Дорогие студенты, вы зашли в так называемую “Виртуальную аудиторию,” в которой к каждому вторнику и каждой пятнице я буду заносить материал новых занятий (необходимые определения и формулы, примеры решения задач и номера примеров для выполнения домашних заданий). Эти задания вы, как обычно, выполняете в ваших тетрадях, потом фотографируете их и высылает фотографии по адресу

volodinstudent@gmail.com

Естественно, вам придется, оформлять результаты решений в более пристойней форме (указывать номер задания, обводить или подчеркивать номера задач, писать формулы и текст разборчиво). Особенно следует оставлять большие пространства сверху и снизу фотографируемого листа. В этих же посланиях вы можете задавать мне вопросы, на которые я буду отвечать вам reply’ем.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Занятие 52

Функции нескольких переменных

Функция $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ определяется на некотором подмножестве D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и принимает числовые значения, то есть $z \in \mathbb{R}$. Таким образом, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Мы будем часто обозначать точку $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ латинской буквой p и писать $f(p),\ p \in \mathbb{R}^n$.

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ расстояние между двумя точками p' и p'' измеряется “по прямой”, то есть евклидова метрика определяется как

$$\rho(p',\ p'') = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x'_i - x''_i)^2}\,.$$

На этом занятии мы будем рассматривать, в основном, только функции двух переменных $z = f(x, y)$. В этом случае значения z функции $f(x, y)$, когда точка $p = (x, y)$ “пробегает” множество D (область определения функции), можно изобразить в виде поверхности в трехмерном пространстве. Такие поверхности географы обычно изображают на карте в виде линий равных высот – “линий уровня” C. Таким образом, каждому уровню $C \in \mathbb{R}$ соответствует некоторая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$. Например, линии уровня параболоида $z = x^2 + y^2$ имеют вид концентрических окружностей $\{x^2 + y^2 = C,\ C \in \mathbb{R}\}$ с центром в начале координат.

Изучения функций нескольких переменных начнем с понятий пределе функции и ее непрерывности.

Предел функции. *Число* A *называется* **двойным пределом** *функции* f *в точке* $p_0 = (x_0, y_0)$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon, p_0) > 0$, *зависящее от* ε *и точки* p_0, *что для любой точки* $p = (x, y)$, *принадлежащей* δ*-окрестности* $\{p : \ \rho(p, p_0) < \delta\}$ *точки* p_0 *модульная разность* $|f(p) - A| < \varepsilon$.

Двойной предел будем обозначать как

$$A = \lim_{p \to p_0} f(p) \qquad \text{или} \qquad A = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y).$$

Вместе с двойным пределом будут рассматриваться также повторные пределы

$$A = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) \qquad \text{или} \qquad A = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

То, что двойной предел не существует определим не с помощью $(\varepsilon,\ \delta)$, а в виде практической рекомендации по доказательству отсутствия предела.

Предел при $p \to p_0$ *для функции* $f(p)$, $p \in D$, *не существует, если можно выбрать два пути к точке* p_0, *приводящие к различным значениям* f.

Пример 1. *Исследовать наличие предела у функции*

$$f(x,\ y) = \frac{\sin x}{x + y}, \tag{1}$$

когда $(x, y) \to (0, 0)$.

Решение. Покажем, что существуют два различных повторных пределов, приводящих к различным предельным значениям этой функции. Если сначала фиксировать некоторое значение $y \neq 0$, а потом x устремлять к нулю, то независимо от последующего взятия предела $y \to 0$ получим в пределе 0, то есть повторный предел

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x + y} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x + y} = 0.$$

Если же сначала фиксировать некоторое значение $x \neq 0$ и устремлять к нулю, а потом брать простой предел при $x \to 0$, то по этому пути в пределе получим 1:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{\sin x}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ответ: Предела "в нуле" у функции (1) не существует.

Если вспомнить об аналогичной ситуации для функций одной переменной, то несуществование предела говорит об отсутствии в этой точке свойства непрерывности функции – там может быть разрыв функции, или эта точка не принадлежит области определения функции. Следуя этому замечанию введем следующее естественное определение непрерывности функции в точке.

Непрерывность функции. *Функция* $f(p)$ *называется* **непрерывной в точке** p_0, *если существует двойной предел* $\lim_{p\to p_0} f(p) = f(p_0)$.

В ряде случаев доказательству отсутствия непрерывности функции в некоторой точке помогает следующее необходимое условие существование двойного предела.

Предложение 1. *Если существует двойной предел*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).$$

в точке $p_0 = (x_0, y_0)$ *и при любом значении* y *существует простой предел*

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

то существуют повторные пределы

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y), \tag{2}$$

которые равны двойному.

По существу, мы использовали это предложение в Примере 1, опровергая равенство (2).

К сожалению, доказательство непрерывности функции в некоторой точке p_0 почти всегда требует проверки условий существования двойного предела в соответствии с его определением (см. выше определение **Предел**

функции. Дело в том, что мы не знаем другого способа доказательства независимости значения предела от выбора пути стремления к точке p_0. Поясним это, рассмотрев решение следующего примера.

Пример 2. *Доказать непрерывность функции*

$$f(x,\, y) = \frac{\sin xy}{x},$$

в точке $p_0 = (0, a)$ *при любом* $a \neq 0$.

Решение. Вроде, чего тут доказывать?

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(t,y)\to(0,a)} \frac{\sin t}{t} \cdot y, \tag{3}$$

и в правой части этого равенства один сомножитель стремится к единице, а другой просто равен a, и поэтому предел равен a. Но, тем самым, мы вычислили повторный, а не двойной предел. Придется доказать, что в ε-окрестности точки $(0, a)$ модульная разность

$$\left| \frac{\sin xy}{x} - a \right| < \varepsilon.$$

Доказывается это достаточно просто, с помощью известного нам приема добавления в модульную разность предельной точки 1 для $(\sin t)/t$ и точки a для y (см. (3)). Имеем:

$$\left| \frac{\sin t}{t} \cdot y - a \right| = \left| \left(\frac{\sin t}{t} - 1 \right) \cdot y + (y-a) \right| \leq \left| \left(\frac{\sin t}{t} - 1 \right) \right| \cdot y + |\, y-a \,|. \tag{4}$$

В любой ε-окрестности точки $(0, a)$ оба слагаемых в правой части (4) можно сделать меньше $\varepsilon/2$, и это доказывает, что двойной предел действительно существует и равен a.

Задание 52

Решение следующих задач, взятых из задачника Демидовича, высылаются по электронной почте volodinstudent@gmail.com в виде фотографий с большими полями вверху и внизу. Некоторые из этих задач могут показаться достаточно сложными, особенно та, что отмечена звездочкой, но, зато, их решение оцениваются более высоким баллом.

3137. *Определить и изобразить графически область существования функции*

$$z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}.$$

3158. *Нарисовать на плоскости $X0Y$ линии уровня поверхности*

$$z = |x| + y.$$

3183.1. *Существует ли двойной предел*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}\,?$$

3202. *Показать, что функция*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0\ . \end{cases}$$

непрерывна в нуле по каждой переменной x и y в отдельности, но не является непрерывной по совокупности переменных. (Воспользоваться решением предыдущей задачи.)

3183.1*. *Показать, что для функции*

$$f(x, y) = (x + y)\,\sin\frac{1}{x}\,\sin\frac{1}{y}$$

оба повторных предела не существуют, но, те не менее, существует двойной предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

3184(д)*. *Найти*

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0}\log_x(x + y) \qquad \text{и} \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1}\log_x(x + y).$$