Локальные показатели Марцинкевича и их приложение

Кац Д.Б.

Аннотация

В данной статье автор обобщает понятие показателей Марцинкевича, введенных им ранее в работе [1]. Эти показатели по сути являются новыми метрическими характеристиками для неспрямляемых плоских кривых. Вводимое здесь обобщение находит применение при решении краевых задач для голоморфных функций в областях, границы которых неспрямляемы.

1 Введение

Введем основные используемые понятия.

Задача Римана - классическая задача комплексного анализа; её решение на кусочно-гладких (и, следовательно, спрямляемых) контурах широко известно (см., например, [2, 3]) и является признанным во всем мире достижением российской и советской математики. Для неспрямляемого контура решение этой задачи было получено в 1982-1983 годах в работах [4, 5].

Для демонстрации одного из основных результатов в данной области нам потребуется ввести сначала некоторые понятия.

Условие Гельдера. Пусть Γ - компактное множество на комплексной плоскости, $0 < \nu \leq 1$. Заданная на Γ функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем ν, если

$$\sup\left\{\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^{\nu}} : t', t'' \in \Gamma, t' \neq t''\right\} := h_{\nu}(f, \Gamma) < \infty.$$

Линейное пространство функций, удовлетворяющих этому условию, принято обозначать $H_{\nu}(\Gamma)$. На нем можно ввести норму $\|f\|_{\nu} := h_{\nu}(f, \Gamma) + \sup\{|f(t)| : t \in \Gamma\}$, превращающую его в банахово пространство.

Верхняя метрическая размерность. Пусть Γ - компактное множество на комплексной плоскости. Через $N(\varepsilon, \Gamma)$ обозначим наименьшее число кругов диаметра ε, покрывающих множество Γ. Тогда верхняя метрическая размерность множества Γ, известная также как размерность Колмогорова, размерность Минковского и box counting dimension, определяется как предел (см. [6, 7, 8, 9])

$$\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon, \Gamma)}{-\ln \varepsilon}.$$

Эта величина меняется от 1 до 2; для спрямляемой кривой она равна единице, а для неспрямляемой может быть больше. Эта размерность может быть определена по-другому: разграфим плоскость на квадраты со стороной 2^{-n} и обозначим через $M(\Gamma, n)$ число таких квадратов, пересекающихся с Γ. Тогда (см., напр., [8, 9])

$$\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma := \limsup_{n \to \infty} \frac{\ln M(\Gamma, n)}{n}.$$

Задача о скачке. Возьмем теперь в качестве Γ простую замкнутую (не обязательно спрямляемую) кривую, разбивающую комплексную плоскость на конечную область D^+ и содержащую бесконечно удаленную точку область D^-. Пусть на этой кривой задана функция $f(t)$. Задачей о скачке называют краевую задачу об отыскании голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, которая непрерывна в $\overline{D^+}$ и в $\overline{D^-}$, и предельные значения которой в точках $t \in \Gamma$ при стремлении к ним из областей D^+ и D^- связаны соотношением

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

Это - простейший случай упомянутой выше задачи Римана. Подобная задача может ставится и на незамкнутой дуге.

Сформулируем теперь упомянутый выше результат.

Теорема 1 (см. [4, 5]). *Пусть Γ есть простая замкнутая (вообще говоря, неспрямляемая) кривая на комплексной плоскости и $f \in H_\nu(\Gamma)$. Если*

$$\nu > \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma, \tag{2}$$

то задача о скачке имеет решение.

Другие характеристики неспрямляемых кривых типа размерности. На данную тему существуют примеры двоякого рода. Так, построен пример К2, когда условие (2) нарушено и задача о скачке неразрешима, но с другой стороны, известны случаи [10], когда задача имеет решения даже несмотря на нарушение данного условия. Именно из этого следует необходимость во введении других метрических характеристик неспрямляемых кривых типа размерностей, отличающихся от верхней метрической размерности и позволяющих сделать условие (2) более точным. К примеру, в публикациях [10, 11, 12] (см. также недавние публикации [13, 14]) вводяттся аппроксимационная и уточненная метрическая размерность.

Опишем их вкратце. Пусть область D^+ разбита на меньшие неналегающие области δ_j со спрямляемыми границами длин λ_j, а r_j – наибольший радиус круга, помещающегося внутри δ_j. Число $M_d = \sum \lambda_j r_j^{d-1}$, где сумма берется по всем областям δ_j, называется $d-$массой этого разбиения. Тогда внутренняя аппроксимационная размерность Γ есть точная верхняя грань значений d, для которых существует разбиение с конечной $d-$массой. Внешняя аппроксимационная размерность определяется аналогично. Определение уточненной метрической размерности сложнее: здесь используются последовательности областей δ_j, из которых область D^+ (или D^-) получается в результате применеия операций $\bigcup$ и $\setminus$. Доказано, что

(i) как аппроксимационные, так и уточненные метрические размерности не превосходят $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$, и имеются примеры кривых, для которых каждая из них строго меньше $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$;

(ii) теорема 1 сохраняет силу при замене в условии (2) верхней метрической размерности на любую из описанных выше размерностей, то есть такая замена усиливает теорему 1.

Проблема, однако, в том, что до настоящего времени неизвестны точные значения аппроксимационных и уточненных метрических размерностей сколько-нибудь тривиальных кривых. Это связано с использованием в их определениях множества всевозможных разбиений области на меньшие области со спрямляемыми границами, которое трудно обозримо в нетривиальных случаях.

Становится ясно, что с точки зрения приложений в краевых задачах все вышеперечисленные размерности обладают недостатками: верхняя метрическая размерность не вполне точно учитывает свойства неспрямляемой кривой, обеспечивающие разрешимость краевой задачи, а аппроксимационная размерность и уточненная метрическая размерность очень сложны для вычисления. В связи с этим возникает потребность в разработке новых метрических характеристик неспрямляемых кривых, в том числе и не являющихся размерностями.

2 Показатели Марцинкевича и их локализация.

В работе автора [1] введена следующая характеристика.

Показатели Марцинкевича. Пусть, как и выше, Γ есть замкнутая жорданова кривая, разбивающая комплексную плоскость на конечную область D^+ и бесконечную область D^-. В дальнейшем мы предполагаем, что эта кривая неспрямляема, но имеет нулевую площадь, так что области D^+ и D^- измеримы. Рассмотрим интеграл

$$I_p(D^+) = \iint\limits_{D^+} \frac{dxdy}{\mathrm{dist}^p(z,\Gamma)}, \quad z = x + iy.$$

Очевидно, что при $p = 0$ этот интеграл конечен - он равен площади D^+, а при $p > 0$ он может оказаться бесконечным. В связи с этим введем величину

$$\mathfrak{m}^+\,\Gamma = \sup\{p : I_p(D^+) < \infty\}.$$

Аналогично, рассмотрим область D^*, равную $D^- \bigcap \{z : |z| < r\}$, где r настолько велико, что Γ полностью содержится в круге $\{z : |z| < r\}$. Для области D^* также введем характеристику

$$\mathfrak{m}^-\,\Gamma = \sup\{p : I_p(D^*) < \infty\}.$$

Наконец, положим

$$\mathfrak{m}(\Gamma) := \max\{\mathfrak{m}^+\,\Gamma, \mathfrak{m}^-\,\Gamma\}$$

Характеризация свойств множества через поведение некоторых интегралов по дополнению этого множества, содержащих $\mathrm{dist}(z,\Gamma)$, восходит к работам польского математика Йозефа Марцинкевича (см. [15]). В связи с этим автор назвал величины $\mathfrak{m}^+\,\Gamma$ и $\mathfrak{m}^-\,\Gamma$ показателями Марцинкевича кривой Γ (внутренним и внешним). В [1] доказаны неравенства

$$1 \ge \mathfrak{m}^+\,\Gamma \ge 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma, \quad 1 \ge \mathfrak{m}^-\,\Gamma \ge 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma.$$

Кроме того, как установлено в [1], справедлива

Теорема 2 *Пусть* Γ *- простая замкнутая (вообще говоря, неспрямляемая) кривая на комплексной плоскости и* $f \in H_\nu(\Gamma)$*. Если*

$$\nu > 1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}(\Gamma), \tag{3}$$

то задача о скачке имеет решение.

Условия этой теоремы во многих случаях менее ограничительны, чем условия теоремы 1.

Локальные показатели Марцинкевича. Пусть Γ – замкнутая неспрямляемая кривая, r – достаточно малое положительное число, $t \in \Gamma$. Обозначим $D_r^+(t) := D^+ \cap \{z : |z-t| \leq r\}$, а через $M_r^+(t)$ – множество значений показателя p, для которых интеграл

$$\iint\limits_{D_r^+(t)} \frac{dxdy}{\operatorname{dist}^p(z,\Gamma)}$$

сходится. При $r < r'$ имеем $M_{r'}^+(t) \subset M_r^+(t)$, а отсюда $\sup M_{r'}^+(t) \leq \sup M_r^+(t)$, то есть $\sup M_r^+(t)$ монотонен как функция переменной r, и предел

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma;t) = \lim_{r\to 0}\{\sup M_r^+(t)\}$$

существует. Назовем его внутренним локальным показателем Марцинкевича в точке t. Аналогично определяется внешний локальный показатель $\mathfrak{m}^-(\Gamma;t)$.

Отметим ряд свойств локальных показателей Марцинкевича. Прежде всего, они сохраняют свои значения при параллельном переносе и повороте кривой Γ, а также при применении к ней преобразований подобия и симметрии, что легко доказывается с помощью соответствующих замен переменных в рассматриваемых интегралах. Далее, для любого $t \in \Gamma$ справедливы неравенства

$$1 \geq \mathfrak{m}^+(\Gamma,t) \geq 2 - \overline{\operatorname{dm}}\,\Gamma, \quad 1 \geq \mathfrak{m}^-(\Gamma,t) \geq 2 - \overline{\operatorname{dm}}\,\Gamma;$$

их справедливость доказывается так же, как аналогичные неравенства для нелокальных показателей в [1]. Отметим также следующее свойство.

Теорема 3 *Справедливы равенства*

$$\inf\{\mathfrak{m}^+(\Gamma;t) : t \in \Gamma\} = \mathfrak{m}^+\,\Gamma, \quad \inf\{\mathfrak{m}^-(\Gamma;t) : t \in \Gamma\} = \mathfrak{m}^-\,\Gamma.$$

Доказательство. Докажем первое из соотношений; второе доказывается аналогично. Зафиксируем любое $p < \mathfrak{m}^+\Gamma$. По определению показателя Марцинкевича $I_p(D^+) < \infty$. Но тогда для любых $t \in \Gamma$ и $r > 0$ мы имеем $I_p(D_r^+(t)) < I_p(D^+) < \infty$, и отсюда $p \in M_r^+(t)$. Значит, при любом $t \in \Gamma$ справедливо неравенство $\mathfrak{m}^+(\Gamma; t) \geq p$, а поскольку p можно выбрать сколь угодно близким к $\mathfrak{m}^+\Gamma$, то $\mathfrak{m}^+(\Gamma; t) \geq \mathfrak{m}^+\Gamma$, и $\inf\{\mathfrak{m}^+(\Gamma; t) : t \in \Gamma\} \geq \mathfrak{m}^+\Gamma$. Допустим, что $\inf\{\mathfrak{m}^+(\Gamma; t) : t \in \Gamma\} > \mathfrak{m}^+\Gamma$; тогда найдется число p такое, что $\inf\{\mathfrak{m}^+(\Gamma; t) : t \in \Gamma\} > p > \mathfrak{m}^+\Gamma$. Из левой части последнего неравенства следует, что любой точки $t \in \Gamma$ существует радиус $r(t) > 0$ такой, что интеграл $I_p(D^+_{r(t)}(t))$ сходится. Круги $|z - t| < r(t)$ образуют покрытие компакта Γ. Выберем из него конечное подпокрытие, состоящее из кругов $K_j = \{z : |z - t_j| < r_(t_j)\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$, и обозначим $\Delta = D^+ \bigcap(\bigcup_{j=1}^{n} K_j)$. Очевидно, интеграл $I_p(\Delta)$ сходится. Но сходится и интеграл $I_p(D^+ \setminus \Delta)$, потому что расстояние от $D^+ \setminus \Delta$ до Γ положительно. Значит, сходится и интеграл $I_p(D^+)$, что делает неравенство $p > \mathfrak{m}^+\Gamma$ невозможным. Теорема доказана.

Приведем два примера вычисления локальных показателей Марцинкевича.

Пример 1 *Сначала рассмотрим кривую, построенную в [1]. Возьмем квадрат* $Q = \{x, y : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\}$. *Разобьем его сторону* $\{0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ *на участки* I_n *от* 2^{-n} *до* 2^{-n+1}, *где* n *меняется от 1 до* $+\infty$, *зафиксируем положительные числа* α *и* $\beta \geq 1$, *и разобъем каждый из этих участков на* $2^{[n\beta]}$ *равных частей, где* $[n\beta]$ *означает целую часть числа* $n\beta$. *Обозначим точки деления участка* I_n *через* x_{nj}, j *- номер в порядке убывания. Присоединим к квадрату* Q *прямоугольники* $p_{nj} = \{x, y : x_{nj} - C_n \leq x \leq x_{nj}, 0 \leq y \leq 2^{-n}\}$. *Величину* C_n *определим равенством* $C_n = \frac{1}{2}a_n^\alpha$, *где* a_n *- расстояние между точками деления на отрезке* I_n, *то есть* $2^{-n-[n\beta]}$. *Границу полученной области* D^+ *обозначим* Γ.

В работах [4], [5] доказано, что $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma = \dfrac{2\beta}{\beta + 1}$ *при* $\alpha = 1$. *Точно так же вычисляется* $\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$ *при* $\alpha > 1$, *причем и в этом случае она равна* $\dfrac{2\beta}{\beta + 1}$. *Интеграл* $\displaystyle\iint\limits_{D^+} \frac{dxdy}{dist^p(z, \Gamma)}$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{[n\beta]} \cdot 2^{-n} \cdot (C_n)^{1-p} \asymp 2^{n\beta - n - n(1+\beta)\alpha(1-p)}$, *то есть при* *условии* $\beta - 1 - (1+\beta)\alpha(1-p) < 0$, *откуда* $1 - p > \dfrac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha}$, *то есть* $p < 1 - \dfrac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha}$. *Отсюда*

$$\mathfrak{m}^+\,\Gamma = 1 - \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha}.$$

Аналогично, $\mathfrak{m}^-\,\Gamma = \dfrac{2}{\beta+1}$ *при любом* α.

Но в окрестности любой точки $t \in \Gamma$, *кроме нуля, кривая* Γ *спрямляема. Поэтому локальные показатели Марцинкевича* $\mathfrak{m}^{\pm}(\Gamma;t)$ *равны 1 при* $t \neq 0$, *а в точке* $t = 0$ *имеем* $\mathfrak{m}^+(\Gamma;0) = 1 - \dfrac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha} > 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$, $\mathfrak{m}^-(\Gamma;0) = \dfrac{2}{\beta+1} = 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$.

Пример 2 *Пусть заданы* k *пар положительных чисел* $\alpha_j \geq 1$, $\beta_j \geq 1$, $j = 1, 2, \ldots, k$. *Для каждой из них построим область* D_j^+, *как в предыдущем примере, и положим* $D = \cup_{j=1}^k \{D_j^+ + j - 1\}$ *(имеются ввиду параллельные переносы на* $j-1$ *единиц вдоль вещественной оси). Тогда для каждой точки* t *границы* Γ *области* D, *за исключением точек* $0, 1, \ldots, k-1$ *вещественной оси, имеем* $\mathfrak{m}^+(\Gamma,t) = \mathfrak{m}^-(\Gamma,t) = 1$, *а в этих исключительных точках*

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma, j-1) = 1 - \frac{\beta_j - 1}{(\beta_j+1)\alpha_j}, quad\, \mathfrak{m}^-(\Gamma, j-1) = \frac{2}{\beta_j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

При этом

$$\overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma = \max\{\frac{2\beta_j}{\beta_j+1} : j = 1, 2, \ldots, k\}, \quad \mathfrak{m}^+\,\Gamma = \min\{1 - \frac{\beta_j-1}{(\beta_j+1)\alpha_j} : j = 1, 2, \ldots, k\},$$

$$\mathfrak{m}^-\,\Gamma = \min\{\frac{2}{\beta_j+1} : j = 1, 2, \ldots, k\} = 2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma.$$

Приведенные примеры показывают, в частности, что существуют кривые, для которых $\mathfrak{m}^+(\Gamma,t)$ строго больше $2 - \overline{\mathrm{dm}}\,\Gamma$. Аналогичные примеры можно построить для внешнего показателя Марцинкевича.

3 Локальный критерий разрешимости задачи о скачке

Перейдем теперь к приложению введенных характеристик в теории краевых задач. Продолжим функцию $f \in H_\nu(\Gamma)$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ по Уитни (см. [15]). Получится функция $u(z)$ такая, что $u|_\Gamma = f$. В $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ эта функция имеет частные производные любого порядка. Если $f \in H_\nu(\Gamma)$, то $|\frac{\partial u}{\partial x}| \leq \frac{C}{dist^{1-\nu}(z,\Gamma)}$, $|\frac{\partial u}{\partial y}| \leq \frac{C}{dist^{1-\nu}(z,\Gamma)}$ (см. [15]). Далее, рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \chi(z)u(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{D^+} \frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\zeta d\overline{\zeta}}{\zeta - z}, \tag{4}$$

где $\chi(z)$ - характеристическая функция области D^+.

Теорема 4 *Если $\nu > 1 - \mathfrak{m}^+(\Gamma, t)$ в любой точке кривой, то функция Φ корректно определена и интегрируема в некоторой степени, большей двух, в окрестности Γ. Она удовлетворяет краевому условию задачи о скачке в тех точках $t \in \Gamma$, где $\nu > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}^+(\Gamma, t)$.*

Доказательство Согласно теореме 3 из справедливости неравенства $\nu > 1 - \mathfrak{m}^+(\Gamma, t)$ в любой точке кривой следует, что $\nu > 1 - \mathfrak{m}^+\,\Gamma$. Значит, производная $\frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}}$ интегрируема в D^+ в некоторой степени, большей единицы. Поэтому функция Φ корректно определена и интегрируема в некоторой степени, большей двух (см. [16]). Далее, обозначим через E множество тех точек $t \in \Gamma$, где $\nu \leq 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}^+(\Gamma, t)$. Тогда для каждой точки $t \in \Gamma \setminus E$ найдется радиус $r = r(t)$ такой, что в $D^+_r(t)$ производная $\frac{\partial u}{\partial\overline{\zeta}}$ интегрируема в степени, большей двух. Записывая интегральный член формулы (4) как сумму интегралов по $D^+_r(t)$ и по $D^+ \setminus D^+_r(t)$, убеждаемся, что (см. [16]) интегральное слагаемое (4) непрерывно в точке t. Полученное утверждение завершает доказательство.

Приведем одно простое следствие из этой теоремы. Gредположим, что на кривой Γ зафиксировано несколько (конечное число) точек, составляющих множество E. Нассмотрим задачу об отыскании голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции Φ по краевому условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma \setminus E, \tag{5}$$

условию $\Phi(\infty) = 0$, и ограничению $\Phi \in L_p(N), p > 2$, в любой окркестности N исключительного множества E (здесь имеются в виду окрестности в топологии комплексной плоскости). Такую постановку задачи о скачке называют полунепрерывной.

Следствие 1 *Если $\nu > 1 - \mathfrak{m}^+(t)$ в любой точке кривой Γ и $\nu > 1 - \dfrac{\mathfrak{m}^+(t)}{2}$ при $t \in \Gamma \setminus E$, то задача о скачке в полунепрерывной постановке разрешима.*

Доказательство основано на том, что при условиях следствия искомым решением является функция (4).

Тем самым мы перенесли основной результат [1] на случай полунепрерывной постановки задачи.

Аналогичные результаты можно получить с использованием внешних локальных показателей Марцинкевича.

Единственность решений можно исследовать в терминах размерности Хаусдорфа (см. [1]).

Список литературы

[1] Кац Д.Б., Показатели Марцинкевича и их приложения в краевых задачах. //Известия ВУЗов. Математика, 2014, №3, - С. 68-71.

[2] Гахов Ф.Д., Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.

[3] Н.И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1962.

[4] Кац Б.А., Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой. //Доклады АН СССР, 1982, Т.267, №4, - С. 789—792.

[5] Кац Б.А., Задача Римана на замкнутой жордановой кривой.// Известия ВУЗов. Математика., 1983, №4, - С. 68-80.

[6] Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М., $\varepsilon-$энтропия и емкость множеств в функциональных пространствах. // Успехи Мат. Наук, 1959, Т.14, - С. 3-86.

[7] Федер Е., Фракталы, Москва, Мир, 1991.

[8] Claude Tricot, Curves and Fractal Dimension. Springer: 1995, - 323 p.

[9] K.J. Falconer, Fractal geometry, Wiley & Sons: 2014, 3nd edition

[10] Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Kats B.A. Integration over non-rectifiable curves and Riemann boundary value problems. //Journal of Mathematical Analysis and Applications, V. 380, Issue 1, 2011, - P. 177-187

[11] Кац Б.А. Метрические характеристики неспрямляемых дуг и задача о скачке. //Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки, 2008, Т.150, кн.1, - С. 56-64

[12] Kats B.A. The Refined Metric Dimension with Applications. //Computation Methods and Function Theory, 2007, No.1, - P.77–89.

[13] B. A. Kats. The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions. //Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal, 2014, Volume 59, Issue 8, P. 1053-1069 DOI: 10.1080/17476933.2013.809574

[14] R. Abreu-Blaya, J. Bory-Reyes, B. A. Kats. The Cauchy Type Integral and Singular Integral Operator over closed Jordan curves. Monatshefte fur Mathematik DOI 10.1007/s00605-014-0656-9 (electronic publication) © Springer-Verlag Wien 2014

[15] Стейн И., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойств функций. -М.: Мир, 1973, - 342 с.

[16] Векуа И.Н., Обобщенные аналитические фукции. - М.: Наука, 1988, - 512 с.