УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2024, Т. 166, кн. 2
С. 173–186

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.63

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.173-186

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МОНОТОННОГО ТИПА С МЛАДШИМ СЛАГАЕМЫМ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ПРАВОЙ ЧАСТИ

О.А. Задворнов, Г.О. Трифонова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Доказано существование решения смешанной краевой задачи для квазилинейного уравнения с младшим слагаемым и точечными источниками в правой части. Решение получено в аддитивной форме с выделением в явном виде слагаемого с особенностью, порожденной сингулярностью правой части. Подход, примененный при доказательстве основного результата, можно использовать как схему для численного метода решения рассмотренной задачи.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, точечный источник, аддитивное выделение

Введение

Рассмотрена смешанная краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка при наличии локальной нагрузки (суммы точечных источников в правой части). Левая часть нелинейного уравнения состоит из суммы дивергентного и младшего слагаемых. Подобные задачи возникают в теории фильтрации (например, [1]) при моделировании стационарных процессов, когда нелинейность задачи связана с нелинейностью определяющего соотношения, задающего поток по градиенту давления (искомая функция в задаче – давление). Уравнения с нелинейной зависимостью от градиента решения коэффициентов в их дивергентной части появляются при моделировании в задачах магнитостатики (см., например, [2]). Рассмотрен случай, когда зависимость от градиента решения имеет линейный рост по градиенту на бесконечности, моделируемая среда изотропная и неоднородная (в нелинейный закон может входить и зависимость от пространственной переменной).

В первом разделе статьи сформулированы условия, в рамках которых исследована рассматриваемая краевая задача. Из них условие II является нестандартным, но пример, приведенный в заключительной части статьи, подтверждает естественность такого условия. Сформулирована вариационная задача для нахождения обобщенного решения (выбрано пространство, способное содержать решение с особенностью, порождаемой сингулярной правой частью).

Второй раздел содержит исследование линейной краевой задачи с переменными коэффициентами и точечными источниками. С одной стороны, такая задача –

частный вариант нелинейной задачи (тем не менее представляющий интерес и сам по себе). С другой стороны, эта задача важна в исследовании общего случая. Введены дополнительные ограничения на коэффициент дивергентной части уравнения в окрестности точек сосредоточения источников (принадлежность коэффициента весовому пространству – условия III), и в рамках этих условий (на базе известной теории [3]) доказано существование единственного решения линейной задачи. В этом решении аддитивно и в явном виде (как линейная комбинация фундаментальных решений для оператора Лапласа [4]) выделена особенность, порождаемая точечными источниками.

В третьем разделе исходная нелинейная задача преобразована, с опорой на уже рассмотренную линейную задачу, во вспомогательную нелинейную, но без сингулярностей. Установлены свойства преобразованной задачи.

В четвертом разделе сформулирован и доказан средствами теории монотонных операторов [5–7] основной результат – о существовании решения и форме его представления. Далее рассмотрен пример из теории нелинейной фильтрации (закон с предельным градиентом). В заключении обсуждена возможность применения изложенного доказательства существования решения как схемы для поиска численного решения нелинейной задачи с точечными источниками.

Постановки задач и методы их исследования, представленные в настоящей работе, близки к использованным в работах [8–10], посвященных нелинейной задаче, но без младшего слагаемого.

1. Формулировка вариационной задачи

Рассмотрим смешанную краевую задачу для нелинейного уравнения монотонного типа при наличии нескольких точечных источников известной интенсивности $q^{(i)}$, $i = 1, \dots k$, сосредоточенных в узлах $x^{(i)}$, внутренних для области решения $\Omega \subset R^n$. Границу $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\operatorname{mes} \Gamma_1 \neq 0$ области Ω считаем Липшиц-непрерывной (значит, Ω – ограниченное множество). Краевая задача имеет вид

$$- \operatorname{div} G(x, \nabla w(x)) + g_0(x, w(x)) = \sum_{i=1}^{k} q^{(i)}\, \delta(x - x^{(i)}), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$w(x) = w_{\gamma_1}(x), \quad x \in \Gamma_1\,, \tag{2}$$

$$(G(x, \nabla w(x)), \nu(x)) + \sigma(x) w(x) = w_{\gamma_2}(x), \quad x \in \Gamma_2\,. \tag{3}$$

Здесь функция $w_{\gamma_1} : \Gamma_1 \to R^1$ является следом функции из пространства Соболева $W_2^{(1)}(\Omega)$, функция $\nu : \Gamma_2 \to R^1$ – внешняя нормаль, $w_{\gamma_2} \in L_2(\Gamma_2)$, функция $\sigma : \Gamma_2 \to R^1$ почти всюду неотрицательна и ограничена:

$$0 \leq \sigma(x) \leq \overline{\sigma}. \tag{4}$$

Предположим, что функция $G \equiv G(x, \lambda) : \Omega \times R^n \to R^n$ измерима по $x \in \Omega$ для каждого $\lambda \in R^n$ и непрерывна по λ для почти всех $x \in \Omega$ (условия Каратеодори [5, с. 196]). Считаем также, что выполнены следующие условия (здесь и далее $(\cdot, \cdot)$ и $|\cdot|$ – скалярное произведение и норма в пространстве R^n).

I. Монотонность по λ:

$$(G(x, \lambda) - G(x, \mu)\,, \lambda - \mu\,) \geq 0 \qquad \forall\, \lambda, \mu \in R^n, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{5}$$

II. Существование измеримой функции $a \equiv a(x) : \Omega \to R^1$, почти всюду отделенной от нуля и ограниченной

$$0 < a_{min} \leq a(x) \leq a_{max}, \tag{6}$$

а также функции $b \equiv b(x) : \Omega \to R^1$ из пространства $L_2(\Omega)$, с которыми выполнено неравенство (моделируемая среда изотропная и неоднородная):

$$|G(x,\lambda) - a(x)\lambda| \le b(x) \qquad \forall\, \lambda \in R^n, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{7}$$

Предположим также измеримость по $x\in\Omega$ функции $g_0 \equiv g_0(x,s) : \Omega\times R^1 \to R^1$, ее непрерывность по s и существование неотрицательной и ограниченной функции $a_0 : \Omega \to R^1$:

$$0 \le a_0(x) \le a_{max} \tag{8}$$

и функции b_0 из пространства $L_2(\Omega)$, с которыми выполнено неравенство

$$|g_0(x,s) - a_0(x)s| \le b_0(x) \qquad \forall\, s \in R^1, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{9}$$

Условие II обеспечивает линейный рост $G(x,\lambda)$ по λ на бесконечности:

$$|G(x,\lambda)| \le |G(x,\lambda) - a(x)\lambda| + a(x)|\lambda| \le b(x) + a_{max}|\lambda| \tag{10}$$

и коэрцитивность функции $G(x,\lambda)$:

$$(G(x,\lambda),\lambda) \ge -|G(x,\lambda) - a(x)\lambda||\lambda| + a(x)|\lambda|^2 \ge -b(x)|\lambda| + a_{min}|\lambda|^2. \tag{11}$$

Условия I и II, вместе взятые, позволяют установить монотонность, деминепрерывность и коэрцитивность оператора, порождаемого дивергентной частью уравнения (1).

В качестве характерного примера рассмотрим краевую задачу (2), (3) для уравнения (1) без точечных источников и с линейным младшим слагаемым $g_0(x,s) \equiv c_0 s - f(x)$ ($c_0 > 0$ и $f \in L_2(\Omega)$ – некоторые постоянная и функция. Тогда в условии (9) $a_0(x) \equiv c_0$ и $b_0(x) \equiv |f(x)|$):

$$-\operatorname{div} G(x,\nabla w(x)) + c_0 w(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Из теории монотонных операторов [7] и условий (5), (10) и (11) следует существование обобщенного решения этой краевой задачи из пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ (его выбор является естественным при линейном росте (10)).

Присутствие в правой части уравнения (1) точечных источников не позволяет непосредственно воспользоваться результатами теории монотонных операторов, поскольку такая правая часть определяет линейный функционал, не принадлежащий пространству, сопряженному к $W_2^{(1)}(\Omega)$. Но для задачи с оператором Лапласа (частный случай (1) при $G(x,\lambda) \equiv \lambda$, $g_0(x,v) \equiv 0$) и точечным источником

$$-\Delta w^*(x) = q^*\,\delta(x - x^*) \tag{12}$$

решение известно (см., например, [4]) и имеет вид

$$w^*(x) = q^*\,\phi_n(x - x^*) \,:\, \int\limits_\Omega (\nabla w^*(x), \nabla\eta(x))\,dx = q^*\,\eta(x - x^*) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(R^n). \tag{13}$$

Здесь функция ϕ_n – фундаментальное решение оператора Лапласа

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2\pi}\ln(|x|), \quad \phi_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, \quad n \ge 3, \tag{14}$$

где $\sigma_n = \operatorname{mes} S$ – площадь единичной сферы $S = \{x \in R^n : |x| = 1\}$.

Очевидно, что фундаментальное решение ϕ_n принадлежит пространству $W_1^{(1)}(\Omega)$. Для поиска решения исходной задачи на данном этапе ограничимся этим пространством и сформулируем вариационную постановку задачи (1)–(3) следующим образом: найти функцию $w \in W_1^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющую краевому условию (2) и вариационному равенству (здесь $C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2)$ – пространство функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, равных нулю в окрестности множества Γ_1)

$$\int\limits_\Omega (G(x, \nabla w(x)), \nabla \eta(x)) + g_0(x, w(x))\eta(x)dx + \int\limits_{\Gamma_2} \sigma(x)w(x)\eta(x)dx = \tag{15}$$

$$= \int\limits_{\Gamma_2} w_{\gamma_2}(x)\eta(x)dx + \sum_{i=1}^k q_i\, \eta(x - x^{(i)}) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2).$$

Для исследования общего случая потребуется рассмотреть частный случай – линейную краевую задачу, которая представляет интерес и сама по себе.

2. Линейная краевая задача с точечными источниками

Рассмотрим задачу поиска функции $\widetilde{w} \in W_1^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющей уравнению и граничным условиям:

$$- \operatorname{div}(a(x)\nabla \widetilde{w}(x)) = \sum_{i=1}^k q^{(i)}\, \delta(x - x^{(i)}), \quad x \in \Omega, \tag{16}$$

$$\widetilde{w}(x) = w_{\gamma_1}(x), \quad x \in \Gamma_1, \tag{17}$$

$$(a(x)\nabla \widetilde{w}(x), \nu(x)) + \sigma(x)\widetilde{w}(x) = w_{\gamma_2}(x), \quad x \in \Gamma_2. \tag{18}$$

Считаем, что все функции и множества удовлетворяют условиям, введенным в предыдущем разделе статьи. Таким образом, линейная краевая задача – частный случай задачи (1)–(3), если выбрать $G(x, \lambda) \equiv a(x)\lambda$ и $g_0(x, v) \equiv 0$. Необходимо найти функцию $\widetilde{w} \in W_1^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющую краевому условию (17) и вариационному равенству

$$\int\limits_\Omega (a(x)\nabla \widetilde{w}(x), \nabla \eta(x))\, dx + \int\limits_{\Gamma_2} \sigma(x)\widetilde{w}(x)\eta(x)dx = \tag{19}$$

$$= \int\limits_{\Gamma_2} w_{\gamma_2}(x)\eta(x)dx + \sum_{i=1}^k q_i\, \eta(x - x^{(i)}) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2).$$

Предположим дополнительно к введенным условиям, что функция a принадлежит некоторому весовому пространству в точках сосредоточения источников, а именно, выполнено следующее условие:

III. Существуют такие числа $a^{(i)}$, $i = 1, \dots k$, что имеют место включения

$$\alpha_i \in L_2(\Omega) : \alpha_i(x) \equiv |x - x^{(i)}|^{1-n}(a(x) - a^{(i)}). \tag{20}$$

Из неравенства (6) следует, что $a^{(i)} \geq a_{min} > 0$, иначе выполнена оценка

$$|\alpha_i(x)| = |x - x^{(i)}|^{1-n}(a(x) - a^{(i)}) \geq |x - x^{(i)}|^{1-n}(a_{min} - a^{(i)}) \quad \forall\, x \in \Omega,$$

и понятно, что функция α_i не попадает в пространство $L_2(\Omega)$.

Далее понадобится функция (очевидно, из пространства $W_1^{(1)}(\Omega)$):

$$\Phi(x) \equiv \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) \ : \varphi_i(x) \equiv \frac{q^{(i)}}{a^{(i)}}\, \phi_n(x - x^{(i)}). \tag{21}$$

Непосредственно из определения вытекает неравенство

$$|\nabla\varphi_i(x)| = \left| \frac{q^{(i)}(x - x^{(i)})}{a^{(i)}\sigma_n |x - x^{(i)}|^n} \right| \le C|x - x^{(i)}|^{1-n} \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{22}$$

Из свойств фундаментального решения (14) и введенного условия на расположение точек сосредоточения источников $x^{(i)}$ (они – внутренние для области решения Ω) следует гладкость функции Φ на границе Γ.

Решение задачи (16)–(18) будем искать в виде $\widetilde{w} = u + \Phi$. Подставим это представление в (19) и переформулируем задачу относительно функции u. Правую часть, соответствующую точечным источникам, эквивалентно заменим, использовав фундаментальное решение оператора Лапласа (12)–(14):

$$\int\limits_{\Omega} (a(x)\nabla u(x), \nabla\eta(x))\, dx + \int\limits_{\Gamma_2} \sigma(x)u(x)\eta(x)dx = \int\limits_{\Gamma_2} (w_{\gamma_2}(x) - \sigma(x)\Phi(x))\eta(x)dx + \tag{23}$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \left(\nabla \left[\sum_{i=1}^{k} q_i\, \phi_n(x - x^{(i)}) \right], \nabla\eta(x) \right) dx - \int\limits_{\Omega} (a(x)\nabla\Phi(x), \nabla\eta(x))\, dx.$$

По сравнению с (19) изменились краевые условия и правая часть. Чтобы выполнялось условие (17), функция u должна удовлетворять условию Дирихле

$$u(x) = \widetilde{w}_{\gamma_1}(x)(\equiv w_{\gamma_1}(x) - \Phi(x)), \quad x \in \Gamma_1, \tag{24}$$

где в силу гладкости функции Φ на границе Γ и свойства w_{γ_1} правая часть $\widetilde{w}_{\gamma_1}$ является следом функции из пространства Соболева $W_2^{(1)}(\Omega)$. Из гладкости функции Φ на Γ и условия (4) получим, что функция $\widetilde{w}_{\gamma_2} \equiv w_{\gamma_2} - \sigma\Phi$ принадлежит пространству $L_2(\Gamma_2)$.

С учетом (21) рассмотрим более подробно образовавшуюся дивергентную правую часть:

$$F(x) \equiv \nabla \left[\sum_{i=1}^{k} q_i\, \phi_n(x - x^{(i)}) \right] - a(x)\nabla\Phi(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a^{(i)}\nabla \left[\frac{q^{(i)}}{a^{(i)}}\, \phi_n(x - x^{(i)}) \right] - \sum_{i=1}^{k} a(x)\nabla\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{k} (a^{(i)} - a(x))\nabla\varphi_i(x).$$

Из неравенства (22) и условия (20) следует, что вектор-функции $F : \Omega \to R^n$ принадлежит пространству $[L_2(\Omega)]^n$:

$$|F(x)| \le C \sum_{i=1}^{k} |a^{(i)} - a(x)|\, |x - x^{(i)}|^{1-n} = C \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i(x)|, \quad x \in \Omega.$$

Таким образом, вариационная задача (23), (24) соответствует краевой задаче для функции u с дивергентной правой частью F из $[L_2(\Omega)]^n$:

$$-\operatorname{div}(a(x)\nabla u(x)) = -\nabla F(x), \quad x \in \Omega, \tag{25}$$

$$u(x) = \widetilde{w}_{\gamma_1}(x), \quad x \in \Gamma_1\,, \tag{26}$$

$$(a(x)\nabla u(x), \nu(x)) + \sigma(x)u(x) = \widetilde{w}_{\gamma_2}(x), \quad x \in \Gamma_2\,. \tag{27}$$

Теперь, опираясь на известные результаты о линейных краевых задачах (см., например, [3, § 5, с. 191; § 6, с. 200]), можно утверждать, что задача (23), (24) имеет единственное решение u из пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ (более того, $u \in W_1^{(1)}(\Omega)$). Следовательно, имеет место

Лемма 1. *Пусть выполнены* (6), (20) (*условия* II *и* III), *тогда задача* (16)–(18), *понимаемая как вариационная задача* (19), (17), *имеет единственное решение* $\widetilde{w} \in W_1^{(1)}(\Omega)$, *которое может быть представлено в виде суммы* $\widetilde{w} = u + \Phi$, *где функция* u *удовлетворяет* (25)–(27), *а* Φ *определена равенством* (21).

Далее рассмотрим общий случай.

3. Нелинейная краевая задача с точечными источниками

Рассмотрим нелинейную вариационную задачу (2), (15). Предположим выполненными условия (4)–(9) и (20) (условие III). По данным исходной нелинейной краевой задачи сформулируем линейную задачу (17), (19). Для решения $\widetilde{w}$ линейной задачи выше доказано (лемма 1) аддитивное представление $\widetilde{w} = u + \Phi$, в котором $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ – решение (23), (24), а функция $\Phi \in W_1^{(1)}(\Omega)$ определена в (21).

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде суммы $w = v + \widetilde{w}(= v + u + \Phi)$. Подставим это представление в (15) и сформулируем задачу для функции v. Учтем при этом выполненные для $\widetilde{w}$ равенства (17) и (19). Получим, что для v должны выполняться однородное условие Дирихле

$$v(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1\,, \tag{28}$$

и вариационное равенство

$$\int\limits_{\Omega} (G(x, \nabla(v(x) + \widetilde{w}(x))) - a(x)\nabla\widetilde{w}(x), \nabla\eta(x))\, dx + \tag{29}$$

$$+ \int\limits_{\Omega} g_0(x, v(x) + \widetilde{w}(x))\eta(x) dx + \int\limits_{\Gamma_2} \sigma(x)v(x)\eta(x) dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^{\infty}(\Omega \cup \Gamma_2).$$

Задачу (28), (29) исследуем методами теории монотонных и псевдомонотонных операторов (см. [5]– [7]).

Введем гильбертово пространство $V = \{v \in W_2^{(1)}(\Omega) : v(x) = 0,\ x \in \Gamma_1\}$ со скалярным произведением и нормой

$$(v, \eta)_V = \int\limits_{\Omega} (\nabla v, \nabla\eta)\ dx\,, \quad \|v\|_V^2 = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\, dx \quad \forall v, \eta \in V. \tag{30}$$

Для первого из интегралов, входящих в равенство (29), использовав предположения (7), (6) (условие II), получим оценку

$$\left| \int\limits_{\Omega} (G(x, \nabla(v + \widetilde{w})) - a(x)\nabla\widetilde{w}, \nabla\eta)\, dx \right| = \tag{31}$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} (G(x, \nabla(v+\widetilde{w})) - a(x)\nabla(v+\widetilde{w}), \nabla\eta)\, dx + \int\limits_{\Omega} (a(x)\nabla v, \nabla\eta)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega} |G(x, \nabla(v+\widetilde{w})) - a(x)\nabla(v+\widetilde{w})|\, |\nabla\eta|\, dx + \int\limits_{\Omega} a(x)\, |\nabla v|\, |\nabla\eta|\, dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega} b(x)\, |\nabla\eta|\, dx + a_{max} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|\, |\nabla\eta|\, dx \leq \left(\|b\|_{L_2(\Omega)} + a_{max}\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}\right) \|\nabla\eta\|_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \left(\|b\|_{L_2(\Omega)} + a_{max}\|v\|_V\right) \|\eta\|_V \quad \forall v, \eta \in V.$$

В силу (31) можем определить нелинейный и ограниченный оператор $B : V \to V$ следующим правилом:

$$(Bv, \eta)_V \equiv \int\limits_{\Omega} \left(\widetilde{G}(x, \nabla v), \nabla\eta\right) dx \quad \forall v, \eta \in V, \tag{32}$$

где функция $\widetilde{G}(x,\lambda) \equiv G(x, \lambda + \nabla\widetilde{w}(x)) - a(x)\nabla\widetilde{w}(x) : \Omega \times R^n \to R^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори: измерима по $x \in \Omega$ для каждого $\lambda \in R^n$ и непрерывна по λ для почти всех $x \in \Omega$ (поскольку эти условия выполнены для G).

Для функции $\widetilde{G}$ из (5) следует монотонность по λ:

$$(\widetilde{G}(x,\lambda) - \widetilde{G}(x,\mu)\,, \lambda - \mu\,) = \tag{33}$$

$$= (G(x, \lambda + \nabla\widetilde{w}(x)) - G(x, \mu + \nabla\widetilde{w}(x))\,, (\lambda + \nabla\widetilde{w}(x)) - (\mu + \nabla\widetilde{w}(x))\,) \geq 0,$$

а из (7), (6) – линейная оценка роста

$$\left|\widetilde{G}(x,\lambda)\right| = |G(x, \lambda + \nabla\widetilde{w}(x)) - a(x)\nabla\widetilde{w}(x) \mp a(x)\lambda| \leq \tag{34}$$

$$\leq |G(x, \lambda + \nabla\widetilde{w}(x)) - a(x)(\lambda + \nabla\widetilde{w}(x))| + a(x)\, |\lambda| \leq b(x) + a_{max}|\lambda|$$

и неравенство (коэрцитивность)

$$(\widetilde{G}(x,\lambda), \lambda) = (G(x, \lambda + \nabla\widetilde{w}(x)) - a(x)\nabla\widetilde{w}(x) \mp a(x)\lambda, \lambda) \geq \tag{35}$$

$$\geq -|G(x, \lambda + \nabla\widetilde{w}(x)) - a(x)(\lambda + \nabla\widetilde{w}(x))||\lambda| + a(x)|\lambda|^2 \geq -b(x)|\lambda| + a_{min}|\lambda|^2.$$

Использовав свойства функции $\widetilde{G}$, получим из (33) монотонность

$$(Bv - B\eta, v - \eta)_V = \int\limits_{\Omega} \left(\widetilde{G}(x, \nabla v) - \widetilde{G}(x, \nabla\eta), \nabla v - \nabla\eta\right) dx \geq 0$$

и из (35) коэрцитивность оператора $B : V \to V$ (см. [7, с. 80])

$$(Bv, v)_V = \int\limits_{\Omega} \left(\widetilde{G}(x, \nabla v), \nabla v\right) dx \geq \int\limits_{\Omega} -b(x)|\nabla v| + a_{min}|\nabla v|^2 dx \geq \tag{36}$$

$$\geq \left(-\|b\|_{L_2(\Omega)} + a_{min}\|v\|_V\right) \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Линейный рост (34) и свойства Каратеодори функции $\widetilde{G}$ обеспечивают (см. [5, с. 204], [7, с. 57]) деминепрерывность оператора B:

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i - v\|_V = 0 \Rightarrow \lim_{i\to\infty} (Bv_i - Bv, \eta)_V = 0 \quad \forall \eta \in V.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Оператор $B : V \to V$, определенный в (32), является ограниченным, деминепрерывным, монотонным и коэрцитивным.*

Далее рассмотрим второй интеграл в равенстве (29). Введем функцию $\widetilde{g}_0(x,s) \equiv g_0(x, s+\widetilde{w}(x)) : \Omega \times R^1 \to R^1$. Функция g_0 удовлетворяет условиям Каратеодори, значит, $\widetilde{g}_0$ измерима по $x \in \Omega$ и непрерывна по s при почти всех x. Из неравенств (8) и (9) следует оценка

$$|\widetilde{g}_0(x,s)| = |g_0(x, s+\widetilde{w}(x)) \mp a_0(x)(s+\widetilde{w}(x))| \leq \tag{37}$$

$$\leq |g_0(x, s+\widetilde{w}(x)) - a_0(x)(s+\widetilde{w}(x))| + a_0(x)|s+\widetilde{w}(x)| \leq$$

$$\leq b_0(x) + a_{max}|s| + a_{max}|\widetilde{w}(x)| \leq$$

$$\leq (b_0(x) + a_{max}|u(x)| + a_{max}|\Phi(x)|) + a_{max}|s|.$$

Из определения (21) и (14) следует, что при $n \geq 3$ функция Φ принадлежит пространству $L_r(\Omega)$ для любого $1 \leq r < r^* \equiv n/(n-2)$. Поскольку область Ω ограниченная, а функции b_0 и u – из пространства $L_2(\Omega)$, то функция $(b_0 + a_{max}|u| + a_{max}|\Phi|)$ принадлежит пространству $L_r(\Omega)$. Тогда функция $\widetilde{g}_0$, в силу неравенства (37), порождает непрерывный оператор $hv \equiv \widetilde{g}_0(x, v(x)) : L_r(\Omega) \to L_r(\Omega)$ (оператор Немыцкого, см. [5, с. 204, теорема 19.1 (основная)]). При $n = 2$ функция Φ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, и $\widetilde{g}_0$ порождает непрерывный оператор $hv \equiv \widetilde{g}_0(x, v(x)) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$.

Для оценки второго интеграла из равенства (29) воспользуемся теоремой вложения Соболева (результат хорошо известен, формулировку см., например, в [7, с. 47, теорема 1.2]): в случае $n \geq 3$ из включения $|\nabla\eta| \in L_2(\Omega)$ следует, что сама функция η – из пространства $L_p(\Omega)$, где показатель p удовлетворяет равенству $1/p = 1/2 - 1/n$, а в случае $n = 2$ можно взять любой показатель $p \geq 1$.

Показатель p^*, сопряженный к p (выполнено равенство $1/p + 1/p^* = 1$, следовательно, $p^* = 2n/(n+2)$), при $n \leq 5$ удовлетворяет неравенству $1 \leq p^* < r^*$. Тогда для любой функции $v \in V$ (тем более, $v \in L_{p^*}(\Omega)$) выполнено включение $hv \equiv \widetilde{g}_0(x, v(x)) \in L_{p^*}(\Omega)$. Использовав неравенство Гёльдера, получим следующее неравенство (C^* – постоянная из неравенства вложения Соболева):

$$\left| \int\limits_\Omega \widetilde{g}_0(x, v(x))\eta dx \right| \leq \|hv\|_{L_{p^*}(\Omega)} \|\eta\|_{L_p(\Omega)} \leq \|hv\|_{L_{p^*}(\Omega)} C^* \|\eta\|_V. \tag{38}$$

В силу (38) при $n \leq 5$ нелинейный и ограниченный оператор $T : V \to V$ определен следующим правилом

$$(Tv, \eta)_V \equiv \int\limits_\Omega g_0(x, v+\widetilde{w})\eta dx \quad \forall v, \eta \in V. \tag{39}$$

Поскольку из слабой сходимости последовательности $\{v_i\}$ к v в пространстве V (по теореме Реллиха–Кондрашова о компактном вложении, формулировку см., например, в [7, с. 47, лемма 1.28]) следует сильная сходимость этой последовательности в пространстве $L_{p^*}(\Omega)$, а в силу непрерывности оператора Немыцкого – сходимость последовательности $\{hv_i\}$ к hv в $L_{p^*}(\Omega)$, получим сходимость последовательности $\{(Tv_i, \eta)_V\}$ к $(Tv, \eta)_V$, или слабую непрерывность оператора T в пространстве V.

Далее, для оператора $T : V \to V$ из неравенств (8) и (9) следует оценка

$$(Tv, v)_V = \int\limits_{\Omega} g_0(x, v + \widetilde{w})v dx = \int\limits_{\Omega} (g_0(x, v + \widetilde{w}) \mp a_0(x)(v + \widetilde{w}))\, v dx = \tag{40}$$

$$= \int\limits_{\Omega} (g_0(x, v + \widetilde{w}) - a_0(x)(v + \widetilde{w}))\, v + a_0(x)v^2 + a_0(x)\widetilde{w}v dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega} -b_0(x)|v| - |a_0(x)uv| - |a_0(x)\Phi v| dx \geq$$

$$\geq -\|b\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} - a_{max}(\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L_{p^*}(\Omega)}\|v\|_{L_p(\Omega)}) \geq$$

$$\geq (-\|b\|_{L_2(\Omega)} - a_{max}(\|u\|_{L_2(\Omega)} + C^*\|\Phi\|_{L_{p^*}(\Omega)}))\|v\|_V = -C\|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Здесь величина $C = \|b\|_{L_2(\Omega)} + a_{max}(\|u\|_{L_2(\Omega)} + C^*\|\Phi\|_{L_{p^*}(\Omega)})$ (постоянная C^* та же, что и в неравенстве (38)) остается неизменной для произвольной функции $v \in V$.

Таким образом, доказана следующая

Лемма 3. *Пусть размерность пространства удовлетворяет неравенству* $n \leq 5$*, тогда правилом* (39) *определен ограниченный, слабо непрерывный оператор* $T : V \to V$*, и для него выполнено неравенство* (40).

Для третьего (последнего) из интегралов, входящих в равенство (29), с учетом (4), выполнено очевидное неравенство

$$\left| \int\limits_{\Gamma_2} \sigma(x)v(x)\eta(x)dx \right| \leq \overline{\sigma}\|v\|_{L_2(\Gamma_2)}\|\eta\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq C\|v\|_V\|\eta\|_V \quad \forall v, \eta \in V,$$

позволяющее определить линейный ограниченный оператор $L : V \to V$ следующим правилом:

$$(Lv, \eta)_V \equiv \int\limits_{\Gamma_2} \sigma(x)v(x)\eta(x)dx \quad \forall v, \eta \in V. \tag{41}$$

В силу (4) оператор L является неотрицательным:

$$(Lv, \eta)_V = \int\limits_{\Gamma_2} \sigma(x)v(x)v(x)dx \geq 0 \quad \forall v \in V. \tag{42}$$

Итак, имеет место

Лемма 4. *Оператор* $L : V \to V$*, определенный в* (41)*, линеен, ограничен и неотрицателен.*

Перейдем теперь к доказательству основного результата настоящей работы.

4. Основной результат и примеры

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4)–(9) *и* (20), *размерность пространства удовлетворяет неравенству* $n \le 5$. *Тогда функция* $w = v + u + \Phi$, *где функция* Φ *задана равенством* (21), *функция* $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *– единственное решение линейной задачи* (25)–(27), *а функция* $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *– любое решение нелинейной вариационной задачи* (28), (29), *будет решением вариационной задачи* (2), (15) (*краевой задачи* (1)–(3)).

Множество решений задачи (28), (29) *непусто и слабо замкнуто в гильбертовом пространстве* V ($V \equiv \{v \in W_2^{(1)}(\Omega) : v(x) = 0,\ x \in \Gamma_1\}$, *с нормой* (30)).

Доказательство. Первая часть теоремы уже доказана в предыдущих разделах статьи. Осталось установить существование решения вариационной задачи (28), (29), которая, в силу лемм 2–4, сводится к поиску функции $v \in V$, удовлетворяющей вариационному условию

$$(Bv, \eta)_V + (Tv, \eta)_V + (Lv, \eta)_V = 0 \quad \forall \eta \in V. \tag{43}$$

Задача (43) эквивалентна операторному уравнению

$$Av = 0\,,\ A \equiv B + T + L : V \to V. \tag{44}$$

Из неравенств (36), (40) и (42) следует коэрцитивность оператора $A : V \to V$ (см., например, [7, с. 80, определение 1.3]):

$$(Av, v)_V \ge \left(a_{min}\|v\|_V - \|b\|_{L_2(\Omega)}\right)\|v\|_V - C\|v\|_V = \gamma(\|v\|_V)\|v\|_V \quad \forall v \in V, \tag{45}$$

$$\gamma(s) \equiv a_{min}s - \|b\|_{L_2(\Omega)} - C\,,\ \lim_{s\to+\infty}\gamma(s) = +\infty.$$

Оператор L, в силу леммы 4, линеен, ограничен и неотрицателен. Тогда, использовав лемму 2, получим, что оператор $B + L$ является ограниченным, деминепрерывным и монотонным. По лемме 3 (размерность пространства $n \le 5$) оператор T ограниченный и слабо непрерывный. Значит, оператор $A = (B + L) + T$ (как сумма деминепрерывного монотонного и слабо непрерывного операторов, см. [7, с. 96, замечание 2.1]) обладает свойством (M) [6, с. 184] (см. также [7, с. 84, условие c) леммы 1.3]):

$$[v_i \rightharpoonup v]\,\&\,[Av_i \rightharpoonup f]\,\&\,\left[\overline{\lim}(Av_i, v_i)_V \le (f, v)_V\right] \Rightarrow Av = f \tag{46}$$

и является ограниченным и деминепрерывным.

Из полученного свойства (46), деминепрерывности, ограниченности и коэрцитивности (45) оператора A следует (см. [7, с. 96, следствие 2.1], [6, с. 184, теорема 2.1]), что множество решений операторного уравнения (44) непусто и слабо замкнуто в пространстве V. Теорема доказана. $\square$

Приведем пример функции G (из теории нелинейной фильтрации несжимаемой жидкости в двух- и трехмерном пространствах, среда неоднородная и изотропная), для которой выполнены предположения I – III:

$$G(x, \lambda) \equiv \frac{h(x, |\lambda|)}{|\lambda|}\lambda\,; \;\; h(x, s) \equiv \kappa(x)[\,s - \mu(x)\,]_+\,; \;\; [\,s\,]_+ \equiv \begin{cases} 0\,, & s < 0, \\ s\,, & s \ge 0, \end{cases} \tag{47}$$

где функции $\mu, \kappa : \Omega \to R$ измеримы и ограничены:

$$0 \le \mu(x) \le \overline{\mu}, \quad 0 < \underline{\kappa} \le \kappa(x) \le \overline{\kappa}. \tag{48}$$

Очевидно, что для функции G, определенной в (47), выполнено условие Каратеодори, и легко проверить монотонность (5) (условие I).

Воспользовавшись неравенствами (48) и определением (47), получим оценку

$$|G(x,\lambda) - \kappa(x)\lambda| = \left|\kappa(x)\frac{[|\lambda| - \mu(x)]_+}{|\lambda|}\,\lambda - \kappa(x)\frac{|\lambda|}{|\lambda|}\,\lambda\right| =$$

$$= \kappa(x)\,|[|\lambda| - \mu(x)]_+ - |\lambda|| \leq \overline{\kappa}\,\overline{\mu}.$$

Значит, при $a(x) \equiv \kappa(x)$, $a_{min} = \underline{\kappa}$, $a_{max} = \overline{\kappa}$ и $b(x) \equiv \overline{\kappa}\,\overline{\mu}$ выполнено условие II.

Будем считать, что в рассматриваемой задаче имеется один источник, находящийся в начале координат ($x^{(1)} = 0$ – внутренняя точка области Ω), для функции κ существуют положительные постоянные κ_0, r, c, для случая $n = 2$ – постоянная $\beta > 0$, а для случая $n = 3$ – постоянная $\beta > 0.5$, и выполнено условие

$$|\kappa(x) - \kappa_0| \leq c\,|\,x\,|^{\beta} \quad \forall\, x \in B_r(0) \subset \Omega,$$

т. е. функция κ непрерывна по Гёльдеру в начале координат (в точке сосредоточения источника) с показателем β. Тогда справедливо неравенство

$$\big[|x|^{1-n}|\kappa(x) - \kappa_0|\big]^2 \leq \frac{c}{|\,x\,|^{n-(2\beta+2-n)}} = \frac{c}{|\,x\,|^{n-\varepsilon}} \qquad \forall\, x \in B_r(0), \tag{49}$$

где $\varepsilon = (2\beta + 2 - n) > 0$ при $n = 2$ ($\beta > 0$) или $n = 3$ ($\beta > 0.5$).

Положим теперь $a^{(1)} = \kappa_0$. Тогда из оценки (49) следует, что функция

$$\alpha_1(x) \equiv |x - x^{(1)}|^{1-n}(a(x) - a^{(1)}) = |x|^{1-n}|\kappa(x) - \kappa_0|$$

принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, т. е. выполнено условие III.

Функция G, определенная в (47), моделирует закон фильтрации с предельным градиентом (в той части области, где $\mu > 0$) и линейный закон (Дарси) фильтрации в подобласти, где $\mu \equiv 0$.

Заключение

Изложенные выше рассуждения и основной результат (теорема 1) могут быть использованы для построения метода приближенного решения задачи (1)–(3). Алгоритм нахождения обобщенного решения состоит в следующем: по данным нелинейной задачи (1)–(3) равенством (21) определим функцию Φ, найдем решение u линейной задачи (25)–(27), а затем решим нелинейную вариационную задачу (28), (29).

Для решения задач (25)–(27) и (28), (29) могут быть использованы известные методы, применяемые для решения классических линейных и нелинейных задач (монотонного типа). В частности, при аппроксимации указанных выше краевых задач можно использовать регулярные сетки (без сгущения в окрестности точечного источника) в конечно-элементных и конечно-разностных методах.

Отметим, что для уравнения с сильно монотонной дивергентной частью и без младшего слагаемого в работах [11], [12] рассмотрен итерационный метод, установлена сходимость в пространстве Соболева и в равномерной норме.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
2. *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 336 с.
3. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
4. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
7. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
8. *Ляшко А.Д., Карчевский М.М.* О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Изв. вузов. Матем. 1975. № 6. С. 73–81.
9. *Задворнов О.А.* Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Изв. вузов. Матем. 2005. № 1. С. 58–63.
10. *Задворнов О.А.* Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2010. Т. 152, № 1. С. 155–163.
11. *Задворнов О.А., Задворнова Г.О.* О решении нелинейной стационарной неоднородной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 7. С. 984–988.
12. *Задворнов О.А., Трифонова Г.О.* Итерационный метод решения нелинейной краевой задачи с точечным источником // Изв. вузов. Матем. 2022. № 5. С. 74–79. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-5-74-79.

Поступила в редакцию 15.05.2024
Принята к публикации 23.05.2024

Задворнов Олег Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *olzad@mail.ru*

Трифонова Галина Олеговна, ассистент Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *gaozadvornova@kpfu.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI**
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 2, pp. 173–186

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.173-186

Mixed Boundary Value Problem for a Monotone Equation with a Lower Order Term and Point Sources on the Right Side

*O.A. Zadvornov**, *G.O. Trifonova***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **olzad@mail.ru*, ***gaozadvornova@kpfu.ru*

Received May 15, 2024; Accepted May 23, 2024

Abstract

The existence of a solution to the mixed boundary value problem for a quasilinear equation with a lower order term and point sources on the right side was proved. The solution was obtained in an additive form, and the features associated with point sources were clearly highlighted. The approach used in the proof can serve as a basis for a method of solving this type of problem.

Keywords: nonlinear boundary value problem, point source, additive extraction
Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhidkostei i gazov v prirodnykh plastakh* [The Motion of Fluids and Gases in Natural Strata]. Moscow, Nedra, 1984. 211 p. (In Russian)
2. Ilyin V.P. *Chislennye metody resheniya zadach elektrofiziki* [Numerical Methods for Solving Problems of Electrophysics]. Moscow, Nauka, 1985. 336 p. (In Russian)
3. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type]. Moscow, Nauka, 1973. 576 p. (In Russian)
4. Vladimirov V.S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1979. 320 p. (In Russian)
5. Vainberg M.M. *Variatsionnye metody issledovaniya nelineinykh operatorov* [Variational Methods for Studying Nonlinear Operators]. Moscow, Gostekhizdat, 1956. 344 p. (In Russian)
6. Lions J.-L. *Nekotorye metody resheniya nelineinykh kraevykh zadach* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems]. Moscow, Mir, 1972. 587 p. (In Russian)
7. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nelineinye operatornye uravneniya i operatornye differentsial'nye uravneniya* [Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations]. Moscow, Mir, 1978. 336 p. (In Russian)
8. Lyashko A.D., Karchevskii M.M. The solution of certain nonlinear problems of filtration theory. *Sov. Math. (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved.)*, 1975, vol. 19, no. 6, pp. 60–66.

9. Zadvornov O.A. Investigation of a nonlinear stationary filtration problem in the presence of a point source. *Russ. Math.*, 2005, vol. 49, no. 1, pp. 53–59.

10. Zadvornov O.A. Existence of solutions for quasilinear elliptic boundary value problem in the presence of point sources. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2010, vol. 152, no. 1, pp. 155–163. (In Russian)

11. Zadvornov O.A., Zadvornova G.O. On the solution of a nonlinear stationary inhomogeneous filtration problem with a point source. *Differ. Equations*, 2014, vol. 50, no. 7, pp. 976–980. https://doi.org/10.1134/S0012266114070131.

12. Zadvornov O.A., Trifonova G.O. Iteration method for solving a nonlinear boundary value problem with a point source. *Russ. Math.*, 2022, vol. 66, no. 5, pp. 60–64. https://doi.org/10.3103/S1066369X22050085.

⟨ ***Для цитирования:*** *Задворнов О.А., Трифонова Г.О.* Смешанная краевая задача для уравнения монотонного типа с младшим слагаемым при наличии точечных источников в правой части // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 173–186. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.173-186. ⟩

⟨ ***For citation:*** Zadvornov O.A., Trifonova G.O. Mixed boundary value problem for a monotone equation with a lower order term and point sources on the right side. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 173–186.
URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.173-186. (In Russian) ⟩