Известия вузов. Математика
2016, № 5, с. 70–74

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

А.М. БИКЧЕНТАЕВ

ОБ ОПЕРАТОРНО МОНОТОННЫХ И ОПЕРАТОРНО ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ

Аннотация. Для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ установлены критерии монотонности и выпуклости относительно произвольной C^*-алгебры. Получена оценка меры некомпактности разности произведений элементов W^*-алгебры. Установлен критерий перестановочности τ-измеримого положительного оператора с положительным оператором из алгебры фон Неймана.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, C^*-алгебра, W^*-алгебра, операторно монотонная функция, операторно выпуклая функция, мера некомпактности, след, измеримый оператор, перестановочность операторов.

УДК: 517.983 : 517.986

Введение. Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра, $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$, $B \in \mathcal{A}^+$ и $-B \le A \le B$. Тогда существуют такие $X \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $Y \in \mathcal{A}^+$, что $A = XY + YX$, $B = X^2 + Y^2$. Для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ установлены критерии монотонности и выпуклости относительно C^*-алгебры $\mathcal{A}$. Получена оценка меры некомпактности разности произведений элементов W^*-алгебры.

Известно [1], что C^*-алгебра $\mathcal{A}$ абелева, если из условия $0 \le A \le B$, $A, B \in \mathcal{A}$, следует $A^2 \le B^2$. Другими словами, $\mathcal{A}$ абелева, если $0 \le AB + BA$ для всех $A, B \in \mathcal{A}^+$. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, A — положительный τ-измеримый оператор и $B \in \mathcal{M}^+$. Имеем $AB = BA$ тогда и только тогда, когда $0 \le AB^n + B^nA$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $A^2 \le (A + tB^n)^2$ для всех $t > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то $AB = BA$.

Определения и обозначения. C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$, $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $\mathcal{A}^+$ обозначим ее подмножества проекторов, эрмитовых элементов и положительных элементов соответственно. Пусть $\mathcal{A}^1 = \{X \in \mathcal{A} : \|X\| \le 1\}$. Конус $\mathcal{A}^+$ задает на $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ отношение порядка. Функциональное исчисление для элементов $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ позволяет с вещественной непрерывной функцией ассоциировать отображение из некоторого подмножества $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ в $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$.

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — C^*-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, I – тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Коммутантом множества $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется множество $\mathcal{X}' = \{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XY = YX\ (X \in \mathcal{X})\}$. $*$-Подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. W^*-алгеброй называется C^*-алгебра $\mathcal{A}$, имеющая преддвойственное

Поступила 13.11.2015

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Республики Татарстан (проект № 15-41-02433).