УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИОННАЯ КОНСОЛИДАЦИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАГРУЗКИ

А.В. Костерин, Э.В. Скворцов

Аннотация

Исследуется процесс фильтрационной консолидации упругого насыщенного полупространства под действием нормальной нагрузки на его поверхность при предположениях о несжимаемости жидкости и зерен скелета, а также независимости суммарных напряжений скелета от времени. При нагружении полупространства сосредоточенной силой найдены аналитические представления для давления жидкости и осадки поверхности полупространства. Найдена также максимальная осадка при равномерном нагружении поверхности по площади круга.

Ключевые слова: консолидация, упругое полупространство, нагрузка, давление, осадка.

Введение

Становление и развитие теории фильтрационной консолидации связано с работами К.Терцаги [1],Н.М.Герсеванова [2], В.А. Флорина [3, 4] и других. Общая математическая модель консолидации и аналитические методы её исследования были предложены М. Био [5,6], оригинальный метод решения задач консолидации принадлежит Мак Нами и Гибсону [7]. Тестовые двумерные задачи консолидации были рассмотрены в работах [7–9]. Осадка поверхности упругого насыщенного полупространства, деформированного осесимметричной нагрузкой, на основании модели М. Био исследовалась В.З. Партоном, при этом коэффициент Пуассона ν считался равным нулю [10].

В данной работе величина ν произвольна. Сжимаемостью жидкости и зерен скелета полупространства пренебрегается и полагается, что объемные деформации скелета связаны с переупаковкой зерен. При постановке задачи используется гипотеза Терцаги, согласно которой суммарные напряжения не зависят от времени [1]. В рамках этих предположений при определенном типе приложения нагрузки определяются давление и осадка поверхности полупространства при его нагружении нормальной сосредоточенной силой, а также осадка центра круга в случае равномерно распределенной по кругу нормальной нагрузки.

1. Основные соотношения.

Рассматривается процесс фильтрационной консолидации насыщенного жидкостью упругого полупространства под действием мгновенно приложенной вертикальной нагрузки на часть его поверхности. Пусть x_i, $i = 1 \div 3$ – декартовы координаты точки полупространства $x_3 \geq 0$, t – время, σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} – компоненты суммарных напряжений, $p = p(x_1, x_2, x_3, t)$ – давление жидкости. Суммарные напряжения в скелете полупространства представляются соотношением

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^f - p\delta_{ij}, \tag{1}$$

где σ_{ij}^f – эффективные напряжения [1, 11], δ_{ij} – символ Кронекера.

Считается, что сжимаемостью зерен скелета и жидкости можно пренебречь и что объемные деформации скелета связаны с переупаковкой зерен.

Математическая модель консолидации включает в себя суммарное уравнение движения фаз, уравнения неразрывности (баланса масс), закон фильтрации, реологическое соотношение для пористого скелета, граничные и начальные условия.

В результате выделения из суммарного уравнения движения фаз [12] его статической компоненты и учета того, что в процессе консолидации пористость среды изменяется незначительно, это уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \qquad (2)$$

Условие неразрывности процесса консолидации выглядит следующим образом [12]:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \qquad (3)$$

где $\mathbf{q} = m(\mathbf{v} - \partial \mathbf{u}/\partial t)$ – скорость фильтрации, $\theta = \operatorname{div} \mathbf{u}$ – объемная деформация скелета, $\mathbf{v}$ и $\partial \mathbf{u}/\partial t$ – среднефазовые макроскорости жидкой и твердой фазы соответственно, $\mathbf{u}$ – смещения скелета.

Закон фильтрации полагается линейным:

$$\mathbf{q} = -\frac{k}{\mu_0} \nabla p, \qquad (4)$$

где k – проницаемость скелета, μ_0 – вязкость жидкости.

Реологическое соотношение для пористого скелета связано только с эффективными напряжениями (закон упругости) [11]:

$$\sigma_{ij}^f = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \qquad (5)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)\left(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i\right)$$

есть тензор макродеформаций, λ, μ – коэффициенты Ламе упругой пористой матрицы.

Модель (1)–(5) замкнута.

В момент времени $t = 0 + 0$ при мгновенном приложении к границе полупространства вертикальной нагрузки $\Pi(x_1, x_2)$ эффективные напряжения равны нулю, скелет абсолютно несжимаем, и вся нагрузка воспринимается жидкостью [2,4]:

$$p_0(x_1, x_2, 0, 0 + 0) = \Pi(x_1, x_2) \qquad (6)$$

При $t = 0 + 0$ фильтрационная консолидация не развита, и объемные деформации скелета сохраняются [12]:

$$\theta(x_i, 0 + 0) = 0. \qquad (7)$$

С учетом условия (7) уравнения начального импульса принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} - \frac{\partial p_0}{\partial x_i} = 0, \quad \sigma_{ij}^f = 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Отсюда вытекает связь смещений скелета и давления жидкости [13]:

$$\mu \Delta \mathbf{u} - \nabla p_0 = 0.$$

Дифференцирование этого уравнения с учетом несжимаемости скелета приводит к уравнению:

$$\Delta p_0 = 0,$$

и, таким образом, давление в полупространстве в момент времени $t = 0+0$ описывается решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Решение этой задачи известно [15].

Поскольку при $t = 0+0$ сумма эффективных напряжений равна нулю, из формулы (1) следует, что давление выражается через суммарные напряжения:

$$p(x_1, x_2, x_3, 0+0) = p_0(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \tag{8}$$

Пусть теперь $t > 0$. Из соотношений (3)–(5) вытекает, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k}{\mu_0}\Delta p,$$

$$\frac{\partial(\sigma_{11}^f + \sigma_{22}^f + \sigma_{33}^f)}{\partial t} = \frac{(3\lambda + 2\mu)k}{\mu_0}\Delta p. \tag{9}$$

Далее принимается гипотеза Терцаги, по которой тензор суммарных напряжений не зависит от времени [1]. Согласно ей и формуле (1)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\delta_{ij} = 0. \tag{10}$$

Из соотношений (9), (10) вытекает уравнение, которому подчиняется давление в процессе консолидации:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \cdot \Delta p, \tag{11}$$

где $\kappa = (3\lambda + 2\mu)k/(3\mu_0)$.

Приложение нагрузки на границе $x_3 = 0$ принимается по типу «высокопроницаемый поршень» [11]:

$$p(x_1, x_2, 0, t) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, давление подчиняется уравнению (11) в полупространстве $x_3 \geq 0$ при граничном условии (12) и начальном условии (8).

Представление давления в виде

$$p(x_1, x_2, x_3, t) = p_0(x_1, x_2, x_3) - p_1(x_1, x_2, x_3, t) \tag{13}$$

с учетом формулы (6) сводит задачу к определению функции $p_1 = p_1(x_1, x_2, x_3, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \kappa \cdot \Delta p_1 \tag{14}$$

с граничным условием

$$p_1(x_1, x_2, 0, t) = \Pi(x_1, x_2). \tag{15}$$

и начальным условием

$$p_1(x_1, x_2, x_3, 0+0) = 0. \tag{16}$$

Решение задачи (14)-(16) также известно [15]. Итак, определение давления в полупространстве в процессе консолидации сводится к последовательному решению первой краевой задачи для уравнения Лапласа и первой краевой задачи для уравнения типа теплопроводности.

Помимо определения давления представляет интерес нахождение осадки упругого полупространства в процессе его консолидации. Далее удобнее перейти к обозначениям $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $\sigma_{11} = \sigma_{xx}$, $\sigma_{22} = \sigma_{yy}$, $\sigma_{33} = \sigma_{zz}$.

Напряжения связаны с деформациями согласно закону Гука [14], а при консолидации соответствующую деформацию порождают эффективные напряжения, так что

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz}^f - \nu(\sigma_{xx}^f + \sigma_{yy}^f)\right]. \tag{17}$$

Здесь $u_z = u_z(x, y, z, t)$ – нормальное смещение полупространства, E – модуль Юнга.

Пусть функция $F = F(x, y, z)$ такова, что

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right].$$

Из равенств (1) и (17) следует, что

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1-2\nu}{E}p. \tag{18}$$

С течением времени давление жидкости рассеивается:

$$\lim_{t\to\infty} p(x, y, z, t) = 0,$$

поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[u_z(x, y, z, \infty)\right],$$

и формула (18) приобретает вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[u_z(x, y, z, t) - u_z(x, y, z, \infty)\right] = \frac{1-2\nu}{E}p(x, y, z, t). \tag{19}$$

Пусть $u_s(t) = u_z(x, y, z, t) - u_z(x, y, z, 0)$ – осадка полупространства при его консолидации. Так как $u_s(x, y, \infty, t) = 0$, из соотношения (19) вытекает, что

$$u_s(x, y, 0, t) = \frac{1-2\nu}{E}\int_0^\infty \left[p(x, y, \xi, 0) - p(x, y, \xi, t)\right] d\xi. \tag{20}$$

2. Сосредоточенная нормальная нагрузка.

Пусть на полупространство в точке $x = y = z = 0$ действует нормальная сосредоточенная сила Π_0.

Начальное распределение давления следующее [15]:

$$p(x, y, z, 0+0) = p_0(x, y, z) = \frac{\Pi_0 z}{2\pi\rho^3}. \tag{21}$$

Для определения давления требуется решить уравнение (14) с начальным условием (16) и граничным условием (15), которое в данном случае таково:

$$p_1(x, y, 0, t) = \Pi_0\delta(x)\delta(y),$$

где δ - символ дельта-функции.

Решение этой задачи в полупространстве $z \geq 0$ имеет вид [15]:

$$p_1(x,y,z,t) = \Pi_0 \kappa \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi)\delta(\eta) \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(x,y,z,\zeta,\eta,\xi,t-\tau) \right]_{\zeta=0} d\eta d\xi d\tau. \qquad (22)$$

Здесь

$$G(x,y,z,\zeta,\eta,\xi,t) = \frac{1}{8(\pi\kappa t)^{3/2}} \left[\exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4\kappa t} \right) - \exp\left(-\frac{(z+\zeta)^2}{4\kappa t} \right) \right] \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2}{4\kappa t} \right].$$

Правая часть формулы (22) сводится к однократному интегралу:

$$p_1(x,y,z,t) = \frac{\Pi_0 z}{8(\pi\kappa)^{3/2}} \int\limits_0^t \frac{\exp\left(-\frac{\rho^2}{4\kappa(t-\tau)} \right)}{(t-\tau)^{5/2}} d\tau.$$

Его значение известно [16], и функция p_1 определяется:

$$p_1(x,y,z,t) = \frac{\Pi_0 z}{2\pi\rho^3} \left[erfc \frac{\rho}{2(\kappa t)^{1/2}} + \frac{\rho}{(\pi\kappa t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\kappa t} \right) \right].$$

Окончательно решение исходной задачи нахождения давления с учетом формул (13), (21) приобретает вид:

$$p(x,y,z,t) = \frac{\Pi_0 z}{2\pi\rho^3} \left[erf \frac{\rho}{2(\kappa t)^{1/2}} - \frac{\rho}{(\pi\kappa t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\kappa t} \right) \right]. \qquad (23)$$

Выражение (23) может быть записано в иной форме:

$$p(x,y,z,t) = -\frac{\Pi_0}{2\pi} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho} erf \frac{\rho}{2(\kappa t)^{1/2}} \right],$$

что позволяет вычислить следующий интеграл:

$$\int\limits_z^\infty p(x,y,\xi,t) d\xi = \frac{\Pi_0}{2\pi\rho} erf \frac{\rho}{2(\kappa t)^{1/2}}.$$

Таким образом, согласно формуле (20) осадка поверхности полупространства описывается выражением

$$u_s(r,t) = \frac{(1-2\nu)\Pi_0}{2\pi E r} erfc \frac{r}{2(\kappa t)^{1/2}}. \qquad (24)$$

При $\nu = 0$ эта формула совпадает с результатом, полученным в работе [10].

3. Нормальная нагрузка, распределенная по кругу.

Пусть нагрузка Π_0 распределена равномерно по кругу радиуса $r = a$.

Используя представление (24), по принципу суперпозиции можно найти осадку поверхности полупространства в точке $r = 0$:

$$u_s(0,t) = \frac{(1-2\nu)\Pi_0}{2\pi E} J(t),$$

где

$$J(t) = \int\limits_0^a \rho \left[\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\rho} - \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} erf \frac{\rho}{2(\kappa t)^{1/2}} d\theta \right] d\rho.$$

После введения безразмерных величин

$$T = \frac{2(\kappa t)^{1/2}}{a},\ U_s = \frac{u_s E}{\Pi_0 a}$$

и вычисления интеграла искомая осадка описывается выражением

$$U_s(0, T) = (1 - 2\nu) f(T),$$

где

$$f(t) = erfc \frac{1}{T} + \frac{T}{\pi^{1/2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{T^2} \right) \right].$$

При $\nu = 0$ эта формула также совпадает с результатом, полученным в работе [10].

Заключение.

Показано, что в условиях гипотезы К. Терцаги и пренебрежении сжимаемостью скелета и жидкости осадка поверхности упругого насыщенного полупространства при его нормальном нагружении есть функционал от давления жидкости. Получено аналитическое выражение для давления при нагружении полупространства нормальной сосредоточенной силой. Установлено, что в процессе консолидации соответствующая осадка при произвольном коэффициенте Пуассона ν отличается от известной величины осадки, найденной в рамках теории М. Био при $\nu = 0$, лишь на коэффициент пропорциональности $1 - 2\nu$. Тот же вывод справедлив и по отношению к осадке центра круга при равномерном нормальном нагружении поверхности по кругу.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-00333а.

Литература

1. *Терцаги К.* Теория механики грунтов. – М.: Госстройиздат, 1961. – 507 с.
2. *Герсеванов Н.М.* Основы динамики грунтовой массы. – М., Л.: Гл. ред. строительной лит., 1937. – 242 с.
3. *Флорин В.А.* Основы механики грунтов. Т. 1 – Л.: Стройиздат, 1959. – 356 с.
4. *Флорин В.А.* Теория уплотнения земляных масс – М.: Стройиздат, 1948. – 284 с.
5. *Bio M.A.* General theory of three dimensional consolidation // J. Appl. Phys. – 1941. – V. 12, No 2. – P. 155–164.
6. *Bio M.A.* Consolidation settlement under a rectangular load distribution // J. Appl. Phys. – 1941. – V 12, No 5. – P. 426-430.
7. *Mc Namee G., Gibson R.E.* Displacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media // Quart. J. mech. Appl. Math. – 1960. – V. 13. – P. 98–111.
8. *Партон В.З.* Одна задача теории консолидации насыщенных жидкостью уплотняемых пористых сред // Инж. журн. – 1965. – Т. V, № 1. – С. 176–180.
9. *Веригин Н.Н.* Консолидация грунта под гибким фундаментом (плоская задача)// Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1961. – № 5. – С. 20–23.

10. *Партон В.З.* Осесимметричная задача теории консолидации насыщенных жидкостью уплотняемых пористых сред // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 160, № 4. – С. 785–788.

11. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. – М.: Недра, 1984. – 232 с.

12. *Егоров А.Г., Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 105 с.

13. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 875 с.

14. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

15. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

16. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.

Костерин Александр Васильевич – профессор кафедры аэрогидромеханики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

Скворцов Эдуард Викторович – профессор кафедры моделирования экологических систем, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *eduard.scvortsov@rambler.ru*