§5. ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Будем говорить, что система векторов

$$\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$$

линейно независима, если из равенства

$$\mathcal{A}_m x = 0$$

вытекает, что $x = 0$.

.

Линейно независимые системы векторов существуют. Приведем простые примеры.

.

1) Любой вектор $a \neq 0$ образует линейно независимую систему, состоящую из одного вектора:

$$xa = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{C} \ni x = 0.$$

.

2) Единичные векторы

$$i^1,\ i^2,\ \ldots,\ i^m \in \mathbb{C}^n, \quad m \leqslant n,$$

линейно независимы.

.

Это утверждение сразу же вытекает из того, что для любого вектора $x \in \mathbb{C}^m$ вектор

$$x_1 i^1 + x_2 i^2 + \cdots + x_m i^m \in \mathbb{C}^n$$

имеет вид

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

и, следовательно, равен нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$.

.

3) Система векторов

$$\{1,\ z,\ z^2,\ \ldots,\ z^k\},$$

где z — комплексная переменная, $k \geqslant 0$ — целое число, линейно независима в пространстве полиномов.

.

Для доказательства этого утверждения достаточно вспомнить, что если полином равен нулю,

$$x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \cdots + x_k z^k = 0,$$

то все его коэффициенты — нули:

$$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0.$$

.

Теорема. Любая подсистема линейной независимой системы векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно независима.

Доказательство. Предположим противное. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что векторы

$$a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^p, \quad p < m,$$

линейно зависимы. Тогда существуют числа

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p,$$

не все одновременно равные нулю, и такие, что

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_p a^p = 0,$$

следовательно,

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_p a^p + 0 a_{p+1} + \cdots + 0 a_m = 0,$$

т. е. вопреки сделанному предположению система $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно зависима. $\square$

.

<u>Теорема.</u> Любая система

$$a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^n,\ b \in \mathbb{C}^n$$

из $n+1$ вектора линейно зависима.

.

Доказательство. Пусть система векторов $\{a^i\}_{i=1}^n$ линейно зависима. Тогда доказываемое утверждение верно. Если векторы $\{a^i\}_{i=1}^n$ линейно независимы, то система уравнений

$$Ax = b,$$

где A — матрица, столбцами которой являются компоненты векторов a^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, крамеровская, и потому имеет решение x при любой правой части b, значит,

$$x_1 a^1 + \cdots + x_n a^n = b,$$

т. е. система векторов a^1, a^2, $\ldots$, a^n, b линейно зависима. $\square$

.

Как очевидное следствие только что доказанного утверждения получаем, что любая система векторов

$$\{a^i\}_{i=1}^m \in \mathbb{C}^n, \quad m > n,$$

линейно зависима.

.

<u>Теорема.</u> **Пусть система векторов**

$$\mathcal{A}_m = \{a^i\}_{i=1}^m$$

пространства $\mathbf{X}$ линейно независима и линейно выражается через систему

$$\mathcal{B}_p = \{b^i\}_{i=1}^p.$$

Тогда $m \leqslant p$.

.

Предположим противное, т. е. пусть $m > p$. По определению существует матрица X размера $p \times m$ такая, что

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p X.$$

Как следствие для любого вектора $y \in \mathbb{C}^m$ имеем

$$\mathcal{A}_m y = \mathcal{B}_p X y.$$

Столбцы матрицы X — векторы из пространства $\mathbb{C}^p$. Их количество $m > p$, следовательно, они линейно зависимы.

.

Поэтому существует вектор $y \in \mathbb{C}^m$, не равный нулю и такой, что

$$Xy = 0,$$

но тогда и

$$\mathcal{A}_m y = \mathcal{B}_p X y = 0,$$

т. е. вопреки предположению векторы

$$a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^m$$

линейно зависимы. $\square$

.

<u>Следствие.</u> Любые две эквивалентные линейно независимые системы векторов имеют равные количества векторов.