-

бранного периода. u_2 зависит от орбиты и физической либрации, с доминирующим периодическим членом от вариаций по долготе лунной орбиты. Наибольший из них - это месячные вариации с периодом (27.555) эксцентриситетно зависимого члена с основной аномалией l , примерного вида $2e \sin l$. С этим членом квадратная скобка в (14) дает следующий член

$$22,000''(\sin \ell^* - \sin \ell) \approx 22,000''(\ell^* - \ell) \cos \ell \quad (15)$$

Для положительной частоты положительная задержка времени соответствует отрицательному фазовому сдвигу и положительной диссипации Q как $(\ell^* - \ell) \approx -1/Q_{1\ell}$.

Множитель GM/a^3 часто встречается, и для аналитического описания полезно его связать с сидеральным основным движением. Третий закон Кеплера модифицируется при учете влияния Солнца на движение Луны:

$$\frac{GM}{a^3} \approx n^2 \left(1 + \frac{n'^2}{2n^2} \right) \frac{M}{M+m} \quad (16a)$$

$$\frac{GM}{a^3} \approx 0.9906n^2 \quad (16a)$$

где n' – основное движение центра масс системы Земля-Луна вокруг Солнца. Отношение масс Земли у Луне равно $M/m = 81.3006$ и для $R = 1738$ км отношение $R/a = 1/221.17$. Третья компонента дифференциального уравнения (13) описывает вращение полярной оси. Этот угол вращения почти следует вращению Земли как бы наблюдаемого с Луны и описывается лунной орбитальной долготой L плюс 180° . Малая оставшаяся часть, угол долготы физической либрации обозначается τ . При эклиптическом определении углов Эйлера в секторе $2\psi + \varphi = L + \tau + 180^\circ$. Теория физической либрации Луны с учетом ее фигуры является классической проблемой [Eckardt, 1981; Moons, 1982a, 1982b, Petrova, 1996]. В то время как изначальные уравнения вращения существенно нелинейные, линеаризация этих уравнений является хорошим первым приближением. Для наших целей, достаточно использовать $\omega_3 \approx n + \tau$, игнорируя малые квадратичные члены. Тогда уравнение для полярной компоненты становится

$$C(\ddot{\tau} + 3\gamma n^2 \tau) + \dot{I}_{33} n = f_z \quad (17)$$

Решение (17) для периодического члена возмущения усиливает периодические гармоники с периодом больше месяца. Либрационные амплитуды, большие чем месячные, наблюдаются для годовых, 206 дней и 1095 дней гармоник, близких к резонансным членам. Диссипация также индуцирует постоянный “вынос” τ , который больше, чем только при учете периодических членов. Солнечное влияние уменьшает постоянный коэффициент на величину 0.2 %. Производная от \mathbf{I} играет только минорное значение для либрации по долготе, так как он предпочитает “быстрые” члены, в то время как решение дифференциального уравнения предпочитает “медленные” члены. Орбитальная плоскость Луны наклонена на 5.145° к плоскости эклиптики. Результирующая эклиптическая широта движения Луны зависит от угла, отсчитываемый от линии узла, с периодом 27.212 дней, и полиномиальным представлением угла, обозначенным $F = L - \Omega$. Главный член для эклиптической широты есть $5.13^\circ \sin F$ и это дает сильное влияние на движение полюса. Дополнительные важные члены зависят от основной аномалии, проистекающей из радиальных вариаций и вариаций по долготе орбиты. Следовательно, вынужденные члены, пропорциональные $e \sin i$, имеют аргументы $F + \ell$ (1/2 месяца) и $F - \ell$ (2190 дней = 6.0 лет). Сильные вынужденные члены для твердого или слабodeформируемого движения лунного полюса имеют аргументы $F, F + \ell, F - \ell$. Влияние деформации на движение полюса, физическая либрация по широте, вычисляется, используя два ориентирующих параметра. Параметры p_1 и p_2 есть x и y координаты эклиптического полюса, соответственно, в системе отсчета принципиальных осей:

$$p_1 = -\sin \theta \sin \varphi \quad (18a)$$

$$p_2 = -\sin \theta \cos \varphi \quad (18b)$$

Дифференциальные уравнения для p_1 и p_2 взаимосвязаны [Eckardt, 1981]. В линейном приближении из (13), считая $\omega_3 = \text{константа}$, следует

$$A(\ddot{p}_2 + n(1-\alpha)\dot{p}_1 + \alpha n^2 p_2) + \dot{I}_{13}n = f_x \quad (19a)$$

$$B(-\ddot{p}_1 + n(1-\beta)\dot{p}_2 - 4\beta n^2 p_1) + \dot{I}_{23}n = f_y \quad (19b)$$

Функции возмущения по оси x и y , имеющие множителем $\cos i = 1.54^\circ$, угол наклона эклиптики, дают проекции f_x и f_y , соответственно. Резонансные ча-

стоты есть 27.29638 дней и 74.63 года (Williams et al., 2001). Твердые или деформируемые члены возмущения при 27.212 дней (F) и при 6 летнем члене (F - ℓ) вызывают значительное влияние на движение полюса, но полумесячный член оказывает незначительное влияние. Первые три члена в правой части (13) важны для движения полюса. Производная от I играет важную роль для F члена. Солнце увеличивает F член по величине на 0.3%. Дополнительно к решению в первом порядке отдельные нелинейные коррекции от твердотельных моментов дополняются во втором и в третьем порядках. Это увеличивает τ на 3% и величину коэффициента для движения полюса F на 2%.

4. Приливная и вращательная диссипация

Аргументы серий решений зависят от четырех аргументов в виде полиномов. Полиномиалы обозначаются: ℓ для основной аномалии Луны (период 27.555), ℓ' для основной аномалии центра масс Земля-Луна около Солнца (1 год), F для аргумента широты (27.212 дней), D для основной элонгации Луны от Солнца (29.531 дней). Исключая однородное вращение и прецессионное движение из углов Эйлера, в остатке получим набор малых либрационных параметров τ, ρ, σ. При эклиптическом определении углов Эйлера согласование между углами Эйлера и параметрами либрации есть $\psi = \Omega + \sigma$, $\theta = I + \rho$, $\varphi = F + 180^\circ$, и $\varphi = F + 180^\circ + \tau - \sigma$. Уравнения (18a) и (18b) обеспечивают связь с p₁ и p₂. Угол I (не путать с моментом инерции) равен 1.54° основной наклон прецессирующего экватора к плоскости эклиптики. Произведение Iσ удобно для сравнения с ρ и τ.

Амплитуда каждого периодического члена во вращении зависит от одного или нескольких параметров Q для деформированных частот. Серия аналитических решений для либрации по долготе τ представлены в и либрации по широте p₁ и p₂ - в Табл.3.

Например, в арксекундах месячного периода член p₁ в Таб.4 представлен

$$k_2 \left(\frac{217.4}{Q_F} + \frac{8.0}{Q_\ell} + \frac{4.7}{Q_{F+\ell}} + \frac{1.8}{Q_{2F}} + \frac{0.7}{Q_{F-\ell}} + \dots \right) \cos F \quad (20)$$

Основной вклад дает член с Q для 27.212 дня (месячные вращение “север-юг”), а остальные члены для аномалистического месяца в 27.555 дней и полумесячные член дает вклад только в несколько процентов.

Таб.3. Таблица либраций по широте с учетом приливной диссипации.

Argument	Period, days	Li-bration	Func-tion	Coefficient for Earth deformation Q						
				2F	F + ℓ	2D	F	ℓ	2D - ℓ	F - ℓ
				13.6	13.7	14.8	27.2	27.6	31.8	2190
				//	//	//	//	//	//	//
F	27.212	p ₁	cos	1.8	4.7	0.3	217.4	8.0	0.3	0.7
F	27.212	p ₂	sin	- 1.8	- 4.7	-0.3	-	- 8.0	-0.3	- 0.7
							216.0			
F - ℓ	2190.350	p ₁	cos		- 0.2		- 6.9	- 5.8		- 1.9
F - ℓ	2190.350	p ₂	sin		0.3		8.3	7.5		2.6
2F	13.606	Iσ	cos				- 1.1			
2F	13.606	ρ	sin				1.1			
2F - ℓ	26.877	Iσ	cos				0.3	- 0.8		- 0.3
2F - ℓ	26.877	ρ	sin				- 0.3	0.8		0.3
ℓ	27.555	Iσ	cos				3.7	6.5		2.3
ℓ	27.555	ρ	sin				- 3.6	- 6.5		- 2.3
0	∞	Iσ	1	- 1.8	- 4.7			-		- 0.7
								216.4		

Большинство коэффициентов в p₁ и p₂ эквивалентны постоянному отрицательному сдвигу прецессирующего узла экватора. Постоянный сдвиг Iσ дается в арксекундах формулой

$$I\sigma_{\text{const}} = k_2 \left(-\frac{216.4}{Q_F} + \frac{0.2}{Q_\ell} - \frac{4.7}{Q_{F+\ell}} - \frac{1.8}{Q_{2F}} - \frac{0.7}{Q_{F-\ell}} + \dots \right) \quad (21)$$

Сдвиг Iσ равен - 0.265", а сдвиг узла равен - 9.8". Для DE403 значение k₂/Q = 0.03/25.9 = 1.16 · 10⁻³ соответствует вращательному смещению 9.7 мм по лунному радиусу. Анализ всех таблиц показывает, что наибольшее значение имеют месячный, 206 дней, годовой, 3-х летний и 6 летний члены с диссипацией.

5. Отклонение фигуры Луны от гидростатического равновесия.

Моменты инерции твердого тела A,B,C используются для определения $\alpha=(C-B)/A$, $\beta=(C-A)/B$, $\gamma=(B-A)/C$. Если считать J_2 независимым параметром, тогда можно найти

$$C_{22 \text{ rigid}} = \frac{J_{22 \text{ rigid}} \gamma (1 + \beta)}{2(2\beta - \gamma + \beta\gamma)} \quad (22)$$

$$\frac{C}{Mr^2} = \frac{4C_{22 \text{ rigid}}}{\gamma} \quad (23)$$

В таб. 4 представлены также численные значения для недиагональных членов для модели твердой Луны, которые используются при численном интегрировании и аналитических интерпретаций.

Таб. 4. Средние значения моментов инерции и гармоник грав. потенциала

Parameter	Rigid	Tide by Earth	Tide by Sun	Oblate spin	Spherical Spin
I_{11}/mR^2	A/mR^2	-4.935×10^{-6}	-7×10^{-9}	-0.843×10^{-6}	2.529×10^{-6}
I_{22}/mR^2	B/mR^2	2.469×10^{-6}	-7×10^{-9}	-0.843×10^{-6}	2.529×10^{-6}
I_{33}/mR^2	C/mR^2	2.466×10^{-6}	1.4×10^{-8}	1.686×10^{-6}	2.529×10^{-6}
I_{12}/mR^2	0	2.3×10^{-9}	0	0	0
I_{13}/mR^2	0	-2.8×10^{-9}	0	0	0
I_{23}/mR^2	0	0	0	0	0
J_2	$J_{2 \text{ rigid}}$	3.698×10^{-6}	2.1×10^{-8}	2.529×10^{-6}	0
C_{21}	0	2.8×10^{-9}	0	0	0
S_{21}	0	0	0	0	0
C_{22}	$C_{22 \text{ rigid}}$	1.851×10^{-6}	0	0	0
S_{22}	0	-1.2×10^{-9}	0	0	0

Оценки показывают, что J_2 в 22 раза больше, β в 17 раз больше, γ и C_{22} в 8 раз больше соответствующих значений, если бы Луна находилась в гидростати-

ческом равновесии на современном расстоянии от Земли и Солнца. Современная Луна не находится в равновесии и испытывает колоссальные упругие напряжения в коре и мантии. Современная фигура Луны оказалась замороженной в ранние времена, когда Луна была существенно ближе к Земле [Jeffreys, 1915, 1937; Kopal, 1969; Lambeck, 1988]. Факторы превышения от 8 до 22 раз в параметрах либрации соответствуют замораживанию фигуры Луны на расстояниях от 0.5 до 0.36 от современного расстояния между Землей и Луной.

6. Возмущение орбиты от приливной диссипации

Приливная и вращательная деформации не только действует на лунное вращение, но также возмущает орбиту. Существуют упругий и диссипативный эффекты, но мы будем рассматриваться только эффекты диссипации. Диссипация вызывает изменение энергии и углового момента между вращением и обращением по орбите. Внешние тела возбуждают приливы на Луне. Приливная деформация от приливообразующего тела имеет потенциальную энергию

$$V_{\text{tide}} = k_2 G M M^* \frac{R^2}{r^3 r^{*3}} P_2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*) \quad (24)$$

Потенциальная энергия в поле внешнего тела во втором порядке по вращательной деформации записывается

$$V_{\text{spin}} = -k_2 M \omega^{*2} \frac{R^5}{3r^3} P_2(\mathbf{u} \cdot \hat{\omega}^*) \quad (25)$$

где P_2 – полином Лежандра второго порядка, $\hat{\omega}^*$ - единичный вектор спина. Для диссипации в членах с фазовым сдвигом или временной задержкой используется звездочка*. Временная задержка наблюдается в орбитальной и собственном (спин) вращениях.

Мы будем рассматривать секулярные изменения орбитальных элементов, следуемых из изменения энергии и углового момента. Орбита возмущается двумя способами посредством деформации: непосредственно, через силы, вычисляемые из градиентов (24) и (25) и через силы, вызывающие изменения фигуры Луны при смещении ее принципиальных осей инерции. Мощность, связанная с большей полуосью, изменяется через производную от общей энергии – $GMm/2a$. Секулярные изменения большой полуоси и основного движения

($3\Delta\dot{a}/a = -2\Delta\dot{n}/n$) даны в Табл. 5. Для преобразования $\Delta\dot{a}$ в $\text{мм} \cdot \text{год}^{-1}$ в среднее значение мощности в $\text{эрг} \cdot \text{год}^{-1}$ необходим множитель $0.99 \cdot 10^{24}$.

Таб. 5. Секулярные изменения орбитальных элементов для периодических приливов

Argument	Period, days	$\Delta\dot{n}$ cent ⁻²	$\Delta\dot{a}$ mm yr ⁻¹	$\Delta\dot{p}$ mm yr ⁻¹	$\Delta\dot{e}$ 10 ⁻¹¹ yr ⁻¹	$\Delta\frac{di}{dt}$, $\mu\text{as yr}^{-1}$	$\Delta\ddot{\omega}$ cent ⁻²	$\Delta\ddot{\Omega}$ cent ⁻²
ℓ	27.555	205	- 302	- 4	- 705	15	- 1.71	2.36
F	27.212	1 36	- 201	-201	2	- 601	- 0.89	0.34
$2D - \ell$	31.812	6	- 10	0	- 22	0	- 0.06	0.08
$2D$	14.765	10	- 14	0	- 33	0	- 0.08	0.11
2ℓ	13.777	7	- 10	0	- 23	0	- 0.05	0.08
$F + \ell$	13.691	6	- 9	- 4	- 10	- 13	- 0.04	0.04
$2F$	13.606	1	- 2	- 2	0	- 5	- 0.01	0
$F - \ell$	2190.350	0	0	- 1	2	- 2	0	0
$2D + \ell$	9.614	1	- 1	0	- 3	0	- 0.01	0.01
Sum for constant Q		373	- 550	- 212	- 795	- 606	- 2.86	3.02
Sum for Q~1/frequency		394	- 580	- 218	- 854	- 623	- 3.02	3.22

Для диссипативных эффектов моменты лунного вращения и орбиты, благодаря членам второго порядка фигуры и деформации, равны по величине и

противоположны по знаку. Существуют не прямые эффекты изменения a , e , i , которые вызывают прецессию перигелия и узла. Индуцированная Солнцем скорость прецессии сильно зависит от основного движения слабо от эксцентриситета и наклона. Подобно основной долготе, углы узла и перигелия испытывают приливное ускорение. Частные производные от скорости прецессии долготы перигелия $\dot{\omega}$ и скорости прецессии узла $\dot{\Omega}$ [Chapront – Touze, Chapront, 1988] представлены в Таб. 6. Модель для DE403 основана на приливной диссипации, но без учета эффекта жидкого ядра: $\Delta\dot{i} = 0.46''$ столетие⁻¹, $\Delta\dot{a} = -0.67$ мм·год⁻¹. Дополнительные скорости есть $\Delta\dot{p} = -0.25$ мм год⁻¹, $\Delta\dot{e} = -0.99 \cdot 10^{-11}$ год⁻¹, $\Delta di/dt = -0.72 \mu\text{as} \cdot \text{год}^{-1}$. Ускорения равны $\Delta\ddot{\omega} = -0.0035$ и $\Delta\ddot{\Omega} = 0.0037''$ столетие⁻². Приливы на Земле вызывают отрицательное секулярное ускорение $-26''$ столетие⁻². Приливная диссипация на Луне дает вклад менее 2% от общего приливного секулярного ускорения. Вклад в скорость изменения эксцентриситета от Земли составляет 70%. Произведение а $\Delta\dot{e} = -3.8$ мм·год⁻¹. Изменение скорости большой полуоси приводит к увеличению перигелия на 3.2 мм год⁻¹ и уменьшение апогея на 4.5 мм год⁻¹. Напомним, что орбитальный эксцентриситет $e = 0.0549$, большая полуось $a = 384.399$ км, основное движение $n = 13.3685$ об·год⁻¹, наклон лунной орбиты и плоскости орбиты к плоскости эклиптики $i = 5.145^\circ$ и $I = 1.543^\circ$, соответственно. Численное значение $\Delta\dot{a} = -515 k_2/Q$ мм·год⁻¹. Аналитические приближения для скорости изменения эксцентриситета и наклона следуют из правила переноса углового момента

$$\Delta\dot{e} = -\frac{21}{2} \frac{k_2}{Q} \frac{M}{m} \left(\frac{R}{a}\right)^5 n e \quad (26)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{k_2}{Q_F} \frac{M}{m} \left(\frac{R}{a}\right)^5 n \frac{\sin^2(i+I)}{\sin i} \quad (27)$$

где Q берется для месячного приливного периода. Численные значения имеют вид: $\Delta\dot{e} = -7.4 \cdot 10^{-9} k_2/Q$ год⁻¹ и $di/dt = -6.0 \cdot 10^{-4} k_2/Q$ ''·год⁻¹. Лунная приливная диссипация забирает энергию от орбиты и перемещает ее на вращение Луны. Угловой момент от орбиты сохраняет вынос оси лунного полюса, но не меняет скорость вращения. Это совершенно отлично от Земли, где энергия вращения и орбитальный угловой момент меняется. (Зональные приливы на Земле забирают

энергию из орбитальной энергии больше, чем из вращательной энергии, но они действуют на изменение основного движения только на уровне 1%.) Как скорость вращения Луны следует слабому увеличению орбитального периода через диссипацию на Земле и Луне? Ось твердого тела Земли смещается слабо на восток, так что моменты уменьшают спин Луны. Это есть твердотельный динамический баланс замедления против момента. Выражение приходит из решение (17) с квадратичным временным членом в полиноме для основной долготы L :

$$\ddot{\tau} + \dot{n} + 3m^2\tau = 0 \quad (28)$$

Предполагая, что четвертые и более высокие производные от L равными нулю, смещение по τ есть

$$\Delta\tau = -\frac{\dot{n}}{3\gamma n^2} \quad (29)$$

Учитывая приливное замедление $-26''$ столетие⁻², получим смещение только $0.0006''$. Общее замедление Луны равно $-13''$ столетие⁻² [Simon et al., 1994], и это дает только $0.0003''$ сдвиг оси для спина Луны в следствие изменение орбиты.

7. Численная модель для диссипации мантии Луны

Если жидкое лунное ядро существует, то ожидается диссипация на границе СМВ, когда жидкость двигается с различной скоростью по отношению к скорости вращения мантии. Так как движение жидкости может носить сложный характер, то мы принимаем упрощенную модель, основанную на среднем значении скорости вращения жидкости ω' . Дифференциальная угловая скорость между ядром и мантией определяется $\Delta\omega = \omega' - \omega$. В точках на поверхности сферической границы (R') ядро-мантия относительная скорость жидкости равна $\Delta\omega \times R'$ и сила вязкости, пропорциональная относительной скорости, дает момент, пропорциональный величине $R' \times (\Delta\omega \times R') = R'^2 \cdot \Delta\omega - (R' \Delta\omega) \cdot R'$. При интегрирование по сферической поверхности общий момент будет пропорционален $\Delta\omega$. К большому гравитационному моменту, действующему на мантию на T в правой части (1), прибавляется малый дополнительный момент сил T_c

$$T_c = K(\omega' - \omega) \quad (30)$$

где K есть параметр диссипации, который связывает мантию и ядро. Отношение K/C_m находится из анализа наблюдений. Граница ядро-мантия рассматривается как сферическая, поэтому момент сил, действующий на ядро, берется с минусом $-T_c$. Уравнение Эйлера для описания вращения ядра можно представить

$$\frac{d(\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\omega}')}{dt} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\omega}' = -T_c \quad (31)$$

Для сферически-симметричного ядра матрица моментов инерции коры $\mathbf{\Gamma}$ имеет равные диагональные элементы C' (приливная деформация ядра игнорируется) и тогда (31) можно переписать

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}'}{dt} = \frac{K}{C'}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') \quad (32)$$

Отношение моментов инерции C'/C является входным параметром. Для уравнений Эйлера момент ядра рассматривается во вращающейся с ядром системе координат, в то время как момент мантии выражается в мантийной вращающейся системе координат. Если (ламинарная) сила вязкости замещается турбулентной силой вязкости, которая пропорциональна квадрату относительной скорости, то общий момент, интегрируемый по сфере, будет пропорционален $|\Delta\boldsymbol{\omega}| \cdot \Delta\boldsymbol{\omega}$ и в (30) появиться дополнительный множитель $|\Delta\boldsymbol{\omega}|$. Yoder [1981] сделал вывод, что лунное ядро-мантийное взаимодействие носит турбулентный характер. Связь ядро-мантия слаба и $\boldsymbol{\omega}'$ мало отличается от $\boldsymbol{\omega}$. Величина разности $|\Delta\boldsymbol{\omega}|$ почти постоянна и направление вектора $\Delta\boldsymbol{\omega}$ почти однообразно прецессирует (изменение скорость вращения мантии $< 10^{-4}$ п и изменение направления оси вращения меньше чем 10^{-3} радиан от прецессии). Различие между турбулентным и вязким взаимодействием едва уловимо и мы будем следовать (30). Уравнения вращения для мантии и ядра численно интегрируются с уравнениями движения для орбиты Луна и планет.

8. Прецессия и параметр связи ядра.

Экватор наблюдаемой твердой Луны наклонен на 1.54° к плоскости эклиптики, он прецессирует обратным движением с периодом 18.6 лет. Мы можем предположить, что лунное ядро может проявлять аналогичную прецессию. Наклон оси вращения ядра неизвестен. Goldreich [1967] рассмотрел вязкие, турбулентные и топографические эффекты ядра и сделал вывод, что в силу слабой

связи ядра с мантией направления осей вращения жидкого ядра и твердой мантии могут не совпадать. Поэтому, экватор ядра, вероятно, близок к плоскости эклиптики, но должен проявлять некоторое прецессионно индуцированное движение. Для вычисления прецессии ядра и мантии выбирается система координат, вращающаяся со скоростью узла с периодом 18.6 лет.

Для записи гравитационного момента T_g мантии в системе координат хуз используем аналитические выражения для U_{ij} . Если ядро связано сильно с мантией, то его направление спин ядра близко к оси вращения мантии. Для слабой связи ось вращения ядра близко к нормали плоскости эклиптики. Отношение K/C должно быть найдено из наблюдательных данных. Константа связи K зависит от динамики жидкости. Здесь будет исследоваться две возможности, ламинарный и турбулентный поток жидкости. В обоих случаях K является функцией физических параметров, включая радиус ядра R' , плотность жидкости ρ' и кинематическая вязкость ν . На границе ядро-мантия вязкое взаимодействие в ламинарном граничном слое вызывает натяжения, пропорциональные $\nu \rho' \mathbf{v}$, где относительная ядро-мантийная скорость $\mathbf{v} = \Delta \boldsymbol{\omega} \mathbf{R}'$. Yoder [1981, 1995] предложил

$$\frac{K_v}{C'} = 2.6 \frac{\sqrt{\nu \omega'}}{R'} \quad (33)$$

Предполагая плотность ядра однородной, можно K/C' преобразовать в K/C . Учитывая оценки из предыдущего параграфа, набор численных значений для $K/C = f_c (1 + \xi^2) 3.4 \cdot 10^{-8}$ день⁻¹, где f_c - часть наблюдаемого $I\sigma$ выноса (offset), который приходит из ядра. Тогда, можно оценить радиус ядра в км $R' = 837 [f_c (1 + \xi^2)/\rho']^{1/4} / \nu^{1/8}$ с ρ' в г·см⁻³ и ν в см² сек⁻¹. Для предельного случая $f_c = 1$ с жидким железным ядром с плотностью 7 г·см⁻³ и вязкостью 0.01 см² сек⁻¹ радиус ядра равен 900 км. Это большое значение радиуса не приемлемо по геофизическим соображениям. Отсюда был сделан вывод о турбулентном характере диссипации на границе ядро-мантия (СМВ) [Yoder, 1981]. В точках на СМВ турбулентное напряжение для относительной скорости $\mathbf{v} = \Delta \boldsymbol{\omega} \mathbf{R}'$ равно $k\rho'|\mathbf{v}|\mathbf{v}$, где ρ' – плотность жидкости и k - безразмерный параметр, описывающий вязкость. (Топографическая нерегулярность на СМВ может давать дополнительное напряже-

ние и моменты сил). Интегрируя напряжения по сферической поверхности и вычисляя моменты, получим

$$K_t = \frac{3}{4} \pi^2 k \rho' R'^5 \Delta \omega \quad (34)$$

Yoder [1981] использовал $k = 0.002$, а Dickey et al., [1994] предложил 0.001 . Для вязкости $0.001 \text{ см}^2 \text{сек}^{-1}$ и при радиусе ядра 400 км $k = 0.00071$, а при $R' = 300 \text{ км}$ получим $k = 0.00076$. Для предельного случая с плотностью жидкого железного ядра $7 \text{ грамм} \cdot \text{см}^{-3}$ радиус ядра = 421 км . Топография границы уменьшает этот размер ядра. Для радиусов ядра от 300 до 400 км месячный пик относительной скорости между ядром и мантией лежит в интервале от 2 до $3 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ ($R' n \sin I$). Так как C' пропорционально средней плотности ядра в пятой степени R'^5 , то K/C' зависит в основном от k , которое в свою очередь слабо зависит от радиуса ядра и вязкость. Динамика ядра зависит от K/C' . Для вышеуказанных значений k , $\xi = 0.02$ и наклон оси вращения ядра к эклиптике равен $2'$, которое значительно меньше, чем наклон оси вращения мантии в $93'$. Экватор ядра пересекает эклиптику под углом 89° впереди пересечения экватора мантии с эклиптикой. Ядро изменяет мантийный наклон на $-0.006''$, который может быть скомпенсирован изменением параметра β и других параметров.

9. Динамика ядра, свободные моды и затухание

Моменты на Луне со стороны гравитационных моментов Земли вызывают вынужденную либрацию и вызывают мантийные свободные либрации, которые осциллируют около вынужденного состояния. Диссипативное ядро-мантийное взаимодействие вызывает медленное затухание трех периодических свободных либраций так же как затухание также вызывается приливной диссипацией. Более того, ядро способно к собственным вращательным движениям, поэтому существуют еще дополнительные свободные моды вращения. Это - затухающие моды. Связанная пара дифференциальных уравнений по долготе для мантии и ядра может быть записана для мантии

$$\ddot{\tau} + 3S_3 \gamma n^2 \tau + \frac{K}{C} \left(\dot{\tau} - \dot{\tau}' \frac{\cos I}{\cos I'} + \dot{I} \frac{\sin^2 I}{1 + \xi^2} \right) = f_z \quad (35)$$

и для ядра

$$\ddot{\tau} + \frac{K}{C'} \left(\dot{\tau}' - \dot{\tau} \frac{\cos I}{\cos I'} \right) = 0 \quad (36)$$

Так как ядро предполагается сферическим, без воздействия со стороны гравитационного момента, в уравнения входит производная от τ' , но не входит сама τ' . Мантийная периодичность передается ядерной периодичностью через члены, факторизованные множителем K/C' . Так как C'/C мало, связанные члены влияют на ядро больше, чем на мантию. Компонента вектора $\omega' - \omega$ проявляется различно в двух дифференциальных уравнениях из-за различия в системах координат ядра и мантии.

Для исследования свободных либраций подставим разложение $\tau = a \exp(ivt)$ и $\tau' = a' \exp(ivt)$ в линеаризованные уравнения. Комплекснозначный определитель при коэффициентах a и a' имеет вид

$$\Delta_i = -v^2 \left[(3S_3 \gamma n^2 - v^2) + \frac{K}{C} \frac{K}{C'} \frac{\sin^2 I}{1 + \xi^2} \right] + iv \left[(3S_3 \gamma n^2 - v^2) \frac{K}{C'} - v^2 \frac{K}{C} \right] \quad (37)$$

Инверсия $1/\Delta t$ равна $\Delta_i^*/\Delta t \cdot \Delta_i^*$, где звездочка означает комплексное сопряжение

$$\Delta_i \Delta_i^* = v^4 \left[(3S_3 \gamma n^2 - v^2) + \frac{K}{C} \frac{K}{C'} \frac{\sin^2 I}{1 + \xi^2} \right]^2 + v^2 \left[(3S_3 \gamma n^2 - v^2) \frac{K}{C'} - v^2 \frac{K}{C} \right]^2 \quad (38)$$

Для нахождения частот свободных либраций (реальная часть v) и затухание (мнимая часть) для моды долготы, необходимо решить характеристическое уравнение, приравняв (37) к нулю. Нулевой корень этого уравнения означает, что сферическое ядро может вращаться под произвольным углом наклона оси вращения. Мы приведем приближенное решение, хотя и возможно решение кубического уравнения в громоздких квадратурах. В лунном случае выполняется условия: $n (3\gamma)^{1/2} \gg K/C' \gg K/C$. Один из корней кубического уравнения близок к iK/C' . Если скорость вращения ядра не близко к постоянному значению (38) плюс вынужденная либрация, то будет происходить затухание по закону близкому к $\exp(-Kt/C')$. Это может быть рассчитано из формул (32) и (38). Для однородного железного ядра время затухания равно 140 лет при турбулентной диссипации. Топографические эффекты ядра уменьшают время затухания.

Частота свободной либрации по долготе для мантии (с периодом 1056 дней) приходит из корня уравнения $3S_3 \cdot \gamma n^2$. Для Луны частота свободной либрации много больше, чем K/C' , поэтому первая скобка в (37) дает доминирующий вклад в частоту. Если обратное верно, то частота свободной либрации определяется наиболее сильно второй скобкой и $\gamma = (B - A)/C$ должно быть заменена на $(B - A)/(C + C')$. Ядро будет вращаться с мантией. В общем, существует слабая зависимость частоты свободной либрации от величины корамантийной связи. Затухание для свободной либрации мантии равно

$$D_L = \frac{K}{2C(1 + \xi_L^2)} \quad (39)$$

где $\xi_L = K/C' \cdot n \cdot \sqrt{3S_3 \cdot \gamma}$ – отношение постоянной затухания к частоте свободной либрации. Для турбулентной связи $\xi_L = 0.003$ (слабая связь). Затем в рамках DE403 получим время затухания $1/D_L \geq 1.6 \cdot 10^5$ лет. Для турбулентной диссипации $\xi_p = 0.1$ есть сильная связь для трех мантийных мод и 18.6 летней вынужденной прецессии. Топография на СМВ может усилить эту связь. Время затухания, вызванное взаимодействием с ядром, больше $\geq 8.1 \cdot 10^4$ лет. Параметр затухания для Чандлерова колебания есть

$$D_w \approx \frac{K}{C} \left[2\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin^2 I}{1 + \xi^2} \right] \quad (40a)$$

$$D_w \approx 2.19 \times 10^{-3} \frac{K}{C} \quad (40b)$$

В предельном случае время затухания $\geq 3.7 \cdot 10^7$ лет. Ядро является более эффективным, чем приливы, при затухании свободной прецессии. Для других двух мод затухание через взаимодействие с ядром лежит между приливными случаями для постоянного Q и $Q \sim 1/\text{частота}$. Затухание свободных либраций ядра происходит быстрее по сравнению затухания либраций мантии. Затухание трех свободных мод либраций мантии является медленным, но обнаружение ее из наблюдений является важным для определения параметра K/C . В принципе, затухающие моды ядра имеют малое влияние на мантию, и поэтому, при наблюдениях могут быть использованы для определения параметра K/C' ядра. Ожидаемое отношение амплитуд мантия / ядро будет очень мало, и короткое время затухания (140 лет для турбулентной связи) делает эти эффекты более мимолет-

ными, чем мантийные моды. Для того, чтобы быть наблюдаемым при мантийном вращении, моды ядра нуждаются в сильной стимуляции в недавнем прошлом.

10. Сидеральные возмущения

Орбита Луны прецессирует вдоль плоскости, которая приблизительно совпадает с эклипстикой, но эта средняя плоскость прецессии изменяет наклон по двум причинам. Сплюснутость Земли индуцирует 8" наклон по отношению к экватору и результирующая плоскость обозначается как плоскость Лапласа. Вторая причина – это движение плоскости эклиптики. Это дает дополнительно 1.5" наклона, поэтому орбита не совсем следует эклиптическому движению. Оба эффекта очень близки к сидеральной скорости: в первом случае эффект проявляется в 26.000 летней прецессии орбиты Земли.

Эффект либраций фиксированной плоскости при орбитальной прецессии по большей части интуитивен. Вращающаяся мантия и ядро прецессируют вдоль лунной орбиты, эволюция которой может описываться относительно эклиптики или земной орбиты. Эти орбиты также эволюционируют: существует взаимодействие Луны с фигурой сплюснутой Земли и движение плоскости эклиптики. Моменты от Солнца игнорируем по сравнению с моментами от Земли и эффект взаимодействия “ фигура-фигура Луна-Земля” дает вклад только 1% в 8" наклон орбиты Луны. Eckhardt [1981] показал, что эффект движения эклиптики значителен - 6" в дополнение к 1.5", поэтому необходимо дополнять уравнения движения. Дифференциальные уравнения для ядра и мантии могут быть переписаны и решены в инерциальной системе координат. Решение имеет простое объяснение. Полос плоскости эклиптики двигается со скоростью 0.470" в год и ось этого вращения есть долгота эклиптики $\Pi = 174.87^\circ$ на эпоху J2000 и двигается медленно (-8.7" в год). Прецессия мантии и ядра приблизительно следует этому движению. Для постоянной составляющей решения обе оси вращения двигаются со скоростью 0.47" в год. Ось вращения ядра подтягивается мантией за счет ядро-мантийного взаимодействия. Ядро полностью связано с мантией при вращении по долготе и подходящее выражение для 6" члена имеет вид $0.47(B + C')/1.5n(C - A)$. Фаза равна $L - \Pi + 90^\circ$, где орбитальная средняя долгота

равна $L = F + \Omega$. Классическая широта либрации имеет слабую связь между ядром и мантией и очень чувствительна к параметру $\beta = (C - A)/B$, поэтому сидеральный член, связанный с движением эклиптики, имеет независимую информацию о моменте инерции ядра. Ядро-чувствительные члены имеют вид

$$\Delta p_1 = 6.0'' \frac{C'}{C} \sin(L - 84.87^\circ) \quad (41a)$$

$$\Delta p_2 = 6.0'' \frac{C'}{C} \cos(L - 84.87^\circ) \quad (41b)$$

Выражение для эклипτικο-индуцированного разделения между осями вращения ядра и мантии имеет вид $0.47''$ в год. Для турбулентной связи отставание оси вращения ядра за счет секулярного движения эклиптики и полюса мантии равно $\sim 1''$, в то время как она также прецессирует с углом в $2''$. Для турбулентной связи и железного ядра с радиусом в 421 км отношение $C'/C = 1.7 \cdot 10^{-3}$. Это дает верхний предел в $0.010''$ для сидеральной либрации ядра. Два ближайших члена (по частоте) связаны с вынужденной прецессией, это 18.6 летний периодический член, и свободная прецессия, с 81 летним циклом. Существует параметрическое решение, отвечающее всем трем частотам, но 81 летний цикл обременен определением C' . Поэтому, достаточно большие члены очень полезны для проникновения во внутренне строение Луны, но вычленение отдельных параметров из “кучи” есть задача для будущего и высокоточных длительных наблюдений за Луной. Максимум для приливного диссипативного члена есть 0.2 миллиардсекунда. Это очень маленькая величина по сравнению с наибольшими эффектами ядра. Дополнительный эффект, сплюснутость границы ядро-мантия, еще не исследован. Два источника сидеральных членов с двумя фазами и 81 летним циклом являются очень интересными для прямого определения момента ядра.

11. Орбитальные возмущения от диссипации в ядре

Гравитационное притяжение от сферического ядра действует подобно точечной массе и на прямую не возмущает лунную орбиту, но существует не прямой эффект воздействия. Постоянный сдвиг, благодаря ядру, либрационных углов τ и σ смещает принципиальные оси мантии от их состояний равновесия. Тогда смещение фигуры Луны воздействует на орбиту. Эффекты малы и наиболь-

ший член исследуется. Как и в случае с приливной диссипации, орбитальные возмущения исследуются численно [Williams, 2001]. Как обычно, самые важные эффекты - это изменение большей полуоси a , среднего движения n и наклона орбиты i . Изменения в a и n также связаны с изменением энергии и углового момента от орбиты и ядра

$$P = -K(\omega' - \omega)^2 \quad (42a)$$

$$P_{\text{ave}} = -\frac{KF^2 \sin^2 I}{1 + \xi^2} \quad (42b)$$

Секулярное среднее движение изменяется следующим образом

$$\Delta \dot{n} = \frac{K}{C(1 + \xi^2)} \frac{C}{mR^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \left(\frac{R}{a}\right)^2 3\dot{F} \sin^2 I \quad (43a)$$

$$\Delta \dot{n} = 1.11 \times 10^6 \frac{K}{C(1 + \xi^2)} \text{ //cent}^{-2} \quad (43b)$$

Значение ξ базируется на скорости узла. В предельном случае жидкого ядра мы имеем $0.038''$ столетие⁻². Изменение большей полуоси следует из формулы $\Delta a \dot{\omega} = -2 a \Delta \dot{n} \dot{\omega} / 3n$ и имеет вид

$$\Delta \dot{a} = -\frac{K}{C(1 + \xi^2)} \frac{C}{mR^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \left(\frac{R}{a}\right)^2 2a \sin^2 I \quad (44a)$$

$$\Delta \dot{a} = -1.64 \times 10^3 \frac{K}{C(1 + \xi^2)} \text{ m yr}^{-1} \quad (44a)$$

В предельном случае изменение равно -0.056 мм год⁻¹. В первом приближении не существуют моменты, перпендикулярные к эклиптике, но есть моменты, нормальные к орбите. Но они не вызывают изменение эксцентриситета, зато изменяют наклон орбиты

$$\frac{di}{dt} = -\frac{K}{C(1 + \xi^2)} \frac{C}{mR^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{\sin^2 I}{\sin i} \quad (45a)$$

$$\frac{di}{dt} = -4.9 \frac{K}{C(1 + \xi^2)} \text{ //yr}^{-1} \quad (45b)$$

Скорость изменения равна $-1.7 \cdot 10^{-7}''$ год⁻¹. Это тоже очень малый эффект. Влияние ядра на узел и долготу ускорения перигелия на порядок меньше, чем приливная диссипация в предельных случаях. Для аналогичного выноса полюса из плоскости Кассини приливная диссипация на Луне обеспечивает большие се-

кулярные изменения большей полуоси и среднего движения, чем диссипация в ядре. Также, приливы изменяют эксцентриситет, а ядро нет. Приливы с Земли на Луне действуют с противоположным знаком, чем приливная диссипация на Земле. Эффекты жидкого ядра на Луне вызывают изменения в a и n на три порядка меньше, чем приливы на Земле от Луны. Различия в орбитальных возмущениях на три порядка дает возможность их различать в сложном комплексе явлений.

Могут ли секулярные изменения орбитальных элементов – большая полуось, среднее движение, эксцентриситет – быть использованы для разделения вклада от лунных приливов и диссипации ядра? Для изменений большей полуоси и среднего движения приливная диссипация на Земле на два порядка по величине более важно, чем лунные приливы и на три порядка величины более важно, чем эффекты лунного ядра. В принципе, мы можем выделить эффект влияния Земли из наблюдаемых изменений орбиты и тем самым найти лунный эффект. Наблюдаемый офсет (offset) полюса дает линейную комбинацию двух лунных влияний и общий орбитальный эффект зависит от их соотношения. По отношению к секулярному ускорению \dot{n} Луна делает вклад между $0.038''$ столетие⁻² (вся диссипация в ядре) и $0.46''$ столетие⁻² (вся диссипация приливная). LLR модель имеет числа Лява и приливное время задержки для трехчастотных полос: полусуточные, суточные и длинных периодов. Лунные эфемериды DE403 были получены в 1995 г., и их секулярное ускорение от Земли и диссипации Луны равно $-25.64 \pm 0.4''$ столетие⁻². Предсказание приливного ускорения из лазерных наблюдений спутников Земли (SLR) систематически ниже на $\sim 1''$ столетие⁻² (по величине), чем данные LLR. Половина этой разницы не понятно. Коррекция за счет массы Луны $1 + m/M = 1.0123$. Тогда в модифицированном третьем законе Кеплера появляется дополнительный множитель 1.0028. После этих двух коррекций значение SLR увеличивается на $0.4''$ столетие⁻². Ситуация с изменением эксцентриситета более успешная. Луна дает вклад между $-1.0 \cdot 10^{-11}$ год⁻¹ (вся диссипация в приливах) и 0 (вся диссипация в ядре). Вклады от Земли и Луны достаточны близки по величине, так что знание изменения эксцентриситета является полезным для изучения внутреннего строения Луны. Изменение эксцен-

триситета на уровне $1.0 \cdot 10^{-11}$ год⁻¹ увеличивает перигелийное расстояние на 3.2 мм год⁻¹.

12. Численные решения для диссипации

Высокая точность LLR ($0.5 \cdot 10^{-10}$ относительно расстояния до Луны), продолжительность наблюдений и геометрия расположения рефлекторов на Луне позволяет получать широкий набор динамических и геометрических параметров. Здесь мы будем обсуждать параметры диссипации, приливной параметр Q и существование жидкого ядра Луны. Лазерная локация Луны осуществляется с марта 1970 года на трех станциях Земли: McDonald Observatory, Texas, Observatoire de la Cote (OCA), France и Haleakala Observatory, Maui, использующие четыре рефлектора на поверхности Луны – Apollo 11, 14, 15 и Lunakhod 2. В настоящее время функционируют две первые станции. Точность наблюдений достигает 15 мм по расстоянию. Решение для лунных параметров включает β , γ , J_2 , гравитационных гармоник третьего порядка, числа Лява k_2 , h_2 , l_2 , задержка по времени, связанная с k_2 , константу связи ядро-мантия K/C , амплитуды для 5 аналитических членов, связанных с диссипацией при вращении, и трех координат для каждого рефлектора. Другие подробности смотри у Williams et al. [2001]. Случаи А, В, С различаются разными моделями гравитационного поля Луны и фиксацией некоторых параметров и переменных при интегрировании. Близость значений годового эффекта для трех случаев (3.7, 4.1 и 4.0 mas для случаев А,В,С) показывает нечувствительность решения к моделям гравитационного поля. Изменение офсет полюса лежит в диапазоне 1.4 mas. Годовое значение $Q \sim 60$ (-19, + 49). Оставшиеся члены требуют более подробной интерпретации. До попытки интерпретации всех пяти вращательных члена рассмотрим влияние приливной диссипации и диссипации в ядре, получаемой из наблюдений (случай В): постоянный член -264 ± 5.0 mas и 27.6 дневная широтная коррекция 7.5 ± 1.2 mas. Предполагается, что зависимость Q от периода носит степенной закон $Q = Q_F (27.212/\text{период})^w$, $w = 0$ для Q независимого от частоты модели и $w = -1$ для $Q \sim 1/\text{частота}$. Анализ всех таблиц и решений дает наилучшие значения для $w = -0.19$ и $Q_F = 36.8$. Результаты решения даны в Таб. 6.

Таб.6. Основные динамические параметры в трех моделях диссипации

Parameter	Unit	Case A	Case B	Case C
Norm rms	1	0.8479	0.8490	0.8470
k_2	10^{-5}	2874 ± 80	2867 ± 80	2868 ± 80
Time delay	day	0.1152 ± 0.0140	0	0.1079
K/C	10^{-8} d^{-1}	1.122 ± 0.257	0	1.317
$\Delta\tau_{206}$	mas	0	-1.0 ± 1.6	2.7 ± 1.6
$\Delta\tau_{365}$	mas	3.4 ± 1.8	4.1 ± 1.8	3.6 ± 1.8
$\Delta\tau_{1095}$	mas	0	-26.7 ± 5.9	3.0 ± 5.9
$\Delta I\sigma_{27.6}$	mas	0	7.5 ± 1.0	1.1 ± 1.0
$\Delta I\sigma_{\text{const}}$	mas	0	264.0 ± 5.0	4.6 ± 5.0
S_{31}	10^{-6}	5.64 ± 0.64	5.869	5.869
S_{33}	10^{-7}	-2.58 ± 0.11	-2.457	-2.457
$\Delta\dot{e}$	10^{-11} yr^{-1}	1.68 ± 0.48	0.65 ± 0.46	1.55 ± 0.47
h_2	1	0.034 ± 0.018	0.035 ± 0.018	0.041 ± 0.018

На вращение Луны влияет только диссипация (четыре члена выше уровня ошибки наблюдений), а на орбиту Луны влияет как диссипация Луны, так и диссипация Земли! Поэтому, аномальное изменение эксцентриситета лунной орбиты (несовпадение наблюдений, вычислений и предсказания в 1.5 раза) говорит о более сложном характере лунной и земной диссипаций и требует дальнейших теоретических исследований.

Таб. 7 расшифровывает точность такого аналитического представления по приливным периодам.

Таб.7 Зависимость добротности мантии от периодов либрации и нутации Луны

$$Q = 36.8 (27.212 \text{ days/Period})^{-0.19}$$

Tidal period	Q	Uncertainties	
1/3 month	30	- 5	+ 8
1/2 month	32	- 5	+ 7
1 month	37	- 4	+ 6
206 days	54	-11	+ 19
1 year	60	-15	+ 30
3 years	74	-24	+ 65
6 years	85	-30	+ 105
75 years	137	-64	+ 950

13. Жидкое ядро Луны

Исследования последних десятилетий однозначно поставили перед учеными проблему существования и происхождения лунного ядра: есть ли оно, какова его структура, химический состав и агрегатное состояние. Эти вопросы непосредственно связаны с глобальной проблемой происхождения и эволюции системы Земля-Луна (Сапир , 2004).

Существует несколько аргументов в пользу существования у Луны железного ядра небольшого размера (Рис.2), до 600 км, с малой примесью серы и/или кислорода и горячей вязкой нижней мантии (Gusev et al., 2002, 2003).

Структура гравитационного поля Луны, выявленная из сопоставления высокоточных траекторных измерений “Lunar Prospector” (1999) с результатами лазерной альтиметрии, проведенной с борта “Clementine”(1994), а также с данными “Lunar Laser Ranging”(1969-2004), предполагает наличие металлического ядра. Современное определение величины полярного момента $\frac{C}{MR_M^2} = 0.39232 \pm 0.00002$ согласуется с железным ядром радиуса 220 – 450 км или с примесью серы 330 – 590 км (Konopliv et al., 1998, 2001).

Интерпретация значения полярного момента в рамках химических, тепловых и плотностных моделей лунной коры (Kuskov&Kronrad, 2001) и ман-

тии позволила сделать выводы о массе и размерах ядра. Таким образом, был получен скачок плотности от $3,8 \text{ г/см}^3$ до $7,0 \text{ г/см}^3$ на глубине примерно 1250 км, т.е. граница СМВ (ядро-мантия).

Остаточная намагниченность лунных пород, выявленная Apollo 13 говорит о сильном магнитном поле в несколько гауссов у Луны примерно 3,9 – 3,1 млрд. лет тому назад, которое могло генерироваться только благодаря динамомеханизму в жидком железном ядре, в этот ранний период эволюции (Runcorn, 1996, Stegman et al., 2003).

Магнитометрические измерения, выполненные Лунар Проспектором в апреле 1998 года, независимо подтверждают наличие металлического ядра радиусом 250 – 430 км (Lin et al., 1999).

Несовпадение центра масс и центра фигуры и переориентация осей инерции относительно оси вращения, что объясняется формированием лунного ядра только через 500 млн.лет после образования самой Луны, т.е. 4,1 млрд. лет тому назад (Runcorn, 1996).

Оценка числа Лява, полученная из детального анализа данных по дистанционному слежению “Lunar Prospector” (Konopliv et al, 2001), $k_2=0.025\pm 0.003$, свидетельствует о частичном плавлении в вязкой нижней мантии на границе с жидким ядром (Yoder et al, 2003), возможно, с образованием зоны в 200-300 км с ультранизкими скоростями сейсмических волн (ULVZ).

Анализ диссипации вращения Луны, полученной из ЛЛЛ, показал, что могут быть два источника диссипации: месячные твердотельные приливы и жидкое ядро, вращение которого отличается от твердого тела (Newhall & Williams, 1997; Williams et al., 2001).

Оба эффекта были рассчитаны численным интегрированием уравнений вращения Луны, и, как результат, был получен радиус ядра 352 км, если ядро чисто железное, и 374 км, если оно представлено эвтектической композицией Fe-FeS. Соответственно, были использованы следующие плотности для ядра, полученные из лабораторных экспериментов при сверхвысоких температурах и давлениях (Boehler, 1996; Fei et al, 1995): жидкое железо – 7 г/см^3 , твердое железо – $7,8 \text{ г/см}^3$, эвтектический состав Fe-FeS – $5,3 \text{ г/см}^3$.

Внутреннее строение

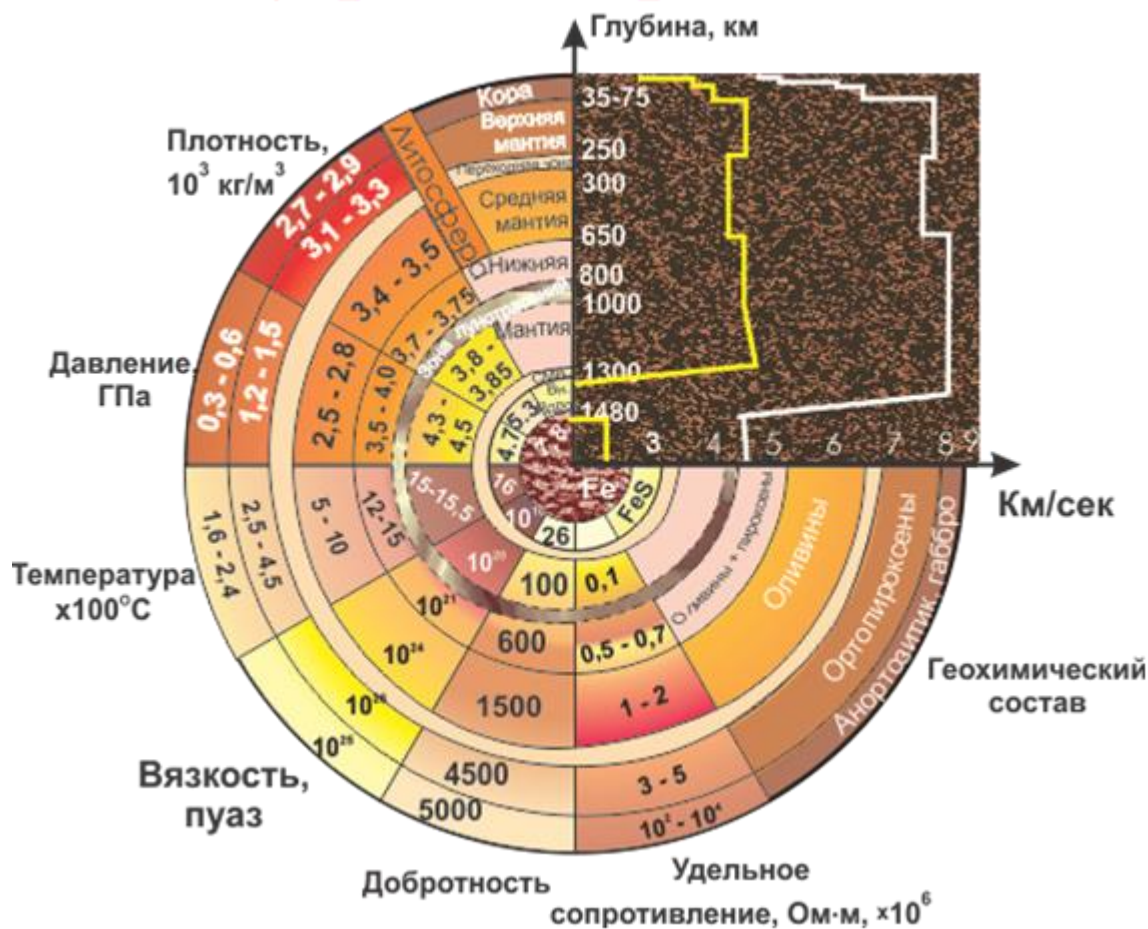


Рис. 2. Геофизический разрез Луны

Рассмотрим другие аргументы, свидетельствующие о существовании жидкого ядра. Анализ данных с Apollo по измерению магнитной индукции и магнитного дипольного момента Луны дает на верхнем пределе радиус ядра в 400-500 км [Wiskerchen and Sonett, 1978; Goldstein, 1979; Russell et al, 1981; Hood, 1986]. Недавние измерения индуцированного дипольного момента спутником “Lunar Prospector” (NASA) дали значения радиуса 340 ± 90 км [Hood et al., 1999]. Наиболее успешные модели внутреннего строения Луны должны учитывать сейсмические данные, геофизический состав, среднюю плотность и момент инерции. Подобные модели предпочитают плотное ядро. Binder [1980] нашел радиусы железного или насыщенного железом ядра, лежащие между 200 и 400 км (Таб.8).

Таб.8 Размеры лунного ядра R_c из наблюдений

from seismic data	≤ 400 km
from polar moment:	
interpretation	220 ÷ 450 km
Iron core	$320 \begin{smallmatrix} +50 \\ -100 \end{smallmatrix}$ km
FeS core	$510 \begin{smallmatrix} +80 \\ -180 \end{smallmatrix}$ km
Depth of the core-mantle boundary	1250~1400 km
Core ellipticity (a-c)	~140 m
Thick of fluid outer core	65 – 180 km

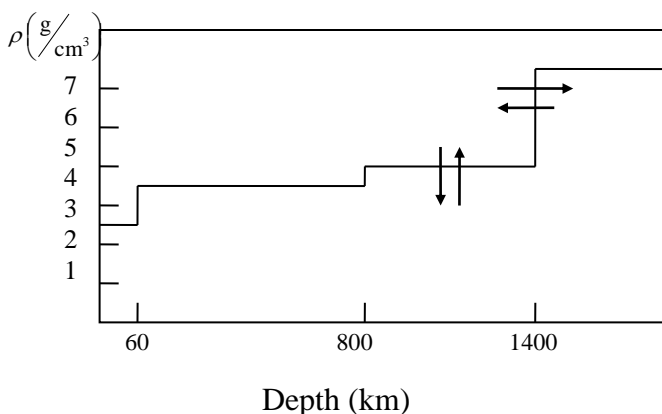


Рис.3 Плотностной профиль Луны по сейсмическим данным Apollo (NASA) и LLR.

Рассматривая различные модели внутреннего строения, Hood and Jones [1987] пришли к металлическому ядру от 250 до 460 км (1 – 4 % массы всей Луны). Исследование Mueller et al. [1988] показали необходимость включения в модель ядра радиусом не менее 150 км. Малое ядро

также требуется при предположении о плотности кристаллической коры плотности менее $2.9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Kuskov and Kronrad [1998a, b] оценили железное ядро в 320 - 390 км и с примесью серы FeS в 490 - 600 км. Сейсмические исследования успешно зондировали Луну до глубины в 1000 км [Nakamura et al., 1974], но зондирование и интерпретация более глубоких слоев пока затруднительно на имеющейся базе сейсмический данных.

Если интерпретация задержки прихода Р волн справедлива, то расплавленное ядро с радиусом 170-360 км предполагается. Оценка скорости прохож-

дения Р волн через ядро оказалось ниже, чем ожидалось для железного ядра. Эта оценка породила рассмотрение моделей геохимического состава ядра с FeS (Таб.9).

Таб. 9 Параметры добротности из Apollo сейсмоки

Upper mantle Q_s^u	5000
Middle mantle Q_s^m	1500
Lower mantle Q_s^l	~100 ÷ 300
Zone of phase transition upper-middle mantle	~800 km

Sellers [1992] нашел, что сигнал от падения метеоритов на поверхность Луны удовлетворяет сейсмическим данным, но предположение о двух других падениях согласуется с низкоскоростным ядром с радиусом 400 - 450 км. Свободные осцилляции Луны чувствительные к внутреннему строению. Khan and Mosegaard [2001] исследовали сейсмические данные от падения метеоритов на поверхность Луны на предмет свободных колебаний. Решение обратной задачи геофизики не показали жидкого ядра, но оставили надежду на жидкий слой размером в 100 км. Для того, чтобы объяснить наблюдаемые эффекты во вращении Луны: наличие свободных колебаний в присутствии относительно большой диссипации, необходимо, чтобы ядро было или полностью жидким, или между твердой мантией и твердым внутренним ядром имелась бы жидкая прослойка – внешнее жидкое ядро (Yoder, 1981).

Согласно модели внутреннего строения Луны (Stevenson and Yoder, 1981), давление на СМВ должно быть около 45 кбар, а температура около 1000°С. При таких условиях ядро не может быть чисто железным, так как в результате планетарного охлаждения, как предсказывает теория, оно должно бы полностью затвердеть (Stevenson et al., 1983). Затвердевание начинается от центра. Для того, чтобы ядро могло сохранить расплавленную оболочку, в модели постулируется небольшая концентрация серы. Наличие железа ускоряет процесс формирования квази-чистого железного твердого внутреннего ядра, в то время, как во внешней

его части постепенно увеличивается концентрация всплывающей более легкой серы (Рис. 4). Этот процесс продолжается до тех пор, пока не достигается эвтектический состав Fe-FeS, для которого характер затвердевания являются другим (Besson & Nicol, 1990). Эвтектическая композиция – это состояние, в котором встречаются и твердая и жидкая составляющая сплава одновременно. Из-за того, что внутреннее твердое ядро растет, а внешняя жидкая оболочка обогащается серой, точка затвердевания смещается до более низких температур, сохраняя внешнюю оболочку в расплавленном состоянии, несмотря на общее охлаждение Луны. Расчеты показывают, что 1% – 5% серы в ядре сохранит ядро от затвердевания на протяжении времени жизни Луны (Spohn et al, 2001). Так, для того, чтобы сохранить чистое железо в расплавленном состоянии, необходима температура 1600°C, в то время как точка плавления эвтектического состава Fe-FeS около 1000°C при соответствующем давлении.

Наблюдаемая при LLR диссипация может быть полностью объяснена наличием жидкого ядра, поэтому и делается вывод, что в настоящее время (Petrova et al., 2001, 2002) ядро не достигло своей конечной стадии – твердого состояния. Относительные размеры внутреннего и внешнего ядер будут зависеть от начальной пропорции Fe/S и современной температуры ядра (Konrad, Spohn, 1997). Согласно расчетам (Stevenson, Yoder, 1981) при массе серы в ядре от 4% до 13% по весу толщина жидкой оболочки составляет 65 – 180 км.

Обнаружение диссипативных эффектов на четырех вращательных модах докажет существование приливной мантийной диссипации и расплавленного жидкого ядра. LLR данные указывают на существование жидкого ядра и определяют константу связи между ядром и мантией. Так как константа связи зависит от радиуса ядра и состав жидкого ядра определяется через плотность и вязкость, то трудно отдельно измерить разные параметры ядра. В литературе по лунному ядру в основном оперируют жидким ядром, чисто железным и сплавами на основе железа. Давление на границе ядро-мантия достигает 50 kbar. Жидкое ядро вероятно содержит серу S и никель Ni вместе с железом Fe. Добавление серы к железу уменьшает плотность и понижает точку плавления этой смеси. Если для чистого железа при 50 kbar плавление происходит при 1660°C, то

для эвтектической смеси Fe-FeS точка плавления близка к 1000°C [Brett, 1973; Sponh et al., 2001].

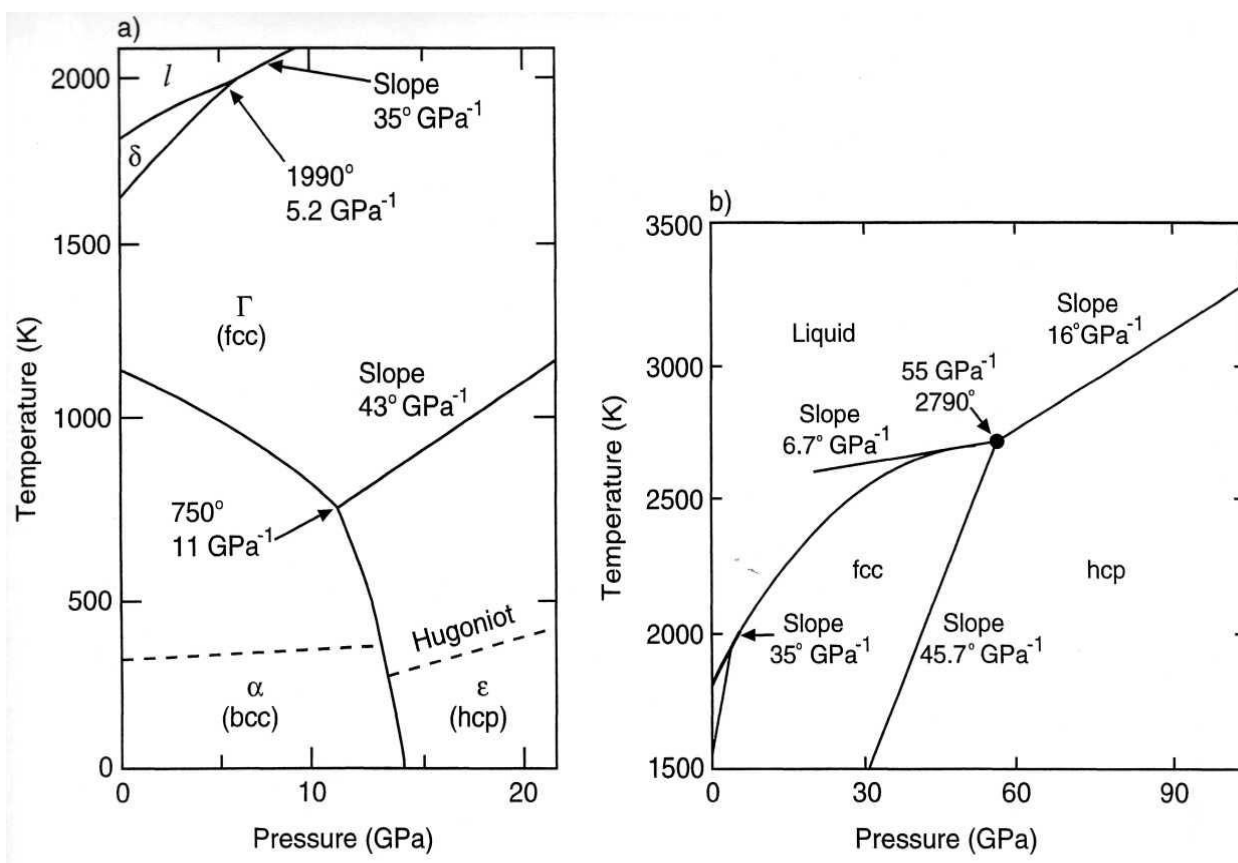


Рис. 4. Фазовые диаграммы различных модификаций железа при высоких давлениях и температурах (Anderson, 2003).

Добавление никеля может еще понизить эвтектическую температуру плавления до $\sim 940^{\circ}\text{C}$ и плотность смеси увеличить на несколько процентов. Количество серы в ядре и термодинамическое поведение системы Fe-FeS принципиально важно для состояния жидкого ядра; эффект наличия никеля менее драматично. Металлическое ядро заключено в мантии и Stevenson and Yoder [1981] аргументировали, что ядро должно быть насыщено железом в эвтектическом расплаве Fe FeS с 25% содержанием серы по весу.

Охлаждение такой Fe-FeS расплава в жидко-твердой части фазовой диаграммы должно сопровождаться концентрацией Fe в центральной твердой части фазы ядра, а сера будет концентрироваться в жидкой фазе. Для замерзания всей жидкости требуется температура ниже эвтектической температуры.

Жидкий внешний слой (внешнее ядро) и твердое внутреннее ядро обладает различными возможностями. Полностью жидкое или твердое ядра – крайние слу-

чаи моделирования. Полностью твердое ядро не удовлетворяет наблюдениям, так как согласно LLR анализу обнаруживается тонкий жидкий слой для объяснения вращательной диссипации Луны.

Таб. 10 Геофизические данные Луны

Средняя плотность	3344 кг м ⁻³
Плотность мантии	3269 кг м ⁻³
Плотность ядра	7396 кг м ⁻³
Толщина мантии	1.288×10 ⁶ м
Радиус ядра	350–400 км
Давление в ядре	45 – 50 кбар
Поверхностный тепловой поток	13.1÷16.9 мВт м ⁻²
Температурный градиент для верхней мантии	2° К/км
Температура нижней мантии (855 км)	1200° К
Удельная теплоемкость мантии	1300 Дж кг ⁻¹ К ⁻¹
Тепловая проводимость мантии	4 Вт м ⁻¹ К ⁻¹
Коэффициент теплового расширения	4×10 ⁻⁴ К ⁻¹
Коэффициент вязкости нижней мантии	1.5×10 ⁶ пуаз
Число Релея для ранней тепловой конвекции	(2.4-3.6)× 10 ⁵
Концентрация урана верхней мантии	25,7 ppb
Удельное сопротивление мантии	2×10 ⁶ ом×м
Дипольный магнитный момент	10 ¹³ Гс×м ³

Теория Yoder [1981] предполагает турбулентный слой толщиной равной горизонтальному движению $R' \cdot \sin I \approx 10$ км (Таб.10). Относительный размер внутреннего и внешнего ядер зависит от начальной пропорции S/Fe и современной температуры ядра. Для ядра с радиусом 350 км и современной температурой 1400-1700 °С и эволюционным охлаждением на 50° - 150°, Stevenson and Yoder [1981] вычислили пропорциональный состав серы на уровне 0.04 – 0.13 и толщину жидкого слоя 65 – 180 км. Решением модели является параметр К/С, но момент инерции С хорошо известен из наблюдений и может быть использован для нахождения К. Уравнение (37) связывает фракцию ядра f_c , плотность жидкости, теоретический параметр k, основанный на турбулентной теории пограничного слоя, и радиус ядра. Параметр k вычисляется для толстого турбулентного слоя, смежного с тонким ламинарным граничным слоем (38), который основан на теории Yoder [1981]. Нерегулярная топография границы ядро-мантия

может только увеличивать параметр k . Следовательно, получаемый размер ядра будет верхним пределом. LLR данные дают $f_c = 0.34 \pm 0.09$. Для жидкого железного ядра соответствующий радиус получается 335 (-21, +17) км. Поэтому на верхнем уровне 1- σ радиус имеет значение 352 км. Таб.11 представляет верхние пределы для радиуса ядра и также отношения массы ядро к полной массе Луны и отношение их моментов инерции.

Таб. 11 Различные геохимические и динамические конфигурации ядра

Liquid Outer	Solid Inner	Max R' km	Max $\frac{m'}{m}$	Max $\frac{C'}{C} \cdot 10^4$	Min ξ	$k, 10^{-4}$
Fe	none	352	0.018	7.3	0.022	7.3
Fe	Fe	352	0.019	8.0	0.020	—
Eutectic	none	374	0.016	7.4	0.021	7.2
Eutectic	Fe	374	0.023	10.8	0.015	—

В этих двух отношениях предполагается однородность плотности ядра. Существуют четыре случая: 1) жидкое железное ядро, 2) тонкий жидкий железный слой поверх твердого железного ядра, 3) жидкое Fe-FeS ядро с эвтектическим составом сплава, 4) тонкий жидкий Fe-FeS эвтектический слой поверх твердого железного ядра. Предполагается, что плотность жидкого железа - 7.0 грамм·см⁻³, твердого железа – 7.7 грамм·см⁻³, и Fe-FeS эвтектический состав с плотностью - 5.3 грамм·см⁻³. Жидкий слой тоньше 10 км вызывает проблемы. Если существует твердое внутреннее ядро, то жидкое внешнее ядро имеет две поверхности для диссипации (и два значения для k) и, подобно топографии, это может вызывать переоценку радиусов ядер. Внутреннее ядро может иметь свое собственное вращение, увеличивая сложность динамики трех подсистем. Предполагая, что внутреннее и внешнее ядра вращаются совместно, мы представляем эти два предельных случая в Таб.11.

Обнаружение большого полярного офсета за последние два десятилетия LLR наблюдений не позволяет однозначно указать причины. Yoder [1981] ука-

зывает, что неожиданное малое приливное мантийное значение Q предполагает значительную ($1/3$ наблюдаемого эффекта) диссипацию в жидком ядре.

Летучие элементы ожидаются в компании с железом в ядре Луны. Эти элементы обеднены в лунных образцах по отношению, как при сравнении с примитивными метеоритами, так и с составом мантии Земли. Newsom [1986] нашел, что распространенность этих элементов согласуется с 5% металлическим ядром, если Луна образовалась из хондритного материала. Если геохимический состав Луны напоминает материал мантии Земли, тогда ядро Луны составляет 1.2% массы всей Луны только. При изучении образования ядра Righter and Drake [1996] получили наилучшее согласование со всеми данными в модели с летучими элементами для 5% лунного ядра, но допускается и 1% ядро. Молярное содержание серы (Рис.5) лежит в интервале 0.15 – 0.20 частей, соответственно. Большое лунное ядро ($R > 400$ км) не удовлетворяет LLR данным.

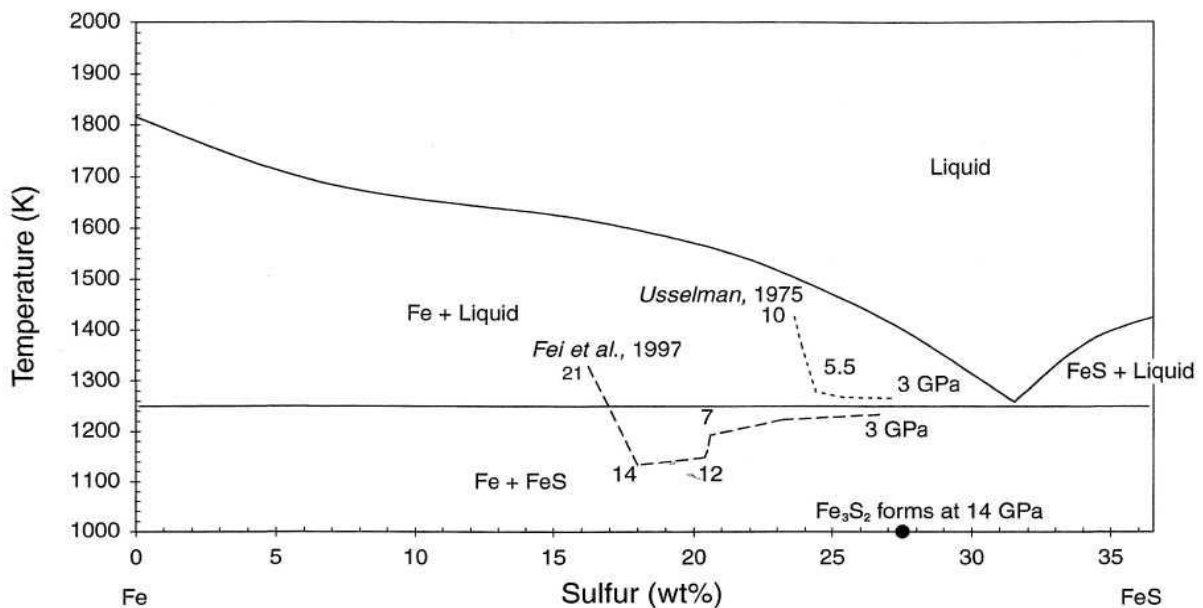


Рис. 5. Фазовые диаграммы бинарной системы Fe-S при давлении 1 бар (Raghavan, 1988) и для Fe₃S₂ (жирная точка) при давлении 14 GPa (Fei et al, 1995).

Тепловые модели Луны проявляют большое разнообразие. Toksoz et al. [1978] демонстрирует высокие температуры в центре (1000° - 1600°C) Луны и если существует ядро, то оно должно быть жидким. Binder and Lange [1980] представляют изначально расплавленную Луны, которая охлаждается и кристаллизуется в верхних слоях. Schubert et al. [1980] показывают большой темпе-

ратурный градиент в верхних 290 км литосферы, в то время как глубокая конвективная зона изотермальна. За время эволюции Луны центральная температура уменьшилась на 150°C . Konrad and Sponh [1997] и Spohn et al. [1999] стартуют с горячего состояния Луны с жидким ядром. Охлаждение верхней мантии приводит к образованию литосферы, в то же время как глубокие зоны остаются теплыми и горячими. Ядро остается расплавленным до настоящего время, если содержание серы не менее 8% по весу.

Многочисленные древние лунные горные образцы возрастом от 3.1 до 4.0 млрд лет назад показывают остаточную намагниченность. Особенно сильная намагниченность наблюдается в интервале от 3.6 до 3.9 млрд лет назад [Cisowski et al., 1983; Cisowski and Fuller., 1986]. Одной из возможных интерпретаций этого явления является следующая модель: ранняя Луна имела жидкое ядро с динамо механизмом для генерации магнитного поля, которое функционировало недолгое время. Тепловые модели, которые стартуют с холодного состояния, не успевают прогреть центральную часть, расплавить ядро и “запустить” раннюю динамо-машину. Источники поддержания динамо механизма остаются неясными [Stevenson, 1983]. Динамо прекращает работу, если ядро затвердывает или конвекция в ядре затухает. Stevenson [1980] предложил модель асимметричного образования ядра с временным динамо механизмом. Отсутствие глобального магнитного поля в настоящее время не исключает частично и полного расплавленного ядра в настоящее время или в прошлом. Возможно также генерация только тороидальной составляющей магнитного поля в настоящее время [Gusev et al., 2004].

Мощность диссипации в турбулентном пограничном слое оценивается величиной $(1.9 \pm 0.5) \cdot 10^{22}$ эрг год⁻¹. Это слабый источник нагрева в настоящее время, но в прошлом он может быть очень важным. Эта мощность энергии пропорциональна $\sim n^3 \sin^3 I / (1 + \xi^2)^{1.5}$. Энергия диссипации могла быть существенно выше на раннем этапе эволюции, когда Луна была ближе к Земле, а максимум диссипации наблюдается на расстоянии 200 000 км между Землей и Луной. Другая возможность: Луна могла проходить различные спин-орбитальные резонансы с существенным изменением орбитальных и вращательных элементов [Ward,

1975; Touma and Wisdom, 1998]. В течении перехода диссипация ядра составляет $\sim 10^{27}$ эрг·год⁻¹, обеспечивая поддержания ядра в жидком состоянии и современного размера. Stevenson [1983] утверждает, что выделение мощности энергии $\sim 3 \cdot 10^{24}$ достаточно для успешного функционирования динамо-механизма и объяснения сильной остаточной намагниченности. Турбулентная энергия выделяется с нарушением сферической симметрии; при зависимости этой энергии от относительной скорости в третьей степени в полярной области выделяется энергии в 2.36 раз больше, чем в экваториальной области. Такое распределение энергии эффективно обеспечивает конвекцию в динамо-механизме. Если существует внутреннее ядро, то часть энергии выделяется на внутренней границе жидкого ядра. Если диссипация ядра являлось источником генерации палеомагнитного поля, то период сильной магнетизации должен сопровождаться высоким приливным выступом (горбом) в период изменения состояния вращения; генерация энергии должна уменьшится резко, и конвекция останавливается по мере выхода из резонанса и удалении Луны от Земли. В Таб.9 сведены последние данные о малом жидком ядре с массой $\sim 2\%$ от массы все Луны. Нами была рассчитана и проанализирована модель Луны, содержащей твердую силикатную мантию и жидкое железное ядро ($\rho = 5.3 - 7.2$ гр/см³) с небольшой примесью серы (7% – 15 % по весу). Следуя методу Хетино (Getino et al., 1997; 2000), мы получили для Луны нормальные ротационные моды свободных колебаний – Чандлеровские Колебания (CW) и Свободная Нутация Ядра (FCN) – при учете *турбулентной диссипации R* (Yoder, 1981) в слое на границе ядро-мантия.

Значение коэффициента диссипации $R = 5 \times 10^{22} - 3 \times 10^{24}$ (Дж·сек) рассчитывалось в соответствии с коэффициентом добротности Q, полученным из ЛЛЛ данных (Williams et al., 2001). Моделирование периодов при различных значениях плотности и размеров ядра и турбулентного слоя показало: 1. Период P_{CW} почти не чувствителен к изменениям размера, плотности и диссипации ядра, т.к. внутреннее перераспределение плотности и фазового состава ядра при сохранение общих неизменных параметров всей Луны (полная масса, моменты инерции, динамическое сжатие) почти не влияют на чандлеровскую составляющую нутаций Луны; 2. Период P_{FCN} существенно коррелирует с параметром диссипации

при увеличении радиуса ядра до 400 км и толщины турбулентного слоя до 180 км. Из зависимости P_{FCN} от радиуса ядра следует интересный результат: существенное понижение периода колебаний, что является важным индикатором выбора модели при интерпретации либрационных наблюдательных данных в предстоящих лунных миссиях (Kawano, 2003)

В японских экспериментах SELENE-2, направленных непосредственно на детальное изучение гравитационного поля, фигуры и внутреннего строения Луны (Kawano et al., 2003; Gusev et al., 2015) открываются большие перспективы для исследования динамических и структурных параметров Луны. Эту задачу обеспечат сейсмическое зондирование с посадочных модулей, VLBI- и LLR-измерения в проекте SELENE-2. Значительных результатов можно ожидать от непосредственных наблюдений физической либрации с помощью телескопа, планируемого быть установленным на полюсе Луны в 2024–2025 году (программа ILOM – вторая часть миссии SELENE-B). Этот телескоп с фокусным расстоянием 2 м, оборудованный ПЗС-матрицей 4000×4000 и линзой диаметра 20 см, позволит осуществлять определение положения звезд с точностью до одной миллисекунды. В результате японских экспериментов будет получена возможность оценить радиус R_c и плотность ядра, скачок плотности на СМВ, а также ее эллиптичность, получены параметры свободной либрации и дифференциального вращения ядра и мантии.

14. Свободные либрации и нутации многослойной Луны

Аналитический метод Гамильтона, примененный для расчета вращения планеты, имеющей слоистую внутреннюю структуру, (Getino & Ferrandiz, 1999), выявляет несколько частот нормальных мод. Для Луны, которая моделируется как трехслойное тело с тремя эллипсоидальными слоями: твердая мантия, жидкое внешнее ядро и твердое внутреннее ядро – в ее полярном вращении должно наблюдаться 4 типа колебаний. Значения их частот получаются из соответствующих уравнений и зависят от размеров ядер, их химического состава и динамического сжатия (Dehant et al, 2003).

Таб. 12 Параметры свободной либрации/нутации по данным LLR и структурного моделирования

<u>“Chandler Wobble”</u>	ellipse
amplitude	8.10"×3.31”
period	74.63yr
<u>precession mode</u>	
amplitude	0."022
period	24.16 yr
<u>longitude mode</u>	
amplitude	1."4
period	1056.12 days
Free core nutation P _{FCN}	144.73 yr
Free inner core nutation P _{FICN}	516-635 yr
Inner Chandler Wobble P _{ICW}	101-108 yr

Чандлеровские колебания (CW), представляющие собой движение оси вращения Луны относительно динамической системы координат (ДСК – триэдр осей инерции), вызванное эллипсоидальностью лунного тела и несовпадением оси вращения с главной осью инерции. Это единственная общая мода вращения, существующая для полностью твердой планеты. Для Луны она имеет большой период 74.6 года в системе координат, связанной с ДСК. Это колебание является **прямым**, т.е. осуществляется в направлении вращения Луны, оно обнаруживается в ЛЛЛ-наблюдениях как 3”×8” эллиптическая компонента (Newhall, Williams, 1997). Частота и период чандлеровских колебаний определяются формулами:

$$m_1 = 2\Omega \frac{A}{A_m} \sqrt{e_a e_b}; \quad P_{CW} = \frac{1}{m_1} \quad (46)$$

Свободная нутация ядра (FCN), представляющая дифференциальное вращение жидкого ядра относительно вращения мантии. Эта мода существует только в том случае, если ядро жидкое. Она имеет квази-суточный период в ДСК и описывает **обратное колебание** (против вращения Луны). Для Луны, с

учетом ее «суток» в 27 дней, FCN-мода и период FCN определяются по формулам:

$$m_2 = -\Omega \left(1 + \frac{A}{A_m} e_c \right) = - \left(\frac{1}{1 \text{месяц}} + \frac{1}{P_{FCN}} \right); \quad P_{FCN} = - \frac{1}{m_2 + \Omega} \quad (47)$$

В пространстве, т.е. в инерциальной системе координат, лунная FCN имеет большой период порядка 144 лет, если динамическая фигура ядра подобна мантии (Petrova, Gusev, 2001) или около 186 лет, для динамически симметричного ядра с эллиптичностью 1×10^{-4} .

Свободная нутация внутреннего ядра (FICN) – мода, которая относится к дифференциальному вращению внутреннего ядра по отношению к другим слоям Луны. Эта мода существует только для ядра, которое имеет внутреннюю твердую составляющую и внешнюю жидкую оболочку. Она также имеет квазисуточный период в ДСК и имеет **прямое колебание** (по вращению Луны).

$$m_3 = -\Omega \left(1 + \delta + \frac{A_s}{A_m} e_f \right) = - \left(\frac{1}{1 \text{месяц}} + \frac{1}{P_{FICN}} \right); \quad P_{FICN} = \frac{1}{m_3 + \Omega} \quad (48)$$

Исходя из физического смысла и формулы, полученной Хетино и Феррандишем (Getino & Ferrandiz, 1999), для малого параметра δ , его величина *отрицательна*. И хотя формулы (47) и (48) для частот свободных нутаций почти одинаковы по виду, влияние дельта *уменьшает* вклад эллиптичности жидкого ядра в формуле (49), превращая FICN в прямые колебания.

Чандлеровские колебания внутреннего ядра (ICW), которые отвечают за дифференциальное вращение оси фигуры внутреннего ядра по отношению к оси вращения всей Луны и вызваны эллиптичностью твердого ядра, имеющего избыток плотности по отношению к внешнему жидкому ядру. Эта мода также существует только для эллиптического твердого ядра, окруженного жидкой оболочкой, а колебания являются **прямыми**.

$$m_4 = 2\Omega(e_s + \delta); \quad P_{ICW} = \frac{1}{m_4} \quad (49)$$

Рисунок схематично демонстрирует модель трехслойной Луны. Обозначения в формулах (46-49) общепринятые: эллиптичности $e_a, e_b, e_c=e_f, e_s$. для луны в

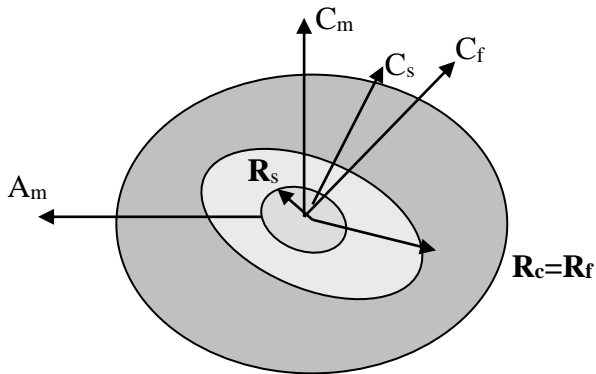


Рис. 6 Композиционный разрез Луны.

С целью определения зависимости периодов свободных колебаний от различных параметров, характеризующих внутреннее строение Луны, нами было проведено компьютерное моделирование по формулам 46-49 для различных моделей Луны. Расчеты и построение диаграмм осуществлялись в табличном процессоре Excel с применением программных модулей на языке VBA.

целом, для ядер жидкого и твердого соответственно.

Нами было рассмотрено 3 модели Луны.

Модель 1: Луна имеет твердую мантию и жидкое ядро различной плотности: от эвтектического состава Fe-FeS (с различной концентрацией серы) до чисто железного ядра.

Модель 2: отличается от модели 1 тем, что ядро рассматривалось чисто железным с плотностью 7г/см^3 . Исследуется зависимость периодов от эллиптичности ядра.

Модель 3: отличается от модели 2 тем, что включается диссипация с коэффициентом R , соответствующим вязкому турбулентному затуханию на границе ядро-мантия. Хетино и др. (Getino et al., 1997; 2000) получили для этого случая следующие формулы:

$$m_1 = 2\Omega \frac{A}{A_m} \sqrt{e_a e_b} \left(1 - \frac{A}{A_m} e_c - \frac{R}{\Omega A_m} \right) \text{ (CW)} \quad m_2 = -\Omega \left(1 + \frac{A}{A_m} \left(e_c + \frac{R}{\Omega A_c} \right) \right) \text{ (FCN)} \quad (50)$$

Плотность FOC бралась 5.3 г/см^3 (эвтектический состав 25 % веса S и 75 % веса Fe), а плотность SIC – 7.7 г/см^3 (твердое железо). Для числовых значений были приняты следующие положения:

- Параметры ядер – размеры, эллиптичность и плотности – выбирались в окрестности значений, полученных из LLR-анализа (Williams et al., 2001).

- Как и в случае Земли, эллиптичность SIC, бралась на 5% меньше эллиптичности FOC.
- Диапазон размеров ядра R_c был от 200 км до 600 км во всех моделях.
- Набор плотностей ρ_c для Модели 1: $4.5 \rightarrow 5 \rightarrow 5.5 \rightarrow 6 \rightarrow 6.5 \rightarrow 7$ (г/см³).
- Набор значений для диссипативного фактора R для Модели 3: $5 \times 10^{22} \rightarrow 1 \times 10^{23} \rightarrow 5 \times 10^{23} \rightarrow 1 \times 10^{24} \rightarrow 3 \times 10^{24}$ (Дж·сек)
- Толщина жидкого ядра (FOC) варьировалась от 20% R_c до 70% R_c по отношению ко всему ядру.

Результаты моделирования следующие:

1. Чувствительность к изменениям плотности выявляется только для радиусов, больших 400 км.
2. Как и ожидалось, FCN-период очень сильно зависит от эллиптичности ядра. В то же время P_{sw} слабо зависит от эллиптичности, но более существенно от радиуса ядра.
3. При учете диссипации выявлено, что CW-период не чувствителен к ней: это внутренний процесс для Луны в целом и поэтому он не будет оказывать влияния на этот тип колебаний. Для FCN наблюдается сильная корреляция с диссипацией для радиусов меньших 400 км.
4. По сравнению с двухслойной моделью для CW и FCN вклад трехслойной модели не превышает 1 % в значениях периодов для всех типов ядер.
5. Величины периодов для FICN и ICW были получены впервые. Их значения существенно зависят от параметра δ . Необходимо дальнейшее уточнение этой формулы.
6. Общая тенденция в поведении периодов новых мод следующая:
 - а) FICN-период уменьшается с ростом радиуса ядра и с толщиной жидкой оболочки;
 - б) и, наоборот, ICW-период возрастает как с величиной радиуса ядра, так и с толщиной жидкой оболочки.
7. Поиск этих типов колебаний в движение полюса Луны необходимо заложить в программу исследований японский космической миссии SELENE-B (Kawano et al., 2003) проект ILOM.

Таб.13 Периоды (года) свободных либраций и нутаций трехслойной Луны

R=350 км; $\rho=7$ г/см ³ , $e_c=5,17 \times 10^{-4}$				
	Модель1	Модель2 ($e_c=4E-4$)	Модель3	Модель4
CW	74.02	74.03	(R=5E22) 74.03	$R_s=280$ км 74.08
			(R=3E24) 74.03	$R_s=175$ км 74.02
FCN	144.02	186.88	(R=5E22) 144.58	$R_s=280$ км 144.52
			(R=3E24) 144.22	$R_s=175$ км 144.52
FICN				$R_s=280$ км 634.22
				$R_s=175$ км 515.90
ICW				$R_s=280$ км 100.21
				$R_s=175$ км 108.05

15. Упругое тело Луны: приложения и сравнения.

Твердотельные приливные эффекты диссипации обнаруживаются на четырех вращательных частотах. По аналогии с Землей полезно провести геофизическую интерпретацию приливного значения Q . Общий отклик Земли (твердое тело + океаны) может наблюдаться на нескольких периодах: суточные и полусуточные через приливные эффекты, месячные и полумесячные через зональные приливы вращающейся Земли, и 14 месячные через Чандлеровы колебания. В силу сильного влияния океанов трудно выделить из общего эффекта твердотельные приливы. Определение $Q = 370$ (доверительный интервал 200 - 800) для твердотельных полусуточных приливов было представлено в [Ray et al., 1996]. Неупругая теория мантии Земли предпочитает в законе зависимости Q от частоты положительный показатель степени $w = 0.09$. [Smith and Dahlen, 1981]. Если это значение использовать, то приливное значение Q должно быть 260 для месячных приливов и 205 для годовых приливов. Для нижней мантии значения Q более модельно зависимое, но из табуляции Wahr and Bergen [1986] следует $Q_{\text{мантия}} \approx 0.6Q_{\text{приливн.}}$ для $w = 0.09$. Для лунных месячных приливов $Q = 37$ оказалось неожиданно низким по сравнению с земным значением. Существует меньший контраст для годового периода, если учесть доверительный интервал оши-

бок. Лунное значение $w = -0.19 \pm 0.13$ для показателя степени слабо зависит от частоты, но имеет противоположный знак, чем у земного значения!

Теории вязко-упругости (реология) широко используется при рассмотрении диссипации на разных временных шкалах [Ross, Schubert, 1986]. Когда $1/Q$ мало, то реология Максвелла дает Q , которое приблизительно пропорционально частоте ($w = 1$), в тоже время, реология Кельвина-Фогта предлагает закон для Q , обратно пропорциональный по частоте ($w = -1$). Данные LLR с $w = -0.19 \pm 0.13$ не согласуется с обеими реологиями. Третья модель [Ross and Schubert, 1986] имеет два подходящих параметра и имеет ограниченную применимость на разных диапазонах частотах. Известны лунные сейсмические определения локальных значений Q с глубиной в диапазонах 1 и 8 Гц [Nakamura, 1983; Goins et al., 1981].

Сейсмические данные по Р и S волнам показывают $Q > 1000$ для верхних зон, много больших, чем для Земли, и, возможно, связанное с дегидрацией лунных пород, с дальнейшим уменьшением Q с глубиной. Nakamura and Koyama [1982] нашли, что для S волны Q увеличивается с частотой в окрестности 5 Гц. Goins et al [1981] указал на зону ослабления сейсмических волн, лежащую ниже 1100 км.: $Q < 500$, а Nakamura et al, [1982] говорит о $Q < 100$ для S волн. Выше зоны ослабления лежит область (глубина = 700 – 1100 км) источников глубоких лунных трясений. Сопоставление двух зон лунотрясения указывает, что резкие изменения в реологических свойствах вызваны напряжениями [Goins et al, 1981]. Глубокие лунотрясения имеют месячный период и вызываются приливами как триггерном механизмом. Для всех решений в таб.6 секулярное ускорение за счет приливов от Земли на Луне и плюс взаимодействие ядра с мантией равно $\Delta \dot{n} = -25.9'' \text{ столетие}^{-2}$, и изменение большей полуоси равно $\Delta \dot{a} = 38.2 \text{ мм} \cdot \text{год}^{-1}$.

Для лунного $Q = 37 \pm 5$ приливы вызывают изменения $0.29 \pm 0.04'' \text{ столетие}^{-2}$ и $-0.43 \pm 0.06 \text{ мм} \cdot \text{год}^{-1}$, соответственно, в то время как, ядро-мантийное взаимодействие дает только $0.013 \pm 0.003'' \text{ столетие}^{-2}$ и $-0.019 \pm 0.005 \text{ мм} \cdot \text{год}^{-1}$. Скорости переноса энергии в тело Луны от изменения орбиты Луна равны: $(4.3 \pm 0.6) \cdot 10^{23} \text{ эрг} \cdot \text{год}^{-1}$ для приливов и $(1.9 \pm 0.5) \cdot 10^{22} \text{ эрг} \cdot \text{год}^{-1}$ для ядро-мантийного взаимодействия.

Таб.14 Геофизические параметры Луны (Sponh et al., 1997, 2001, Гусев и др. 2015 и другие источники)

Coefficient of thermal expansion	$4 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
Surface gravity	1.62 m s^{-2}
Average density	3344 kg m^{-3}
Mantle density ¹	3269 kg m^{-3}
Core density	7396 kg m^{-3}
Mantle thickness	$1.288 \times 10^6 \text{ m}$
Specific heat	
of the mantle c_p	$1300 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
of the core $c_{p,c}$	$675 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Mantle thermal conductivity k	$4 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Viscosity factor $\bar{\mu}$	$1.5 \times 10^6 \text{ Pas}$
Activate temperature for creep	$5.6 \times 10^4 \text{ K}$
Mantle latent heat fusion	$4.2 \times 10^5 \text{ J kg}^{-1}$
Surface heat flow	$13.1 \div 16.9$ mWm^{-2}
Temperature gradient for the upper mantle	2° K/km
Temperature in the lower mantle (855 km)	1700° K
Rayleigh number for early heated convection Ra	$(2.4-3.6) \times 10^5$
Uranium concentration [U]	25.7 p.p.b
Temperature in the lower mantle (855 km)	1700° K
Initial core temperature	1800° K
Present core temperature	$1400^\circ - 1700^\circ \text{ K}$
Core density	$7.8-7.9$
Core pressure	gr/cm^3 $45 - 50 \text{ kbar}$

Скорость диссипации, выраженная через постоянный поток тепла через лунную поверхность равна $3.8 \text{ нановатт} \cdot \text{см}^{-2}$, что существенно меньше, чем поток тепла от радиогенных элементов в коре и общего охлаждения мантии и яд-

ра: в 480 раз меньше, чем $1.8 \text{ микроватт} \cdot \text{см}^{-2}$ [Langseth et al. 1976] и меньше в 320 раз, чем $1.2 \text{ микроватт} \cdot \text{см}^{-2}$ [Warren and Rasmussen, 1987], соответственно. В соответствии с ранними публикациями [Kaula, 1963, 1964; Kaula and Yoder, 1976; Peale and Cassen, 1978] можно сделать вывод, что в современной Луне приливное тепло менее важно, чем тепло от радиогенных источников тепла. Goins et al. [1981] оценил количество энергии, реализующуюся при лунотрясениях, на уровне $8 \cdot 10^{13} \text{ эрг} \cdot \text{год}^{-1}$. Также приемлемо утверждение, что приливная энергия обеспечивает эти лунотрясения. Приливная энергия на 10 порядков больше по величине, чем энергия лунотрясения. Средняя энергия диссипации в слое толщиной 2 км сравнима с энергией лунотрясения. Для поверхностных лунотрясений Goins et al [1981] оценил уровень энергии в $2 \cdot 10^{17} \text{ эрг} \cdot \text{год}^{-1}$, но не существует убедительных аргументов об источнике этой энергии как приливной эффект. В дополнении к общей приливной диссипации, 4% общей энергии генерируется в тонком пограничном слое (грубо ~ 10 км толщиной, согласно теории Yoder) на границе ядро-мантия.

Рассмотрим зону высокой приливной диссипации. Так как радиоактивные минералы мигрируют к поверхности, то с глубиной возрастает роль приливной диссипации по отношению к радиоактивному источнику. В зону затухания сейсмических волн от 350 до 640 км содержится 4.2% лунного объема. Эта зона может быть камерой накопления для сейсмической энергии, поэтому возможно, что значительная порция приливной энергии сохраняется в небольшом объеме чуть выше границы ядра. Если большая часть энергии накапливается в переходной зоне над ядром, то стационарный поток тепла от приливной и турбулентной диссипации должен увеличивать температуру $\sim 32^\circ\text{C}$ на верхней границы переходной зоны при однородной проводимости в $3.5 \text{ w} \cdot \text{m}^{-1} \text{ C}^{-1}$.

На космогонических масштабах времени тепловые эффекты от приливов более интересные. Этот вопрос рассматривался Peale and Cassen [1978] : они оценили, что приливная диссипация увеличивает среднюю лунную температуру на 40° C , с учетом космогонического масштабирования температура возрастает до 140° C . Для однородной Луны они также вычислили пространственное распределение энергии по объему Луны и указали, что центральная часть прогрева-

ется значительно (до 400° C). Для неоднородной модели Луны центральная часть прогревается еще интенсивнее за счет приливной диссипации. На ранних этапах, когда Луна была существенно ближе к Земле и проходила спин-орбитальные резонансы, приливная диссипация значительно возрастает. Наклон лунного экватора и, следовательно, приливная и турбулентная диссипация увеличиваются во время перехода (менее 10^8 лет) и в окрестности перехода. Однако, вычисления, основанные на современных данных, трудно экстраполировать на ранние времена, до момента “замерзания” фигуры Луны или до эры “океана магмы”.

Приливная диссипация Земли в значительной мере локализована в океанских приливах. Протяженность, глубина и форма океанов зависит от движения основных литосферных плит, поэтому приливное значение Q изменяется и его современное значение выше, чем среднее значение на космогоническом масштабе. Приливной отклик океанов на действие приливной силы на приливных частотах зависит от естественных частот, сил и диссипации океанических нормальных мод. Нормальные моды зависят от изменений конфигурации океанов и материков, и приливные частоты изменяются за счет эволюции лунной орбиты и вращения Земли. Экстраполяцию по времени эволюции лунной орбиты и вращения Земли следует координировать с данными о приливном палеовращении. Как указал Lambeck [1980, 1988] достоверные палеоданные о вращении доступны только за последние 800 млн. лет. Число дней в году согласуется со средней скоростью орбитальной эволюции, следуемой из LLR данных. Число дней в месяце указывает или на заниженную скорость вращения, неприливное ускорение вращения Земли или систематические потери приливных полос. Bills and Ray [1999] указали на переменность значения Q на больших временах. Современное полусуточные приливные частоты выше, чем скорость вращения в прошлом, и уменьшаются по закону $1/Q$. Поэтому, временная шкала экстраполируется не монотонно.

Современная приливная эволюция подобна измеренным значениям и ранние скорости вращения медленнее, чем те которые основаны на постоянном значении Q . Peale and Cassen's [1978] вычислена приливная энергия при посто-

янном значении эксцентриситета и наклоне орбиты Луны, но при переменным расстоянии между Луной и Землей. Вычисления указывают, что эволюционирующая орбита увеличивает приливную энергию и энергию взаимодействия ядро-мантия на Луне. При изменении скорости вращения лунные приливная и ядерная диссипации вызывают большие отрицательные скорости изменения наклона орбиты, так что большие наклоны ($> 30^\circ$) возможны до вхождения в спин-орбитальные резонансы и спин-переходы. Большой наклон увеличивает приливную и турбулентную диссипацию [Williams et al., 2001]. По мере эволюции приливная энергия около спин-перехода увеличивается больше чем на порядок по сравнению с расчетами Peale and Cassen's [1978]. Это увеличивает температуру в центре Луны на 200°C при $Q \approx 37$, 90% этого прогрева приходится на первые $1.3 \cdot 10^8$ лет (за 30 млн лет до достижения спин-перехода). Приливы могут быть значительным источником нагревания ранней Луны. В течение спин-перехода в расплавленном лунном ядре генерируется максимальная энергия (10^{27} эрг год $^{-1}$), которая сохраняется в объеме меньшем, чем 1% от полного лунного объема.



Рис. 7. Стратификация Луны и лунного ядра

История образования лунного ядра неизвестна. Ядро образуется в период образования Луны или позднее (дифференциация ядра). Другая возможность: малое ядро появляется до спин-перехода и дополнительное прогревание на границе ядро-мантия увеличивает плавление и размер лунного ядра. Еще одна возможность: это комбинация нагрева при аккреции, от радиоактивного распада и приливов генерирует жидкое ядро или слой до момента окончания спин-перехода с большим наклоном орбиты. При этом турбулентная диссипация начинается при большом экваториальном наклоне, так что энергия сохраняется в относительно малом объеме и может, в дальнейшем вызывать плавление ядра и мантии, конвекцию жидкого ядра и генерацию магнитного поля через динамо механизм. Плохо известная спин-орбитальная эволюция ранней Луны делает оценки турбулентной энергии в центральной части Луны достаточно неопределенными. Возможные верхние оценки плотности энергии предсказывают драматические тепловые катаклизмы для лунного ядра и мантии.

Если сильная остаточная намагниченность лунных пород соответствует времени спин-перехода, то задержка в 500 млн лет согласуется со стандартным сценарием приливной эволюции системы Земля-Луна. В настоящее время на Земле приливная диссипация на 97% сконцентрирована в океанах. На ранней Земле конфигурация океанов была иной. В эпоху тяжелой бомбардировки Земли роением планетозималей наблюдалось как испарение, так и образование атмосферы и океанов. Для сравнения бомбардировка Луны наблюдалась между 3.8 и 3.9 млрд лет назад; более ранние кратеры были или разрушены, или не были замечены лунными миссиями. Ранняя Земля нагревалась при бомбардировке и образовании ядра. Galer [1991] сделал вывод о том, что теплая мантия должна была предотвращать значительные континентальные материки, образующиеся из поднимающегося вещества, как это наблюдается и в настоящее время.

В ранней Луне должно было наблюдаться плавление ядра и кристаллизация верхней мантии при приливной диссипации и турбулентной диссипации ядра. Стартуя в тепловой модели с температурой ядра выше на 100° - 200° C, чем температура мантии, Konrad and Spohn [1997, 2015] и Spohn et al., [1999] нашли, что в ранней Луне наблюдается конвекция в вязко-упругой мантии. При этом

генерируются восходящие мантийные плюмы, которые вызывают частичные плавления в верхней мантии. Это плавление может проявляться в виде раннего лунного вулканизма. Результаты этих двух статей также корректны, если изначальный разогрев ядра заменить на турбулентный нагрев на границе ядро-мантия. Petrova and Gusev [1997] предложили, что турбулентная диссипация может также вызывать плюмы. Konrad and Spohn [1997, 1999] нашли конвекцию в раннем лунном жидком ядре. Конечно, остается много неясностей. Неизвестно, когда ядро стало расплавленным. Около спин-перехода лунные приливы и диссипация ядра вызывают большие изменения наклона орбиты, поэтому большой наклон орбиты возможен до перехода, а это в свою очередь увеличивает приливную и турбулентную энергию в теле Луны. Если современное низкое значение Q связано с частичным плавлением в переходной зоне, расположенной выше границы ядро-мантия, то Q для ранней луны может сильно отличаться до стадии прогрева или образования ядра.

LLR данные указывают на современную скорость изменения эксцентриситета порядка $2.0 \cdot 10^{-11}$ год⁻¹, а теория предсказывает от $0.7 \cdot 10^{-11}$ год⁻¹ до $1.0 \cdot 10^{-11}$ год⁻¹ с учетом диссипации Луны, исключаящий 40-50% эффект от Земли. Это серьезное расхождение для теории! Высокое значение эксцентриситета в прошлом должно увеличить диссипацию на Луне. Goldreich [1963] указал, что диссипация на Луне может изменить знак скорости изменения эксцентриситета. Недавние исследования Mignard [1981] и Touma and Wisdom [1998] рассмотрели эволюцию для различных значений лунной диссипации, но изменение ориентации во время спин-перехода не моделировалось.

Приливная эволюция обзревается в работе Peale [1999]. На лунной поверхности приливное смещение от больших месячных членов ~ 0.1 м. Следовательно, значение $Q = 37$ соответствует смещению в несколько мм для сдвинутой по фазе компоненте. Приливное смещение детектируется сегодня (h_2 в табл.7), но улучшение точности требуется. Для однородного упругого тела число Лява $I_2 \approx 0.3 h_2$.

Затухание свободных либраций может быть найдено из уравнения (36) или смотри Peale [1976]. Для свободной либрации по долготе время затухания

равно $2.7 \cdot 10^4$ года. Большая часть затухания связана с приливами. Время затухания колебания полюса равно $2.0 \cdot 10^6$ года, и также доминирует приливная диссипация мантии. Прецессионно-нутационная мода имеет время затухания $1.65 \cdot 10^8$ лет, где диссипация в ядре дает 70%, а приливная диссипация составляет 30% общего баланса. Энергия в каждой моде свободной либрации пропорциональна квадрату амплитуды [Newhall, Williams, 1997; Williams et al., 2001]. Свободная либрация по долготе имеет энергию $9.6 \cdot 10^{16}$ эрг и диссипирует со скоростью $7 \cdot 10^{12}$ эрг год⁻¹. Для двух мод по широте энергия не постоянна за полный цикл, поэтому расчеты производятся для средних значений: для колебания полюса она равна $2.9 \cdot 10^{21}$ эрг, а потери энергии идут со скоростью $3 \cdot 10^{15}$ эрг год⁻¹. Для малой прецессионно/нутационной моды средняя энергия равна $3 \cdot 10^{13}$ эрг, а потери равны $2 \cdot 10^8$ эрг год⁻¹

Выводы

За пять десятилетий LLR наблюдений обнаружено смещение прецессирующего полюса Луны за счет диссипации энергии. Предложено два объяснения : приливные потери в теле Луны и взаимодействие между границами жидкого ядра и вязкоупругой мантии. Ключевое различие между двумя причинами лежит в области маленького дополнительного влияния жидкого ядра на вращение.

Орбитальное и собственное (спин) вращение интегрируется численно для модели приливов и жидкого ядра. Записаны дифференциальные уравнения для действия диссипации на вращение. Получены приближенные аналитические решения. В Таб. 2 дается зависимость каждого вращательного члена от от периодического приливного параметра Q. Рассматривается два случая зависимости Q от частоты: постоянное значение Q и Q - обратно пропорциональное частоте. Наиболее важные члены отвечают периодам в 1 месяц, 206 дней, 1 год, 3 года и 6 лет. Приливная диссипация вызывает затухание свободных либраций и secularные изменения орбиты. Рассмотрена математическая модель для взаимодействия жидкого ядра и твердой мантии, в которой моменты сил пропорциональны относительной угловой скорости различно вращающиеся ядро и мантия. Так как мантия прецессирует с периодом 18.6 лет, то она индуцирует прецессию ядра с аналогичным периодом, но много меньшим наклоном и офсетом узла. Ори-

ентация ядра близка к нормали плоскости эклиптики, чем вращение мантии. Ядро не вращается с той же скоростью, что и мантия, и это вызывает офсет долготы для направления принципиальной оси. Диссипация ядра вызывает смещение узла плоскости экватора вдоль эклиптики и сдвиг оси вращения. Независимое вращение ядра привносит затухающую моду ядра. Затухание мод ядра происходит быстро ~ 140 лет. Выражения для медленно затухающих свободных мод мантии записываются. Исследуются вынужденные моды, но эти моды далеки от потенциально наблюдаемых членов ядра (нет резонанса). Вынужденные члены, включая офсет полюса, в основном чувствительны к параметру K , который связывает моменты и относительную угловую скорость. Специальный член, благодаря секулярному движению плоскости эклиптики, напрямую связан с моментом инерции ядра и может быть предложен для наблюдательной японской программы "ILOM".

Диссипация лунного ядра вызывает секулярные изменения орбиты. Возмущения от ядра на офсет полюса меньше, чем от приливов на Луне. Это различие можно использовать для разделения эффектов диссипации от ядра и приливов на скорость изменения эксцентриситета орбиты. Приливы на Земле также вызывают секулярные возмущения орбиты, поэтому орбитальный тест более чувствителен к диссипации, чем вращательный тест. В настоящее время лунное вращение является лучшим тестом для различения турбулентной диссипации в ядре и приливной диссипации в мантии. Моделирование на основе 35 летних LLR данных однозначно указывает на диссипацию в расплавленном ядре и вязкоупругой мантии. Выявлены четыре коэффициента с диссипацией: приливное Q для периода в 1 месяц равно 37 (-4, +6), для 1 года равно 60 (-15, +30). Показатель степени w в законе $Q = Q(\text{частота})^w$ равен -0.19 ± 0.13 , т.е. Q медленно увеличивается с периодом. Обнаружено аномально высокое значение (от 2 до 3 раз больше) скорости изменения эксцентриситета лунной орбиты $2 \cdot 10^{-11}$ год $^{-1}$.

Теория пока бессильна в объяснении высокой скорости увеличения эксцентриситета лунной орбиты. При предположении турбулентной связи между ядром и мантией наблюдения дают радиус ядра в 335 (-21, +17) км, если ядро железное. Так как нерегулярности топографии границы ядро-мантия увеличива-

ет связь между ними, то предсказывается радиус ядра на верхнем уровне 1- σ : 352 км для железного ядра и 374 км для эвтектического состава Fe-FeS. Энергия, забираемая от орбиты и диссипатируемая в теле Луны, равна $(4.3 \pm 0.6) 10^{23}$ эрг год⁻¹ для приливов и $(1.9 \pm 0.5) 10^{22}$ эрг год⁻¹ для турбулентной диссипации на границе ядро-мантия. Это значительно меньше, чем тепловой поток от радиоактивных минералов в верхней мантии и коре. Энергии приливов достаточно для обеспечения энергетики глубоких триггерных лунотрясений, повторяющихся месячный приливной цикл. Сюрпризом оказалось низкое значение приливного Q. Значительное сейсмическое затухание предполагается выше границы ядра, в зоне частичного плавления нижней мантии и низких сейсмических скоростей. Эта зона доминирует в механизме приливного затухания. Предложены времена затухания для свободных либраций от диссипации в ядре и приливной диссипации в мантии.

Диссипации в ядре и мантии могут быть очень сильным источником тепла в ранней Луне. Диссипация энергии резко возрастает, когда Луна была ближе к Земле и постепенно уменьшается при удалении от Земли, но дополнительный пик активности диссипации возможен, когда Луна находилась в 200 тыс. км от Земли. Переход между двумя состояниями вращения вызывает временное увеличение лунного наклона и увеличение энергии диссипации от лунных приливов и действия ядра. Приливная диссипация может нагреть центральную область Луны дополнительно на несколько сотен градусов. Если приливная диссипация локализована в переходной зоне над ядром, то эта область может прогреться еще сильнее.

Если раннее ядро имело современный размер, аналогичное количество энергии будет заключено в маленьком объеме на границе ядро-мантия. Эта ранняя энергия может вызвать значительную тепловую активность в ядре и мантии, временно инициировать конвекции в жидком ядре и в вязкоупругой нижней мантии и генерировать магнитное поле на протяжении 900 млн лет. Поэтому остаточная намагниченность в лунных породах, имеющий своим пиком около 3.8 млрд лет назад, в период “океана магмы”, может отражать прохождение Луну спин-переход при монотонном удалении от Земли. Независимое детектиро-

вание вращающегося расплавленного ядра через его волочение за мантией превышает уровень неопределенности в три раза при современной точности LLR данных и других наблюдений. Связь значительной диссипации в ядре с изменением состояния вращения и с пиком остаточной лунной магнетизации - наиболее приемлемый путь, но трудно выполнимый. Существуют обильные возможности для будущих исследований.

Вопросы:

Резонансное вращение Луны вокруг Земли. Законы Кассини.

Вращательная динамика Луны с жидким ядром.

Приливная и вращательная диссипация Луны.

Отклонение фигуры Луны от гидростатического равновесия.

Возмущение орбиты Луны от приливной диссипации.

Прецессия мантии и параметр связи жидкого ядра Луны.

Динамика ядра, свободные моды и затухание вращения Луны.

Сидеральные возмущения и физические либрации многослойной Луны.

Орбитальные возмущения орбиты Луны от диссипации энергии в ее ядре.

Жидкое внешнее и твердое внутреннее двухслойное ядро Луны.

Свободные либрации и нутации многослойной Луны.

Вязкоупругое тело Луны: приложения и сравнения.

Литература:

Гусев А.В., Петрова Н.К., Ханада Н., 2015, "Вращение, физическая либрация и внутреннее строение активной и многослойной Луны", Монография, Изд-во Казанского федерального университета, Казань, 323 с

Жарков В.Н., 2013, Внутреннее строение Земли и планет. Элементарное введение в планетную и спутниковую геофизику. «Наука и образование», Москва, 415 с.

Галимов Э.М., 2011, Образование Луны и Земли из общего супрапланетного газо-пылевого сгущения (доклад на XIX всеросс. симпозиуме по геохимии изотопов 16 ноября 2010 г.), Геохимия. № 6. с. 563-580.

Кусков О.Л., Дорофеева В.А., Кронрод В.А., Макалкин А.Б., 2009, Системы Юпитера и Сатурна: формирование, состав и внутреннее строение крупных спутников. М.: Изд-во ЛКИ, 576 с.

Гусев А.В., Петрова Н.К., 2008, “Вращение, физическая либрация и внутреннее строение Луны”, Монография, Изд-во Казан. гос. ун-та, Казань, 208с
Белецкий В.В, Хентов А.А. Резонансные вращения небесных тел. Ниж. Новгород. Нижегородский гуманитарный центр, 1995., 350 с.
Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет, Наука, М., 1983, с.416
Сагитов М.У. Лунная гравиметрия. Наука, М., 1979, 298 с.
Шевченко В.В. Современная селенография. Наука, М., 1980, 315 с.

Books:

“Origin of the Moon”, 1986, Eds: W.K.Hartmann, R.J.Phillips, G.J.Taylor, Lunar & Planet. Inst, Houston, pp.781
“Origin of the Earth and Moon”, 2000, Eds:R.M.Canup, R.Righter, Univ.of Arizona, Tuscon, pp.555
“Global Earth Physics: A handbook of physical constant”, 1995, Ed.: T.J.Ahrens, AGU, pp.376
“Tidal phenomena”, 1997, Eds.: H.Wilhelm, W.Zurn, H.G.Wenzel, Springer, pp.400
“Earth core: Dynamics, Structure, Rotation”, 2003, Eds: V. Dehant et al., AGU, pp.277
Pater I., J.J.Lissauer, 2001, “Planetary Sciences”, Cambridge Univ. Press, pp.528
Schubert G., Turcotte D.L., Olson P., 2001, Mantle convection in the Earth and Planets. Cambridge Univ. Press, pp. 940

Articles:

Barkin, Yu., 2004 Comparative rotational dynamics of the Moon, Mercury and Titan. Astronomical and Astrophysical Transactions, v. 23, Issue 5, pp.481-492.
Barkin Yu, Gusev A., Petrova N., 2005 Study of spin-orbit and inner dynamics of the Moon: lunar mission applications. Advance of Space Research. v.34, pp.1-12
Canup R.M.: 2004, Simulations of a late lunar-forming impact., Icarus, v.168, pp.433-456
Dickey J.O. et al., 1994, Lunar Laser Ranging, Science, v.265, pp.482-490
Getino J. and J.M. Ferrandiz, 1997. A Hamiltonian approach to dissipative phenomena between the Earth's mantle and core, and effects on free nutations. Geophys.J.Int., v.130, pp.326-334
Gusev A. 1997. Gravitational capture to resonance rotation of the early Moon in GRG. Proc of IAU Colloquium N165, Poznan, Kluwer Acad. Publ., p. 215 – 220
Gusev A., Kawano N., Petrova N.: 2003. Gravitation Investigations on the SELENE mission and the existence of a lunar core. Astron. & Astroph. Trans., Vol. 22, 4-5, pp. 579-584.
Konopliv A.S., Binder A.B., Hood L.L., Kusinskas A.B., Sjogren W.I., Williams J.G.: 1998. Improved gravity field of the Moon from Lunar Prospector. Science, 281. - p.1476

- Konrad W., Spohn T.: 1997 Thermal history of the Moon: implication for an early core dynamo and post-accretional magmatism, *Adv.Space Res.*, v.19, pp.1511-1521
- Kuskov O.L., Kronrad V.A., 1998, Constitution of the Moon, 5, Constraints on composition, density, temperature, and radius of a core, *PEPI*, 107, 285-306
- Newhall X X & Williams J.G.: 1997, Estimation of the lunar physical librations., *Celestial. Mech. & Dyn.Astron.*, v.66, pp 21-30
- Peale S.J.,1976, Excitation and relaxation of the wobble, precession, and libration of the Moon, *JGR*, 81, 1813-27
- Petrova N, 1996 Analytical extension of lunar libration tables. *Earth, Moon and Planets*, v.73, 71-99
- Petrova N., Gusev A. 1999. "Free core nutation of the Moon", *Proc. of Int. Conf. "Geom. of Phys. IV"*, Kazan, Kazan Univ.Press, pp. 276-282.
- Petrova N., Gusev A. 2001. New trends in the development of the lunar physical libration theory. *Cel. Mechanics and Dyn. Astron.* v. 80 (3-4), pp. 215-225
- Spohn T., Konrad W., Breuer D., Ziethe R.: 2001, The longevity of lunar volcanism: Implication of thermal evolution calculation with 2D and 3D mantle convection models, *Icarus*, v.149, pp.54-65.
- Stegman D.R. *et. al.*: 2003, An early lunar core dynamo driven by thermochemical mantle convection, *Nature*, v.421, pp.143-146
- Stevenson D.J. , Yoder C.F.: 1981 A fluid outer core for the Moon and its implications for lunar dissipation, free libration, and magnetism. *Lunar Planet. Sci.*, XII, pp.1043-1044
- Williams, J. G., A. S. Konopliv, D. H. Boggs, R. S. Park, D.-N. Yuan, F. G. Lemoine, S.Goossens, E., M. T. Zuber, 2014, Lunar interior properties from the GRAIL mission, *J. Geophys. Res.*, 119, 1546. doi: 10.1002/2013JE004559
- Williams, J. G., D. H. Boggs, 2015, Tides on the Moon: Theory and determination of dissipation, *J. Geophys. Res. Planets*,120, doi:10.1002/2014JE004755.
- Williams J.G., Boggs D., Yoder Ch., Ratcliff J., Dickey J.: 2001. Lunar rotational dissipation in solid body and molten core. *J. Geoph.Res.*, v.106, No E11, p.27, 933-27, 968.
- Yoder C.F.: 1981. The free librations of a dissipative Moon., *Philos.Trans.R. Soc . Lond.*, v. A303, pp.327-338