



## Почти проективные и почти инъективные модули

А. Н. Абызов

Выяснено строение колец, над которыми каждый правый модуль является почти инъективным. Описаны регулярные и  $I$ -конечные кольца, над которыми каждый правый модуль является почти проективным.

Библиография: 21 название.

**Ключевые слова:** полуартиново кольцо,  $V$ -кольцо, почти проективный модуль, почти инъективный модуль.

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11363>

**1. Введение.** Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули унитарными. Слова типа полуартиново кольцо означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева.

Пусть  $M, N$  – правые  $R$ -модули. Модуль  $M$  называется *почти  $N$ -инъективным*, если для каждого подмодуля  $N'$  модуля  $N$  и каждого гомоморфизма  $f: N' \rightarrow M$  либо существует такой гомоморфизм  $g: N \rightarrow M$ , что  $f = g\iota$ , либо существуют ненулевой идемпотент  $\pi \in \text{End}_R(N)$  и гомоморфизм  $h: M \rightarrow \pi(N)$ , для которых выполнено равенство  $hf = \pi\iota$ , где  $\iota: N' \rightarrow N$  – естественное вложение. Модуль  $M$  называется *почти инъективным*, если он почти инъективен относительно каждого правого  $R$ -модуля. Двойственно определяется понятие почти проективного модуля. Модуль  $M$  называется *почти  $N$ -проективным*, если для каждого естественного гомоморфизма  $g: N \rightarrow N/K$  и каждого гомоморфизма  $f: M \rightarrow N/K$  либо существует такой гомоморфизм  $h: M \rightarrow N$ , что  $f = gh$ , либо существуют ненулевое прямое слагаемое  $N'$  модуля  $N$  и гомоморфизм  $h': N' \rightarrow M$ , для которых выполнено равенство  $g\iota = fh'$ , где  $\iota: N' \rightarrow N$  – естественное вложение. Модуль  $M$  назовем *почти проективным*, если он почти проективен относительно каждого правого  $R$ -модуля.

Понятия почти инъективного модуля и почти проективного модуля впервые были изучены в работах [1]–[7] Харады, его коллег и учеников. Отметим, что в работе [7] почти проективный правый  $R$ -модуль определялся как модуль, который почти проективен относительно каждого конечно порожденного правого  $R$ -модуля. В последнее время почти инъективные модули были рассмотрены в работах [8]–[12]. В работе [10] была поставлена проблема об описании колец, над которыми каждый модуль является почти инъективным. В некоторых частных случаях эта проблема была решена в работе [10], в частности, в случае полусовершенных колец. В настоящей статье выяснено строение колец, над которыми каждый модуль является почти инъективным, в общем случае. Также получены характеристики модулей  $M$ , у которых