КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра общей математики

Д.Ф. Абзалилов, Н.Р. Абубакиров, Е.А. Аксентьева,
Н.П. Заботина, Е.А. Широкова

ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ БАКАЛАВРИАТА

Учебно-методическое пособие

Казань – 2016

УДК 517

Принято на заседании кафедры общей математики
Протокол №7 от 24.05 2016 г.

Рецензенты:
доктор физ.-мат.наук, профессор кафедры
общей математики КФУ **Н.Г. Гурьянов**,
кандидат физ.-мат.наук, доцент кафедры
общей математики КФУ **В.А. Сочнева**

Абзалилов Д.Ф., Абубакиров Н.Р., Аксентьева Е.П., Заботина Е.П., Широкова Е.А.

Профессионально ориентированные задачи по математике для естественнонаучных направлений бакалавриата

Учебно-методическое пособие/ Д.Ф. Абзалилов, Н.Р. Абубакиров, Е.П. Аксентьева, Н.П. Заботина, Е.А. Широкова – Казань: Казан. ун-т, 2016 – 22 с.

Настоящий сборник задач по математике составлен с учетом общекультурных и профессиональных компетенций образовательных стандартов направлений 04.03.01 Химия, 05.03.01 Геология, 05.03.04 Гидрометеорология, 06.03.01 Биология, 21.03.01 Нефтегазовое дело. Отдельно приведены задачи для направления 39.03.01 Социология.
Многие задачи также могут быть рекомендованы для использования в учебном процессе по направлениям 09.03.03 Прикладная информатика, 27.03.02 Управление качеством.
.

Векторы и матрицы (направления Биология, Геология, Гидрометеорология, Химия, Нефтегазовое дело)

1. Разложить северо-западный ветер, скорость которого 5,7 м/сек, на западную и северную компоненты и найти их величину (ответ округлить до сотых).

2. Найти направление и скорость ветра, являющегося результатом взаимного действия морского бриза, дующего на берег со скоростью 14 м/сек, и ветра, дующего с берега на море со скоростью 9 м/сек и под углом $60°$ к береговой линии (направление округлить до целого числа градусов, скорость ветра – до десятых).

3. Ветер, дующий в горизонтальном направлении со скоростью 2,5 м/сек, обусловливает подъем некоторой массы кучевых облаков со скоростью 5 м/сек. Определить направление и скорость движения облаков (ответ округлить до сотых).

4. Выполнены три последовательных измерения ветра, давшие следующие результаты: $c_1 = 6$ м/с, $A_1 = 97°$, $c_2 = 13$ м/с, $A_2 = 113°$, $c_3 = 4$ м/с, $A_3 = 86°$. Определить (с точностью до десятых долей м/с) составляющие вектора скорости среднего результирующего ветра u_{cp}, v_{cp}, величину его модуля c_{cp} и его направление A_{cp}.

5. Ветер со скоростью $c = 15$ м/с обдувает полотнище паруса под углом $60°$. Площадь полотнища паруса равна 40 м^2. Какова величина полного силового воздействия на полотнище паруса?

6. На уровне $z_1 = 2$ км скорость ветра $c = 7$ м/с, а его направление $A_1 = 234°$. Параметры термического ветра в слое $2 - 4$ км таковы: $c_T = 3$ м/с, $A_T = 125°$. Определить модуль вектора скорости ветра c_2 и его направление A_2 на высоте 4 км.

7. Наблюдения за ветром на взлетно-посадочной полосе (ВПП) аэродрома у поверхности Земли и на высоте 100 м в различные моменты времени дали следующие результаты:

№ измерения	Характеристики ветрового режима на высотах z_1 и z_2			
	c_1, м/с	$A_1, °$	c_2, м/с	$A_2, °$
1	12	195	10	240
2	12	150	18	200
3	7	140	12	190

Определить показатели векторов сдвигов ветра.

8. Популяционный вектор экосистемы, образованной m сосуществующими видами задается в виде $\vec{n} = (n_1, n_2, ..., n_m)$, где n_j – количество особей в j-м виде. Каким будет популяционный вектор, если первый вид уменьшился вдвое, второй вымер, а оставшиеся виды увеличились в полтора раза?

9. Равновесная конфигурация молекулы водорода с плоскостью вращения электронов, перпендикулярной плоскости XOY, не изменяется при повороте ее на угол π относительно оси Oz. Постройте матрицу этого преобразования (поворота) в трехмерном пространстве.

10. Таблица данных добычи бентонитовой глины (в млн. т) в трех различных районах за 2014 год имеет вид

РЕГИОН	Глина для буров. раств.	Литейная глина	Пр. глины
Восточный р-н	10,5	6,3	0,5
Пограничный р-н	21,8	8	0,2
Центральный р-н	22	7,6	0,1

за 2015 год имеет вид

РЕГИОН	Глина для буров. раств.	Литейная глина	Пр. глины
Восточный р-н	8,4	10,2	0,4
Пограничный р-н	24	11,4	0,1
Центральный р-н	30,2	4,8	0

Составьте матрицу увеличения добычи (в тыс. т).

11. Составить характеристики-векторы минеральных составов двух оловорудных месторождений:

№ месторожд./ мин.состав	Кварц	Хло-рит	Пи-рит	Гале-нит	Топаз	Пирро-тин	Флюо-рит	Арсено-пирит	Кар-бонат	Муско-вит
1	4	4	3	4	1	3	0	3	4	1
2	4	1	2	1	4	1	3	3	0	4

Определить сходство месторождений по косинусу угла между характеристиками-векторами.

12. Пусть $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – базисные векторы периодичности структуры кристалла, приведенные к общему началу A, (h, k, l) – индексы его грани. Найти расстояние от A до данной грани.

13. Найти угол между гранями кристалла, если в ортонормальном базисе векторов периодичности индексы этих граней имеют вид: (h_1,k_1,l_1) и (h_2,k_2,l_2).

14. Даны координаты четырех атомов (альфа-углеродов) некоторой аминокислоты (с соответствующим масштабированием): A (0;2;-3), B(6;-1;-1), C(12;-4;1), D(6;-1;3). 1) Проверить, что расстояния между всеми атомами одинаковы. 2) Найти валентные углы между звеньями AB и BC, а также между звеньями BC и CD. 3) Найти торсионный угол между плоскостью атомов A, B, C и плоскостью атомов B, C, D.

15. Рассмотрим экосистему, которая содержит n сосуществующих видов.

Определим популяционный вектор экосистемы $X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, где $x_i(t)$ – численность i-го вида в момент t. Определим матрицу перехода $A(t)$ экосистемы от момента t к моменту t+1 по формуле: $X(t+1) = A(t)\, X(t)$.

Рассмотрим частный случай: $X(0)=\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}$, $A(t)=\begin{pmatrix} 1+0,05t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,05t \\ 0 & 0 & 1-0,1t \end{pmatrix}$.

Найдите X(1), X(2), X(3). Опишите в биологических терминах эволюцию этой экосистемы из трех конкурирующих видов за первые три периода времени. Выясните, когда произойдет вымирание третьего вида.

16. Дано: скорость ветра $c = 8$ м/с, направление ветра $A_c = 190°$, модуль горизонтального градиента температуры $r = 2{,}0℃/100$ км, направление градиента температуры $A_r = 50°$. Начальное значение температуры воздуха в месте наблюдения составляет $7{,}0℃$. Вычислить суточную величину адвективного изменения температуры воздуха (ΔT).

17. Суточное изменение температуры воздуха составляет $\Delta T = 5{,}0℃/100$ км, угол между векторами $\bar{c}$ и $\bar{r}$ равен $30°$. Чему равна скорость ветра c?

18. В точках 1, 2, 3, 4 кругового пространства радиуса $r = 200$ км производилась серия измерений характеристик ветра (c, A), результаты которых отражены в таблице

№ серии	Характеристики ветра (c,м/с, A, °)
1	$c_1 = 6{,}0,\ A_1 = 240$, $c_2 = 5{,}0,\ A_2 = 200,\ c_3 = 4{,}0,\ A_3 = 180,\ c_4 = 12{,}0,\ A_4 = 40$
2	$c_1 = 5{,}0,\ A_1 = 130$, $c_2 = 6{,}0,\ A_2 = 90,\ c_3 = 12{,}0,\ A_3 = 110,\ c_4 = 8{,}0,\ A_4 = 270$
3	$c_1 = 6{,}0,\ A_1 = 190$, $c_2 = 12{,}0,\ A_2 = 180,\ c_3 = 4{,}0,\ A_3 = 170,\ c_4 = 15{,}0,\ A_4 = 170$

Для каждой серии измерений вычислить вертикальную составляющую вектора вихря Ω_z и определить направление обращения частиц воздуха при рассмотрении картины воздухообмена с конца оси Oz.

Решение систем линейных уравнений (направление Биология)

1. Три вида бактерий сосуществуют в пробирке и потребляют 3 вида субстратов. Обозначая с помощью вектора $\vec{c}_j = (c_{j1}, c_{j2}, c_{j3})$ суточную дозу потребления 1-го, 2-го и 3-го субстрата, соответственно, необходимую для выживания j-й бактерии, имеем: $\vec{c}_1 = (1,1,1)$, $\vec{c}_2 = (1,2,3)$, $\vec{c}_3 = (1,3,5)$. Сосчитайте, сколько бактерий каждого вида выживет в пробирке, если в нее ежедневно вносится 15000 единиц первого субстрата, 30000 ед. второго субстрата и 45000 единиц третьего субстрата.
2. На новый ареал обитания переселяются 3 вида птиц общей численностью 10000 особей. Ежегодный прирост популяции у видов

равен, соответственно 3%, 4% и 5%. Если известно, что общий прирост популяции всех птиц составил 380 особей, и прирост популяций первого и третьего вида одинаков, определите начальное количество особей в каждой популяции.

3. Простейшее питается тремя видами пищи: эвгленами, тетрахименами и хламидомонадами. Наблюдение показывает, что на каждую потребляемую единицу Э. приходится в среднем две единицы Т. и три единицы Х. Если от потребления единицы любого из этих видов пищи простейшее получает одну единицу энергии, то какое потребление обеспечит ему 12 ед. энергии?

Задачи из комбинаторики (направления Биология и Химия)

1. Сколько существует различных галогенопроизводных метана вида CH_2XY, где X и Y – атомы галогенов? Учтите, что порядок расположения галогенов здесь роли не играет, так как у молекул этого вида нет изомеров.

2. Сколько трипептидов, содержащих три различных аминокислоты остатка, можно составить из 20 аминокислот? Учтите, что здесь важен порядок расположения аминокислот, так как пептиды – несимметричные молекулы.

3. Сколько тетрапептидов, в которых все аминокислотные остатки разные, может быть составлено из четырех аминокислот?

4. Сколько всего тетрапептидов может быть составлено из пяти аминокислот?

5. Сколько разных молекулярных формул соответствует галогенпроизводным бензола вида а) C_6H_5X, б) C_6H_4XY, в) C_6H_3XYZ?

6. Три типа бактерий культивируются в 9-ти пробирках. Три пробирки содержат бактерии 1-го типа, четыре пробирки – бактерии 2-го типа и две пробирки – бактерии 3-го типа. Сколькими способами можно расположить пробирки на штативе, если замена одна на другую пробирок с бактериями одного типа не считается новым расположением?

7. Для генетического эксперимента из выборки в 10 розовых цветков, 10 красных цветков и 10 белых цветков выбираются 4 белых, 7 красных и 5 розовых цветков. Сколькими способами можно это сделать?

8. В диплоидном генотипе для отдельного локуса с двумя аллелями возможны три генотипа. Сколько диплоидных генотипов возможно создать при 5 локусах с тремя аллелями?

9. Пусть имеется 6 симптомов некоторого заболевания. Заболевание диагностируется, если присутствует не менее 4-х симптомов. Сколько вариантов различных наборов симптомов возможны?

10. Сколько мутировавших хромосом можно получить из исходной хромосомы, содержащей 10 генов, если мутация представляет собой перестановку любых двух генов.

Задачи на экстремум (направления Биология, Геология и Химия)

1. **Задача о смеси окиси азота с кислородом**. Газ, содержащий окись азота, смешивается с воздухом. Определить, при каком содержании кислорода (в %) в полученной смеси скорость окисления азота максимальна и какой объем добавляемого к газу воздуха обеспечивает это количество кислорода в смеси, если скорость реакции в каждый момент пропорциональна концентрации кислорода и квадрату концентрации азота.

2. **Задача об освещении зоны хлорирования**. Найти, на какой высоте h над круглой площадкой радиуса a, где происходят процессы сульфирования и хлорирования органических соединений, следует разместить необходимый для этого источник света, чтобы освещенность площадки была максимальной. Используйте формулу яркости освещения $l = k\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$, где k – интенсивность источника света, r – расстояние от источника света до края площадки, φ –угол наклона лучей.

3. **Конусообразный фильтр**. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было сделать конусообразный фильтр наибольшего объема?

4. **Задача об определении энергии Гиббса**. Средняя молярная энергия Гиббса смеси двух изомеров одной субстанции имеет вид $G = G^0 + RTx\ln x + RT(1-x)\ln(1-x)$, где x – мольная доля, остальные величины, входящие в формулу – постоянные (R – газовая постоянная, T – температура). Найти наибольшее значение энергии Гиббса для $0 \le x \le 1$.

5. **Задача о проектировании цилиндрического бака**. Цилиндрический бак, необходимый в химическом производстве, содержит 2000 м^3 едкой жидкости. Вследствие дороговизны неактивного металла, из которого сделан бак, следует спроектировать его так, чтобы на изготовление бака ушло минимальное количество материала. Найдите оптимальные размеры бака.

6. **Вероятность обнаружения электрона.** Вероятность нахождения электрона на расстоянии r от ядра атома водорода пропорциональна $4\pi r^2\psi^2(r)$, где волновая функция $\psi(r) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} a_0^{3/2}(2 - \dfrac{r}{a_0})e^{-r/2a_0}$, a_0 – радиус Бора ($0.529 \cdot 10^{-10}$ м). Найти наибольшее и наименьшее значения вероятности, наибольшее и наименьшее значения волновой функции.

7. **Вероятность достижения молекулой заданной скорости.** Вероятность достижения молекулой скорости v пропорциональна функции $f(v) = 4\pi\left(\dfrac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot \exp\left(-\dfrac{mv^2}{2k_B T}\right)$, где m – масса молекулы, k_B – постоянная Больцмана, T – температура по Кельвину. Найдите наиболее вероятную скорость молекул азота при T=298 K.

8. **Скорость окисления**. Газовая смесь состоит из окиси азота (NO) и кислорода O_2. Найти концентрацию кислорода, при которой содержащаяся в смеси окись азота окисляется с максимальной скоростью в условиях необратимости реакции.

9. **Направление наибольшего роста функции**. Найти направление наибольшего роста потенциала электростатического поля, созданного точечными зарядами величины 1 и -2, расположенными в точках (0,1,-1) и (-2,1,0), из точки (3,-3,1).

10. **Задача линейного программирования на максимизацию массы рыб**. В большом аквариуме обитает 2 вида рыб: n рыб первого вида со средней массой 0,7 кг и m рыб второго вида со средней массой 0,9 кг. Для выживания рыбе первого вида требуется 1 единица объема криля и 1 единица объема мотыля в день, а для выживания рыбы второго вида требуется 2 единицы объема криля и 0,8 объема мотыля в день. Если доступный ежедневный объем криля 700 единиц, а мотыля – 1000 единиц, то как следует заселить аквариум для того, чтобы общая масса рыб в аквариуме была максимальной?

11. **Задача линейного программирования на минимизацию стоимости корма**. В трех видах корма для скота присутствуют только белки и углеводы. Корм 1 стоит 11 тыс.р./т., корм 2 стоит 8 тыс. р./т., корм 3 стоит 6 тыс.р./т. Корм 1 состоит на 60% из углеводов, корм 2 состоит на 80% из углеводов, корм 3 состоит на 85% из углеводов. В каких пропорциях следует покупать корма, чтобы ежедневное потребление корма, содержало 2 части углеводов и 1 часть белков, и затраты на корм были минимальны?

Задачи на интегрирование (направления Биология, Химия, Геология, Гидрометеорология, Нефтегазовое дело)

1. **Задача о расширении газа**. При обратимом расширении газа от объема V_1 до объема V_2 он производит внешнюю работу, вычисляемую по формуле $W=\int_{V_1}^{V_2} PdV$, где P – давление. Используя уравнение состояния неидеального газа $(P+\frac{n^2a}{V^2})(V-nb)=nRT$, где V –объем, n – количество газа в молях, T – температура по Кельвину, a и b – константы, R – постоянная идеального газа (8.3145 J/K mol^{-1}). Подсчитайте затраченную внешнюю работу при расширении 1000 моль газа при постоянной температуре от объема V_1 до объема V_2.

2. **Работа электростатического поля вдоль заданной кривой**. Пусть в верхнем полупространстве $z>0$ задан вектор напряженности электростатического поля с координатами $\vec{E}(x,y,z)=(\frac{x}{(1+z)^2},\frac{y}{(1+z)^2},\frac{z}{(1+z)^2})$. Сосчитать работу поля по

перемещению единичного заряда по спирали $L = (\cos t, \sin t, 2t)$ при изменении параметра t от 0 до 2π.

3. **Расход жидкости, истекающей из источника**. Пусть в пространстве вне точки O с координатами (0,0,0) задан вектор скорости течения жидкости $\vec{V}(x,y,z) = (\frac{a\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{a\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{a\cdot z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$. Сосчитать массу жидкости, протекающей через сферу радиуса 1 с центром в точке O за единицу времени.

4. **Циркуляция воздушных масс**. Сосчитать циркуляцию воздушных масс вдоль окружности получаемой сечением сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ плоскостью $y = x\cdot \mathrm{tg}\alpha$ при заданном векторе скорости ветра $\vec{V}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$.

Дифференциальные уравнения (направления Геология, Нефтегазовое дело, Биология, Химия)

1. **Задача об изменении концентрации раствора**. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Какая концентрация соли в баке будет через час?

2. **Задача о повторном переливании раствора**. Солевой раствор вытекает из одного сосуда со скоростью, пропорциональной объему раствора в первом сосуде, во второй сосуд, откуда он вытекает с постоянной скоростью. Обозначая $V_1(t)$ и $V_2(t)$ объемы раствора в первом и втором сосудах, получим $V_1' = -aV_1$ и $V_2' = aV_1 - b$. Предполагая, что $b/a < V_1(0)$, найдите максимальный объем раствора во втором сосуде.

3. **Задача о кондиционировании**. В комнате объемом 200 $м^3$ содержится 15% углекислого газа CO_2. Кондиционер подает в минуту 20 $м^3$ воздуха, содержащего 0,04% CO_2. Через какое время содержание углекислого газа будет равно 6%?

4. **Охлаждение тела в окружающей среде**. Пользуясь законом Ньютона об охлаждении (нагревании) тела в окружающей среде, сосчитать, когда тело, имевшее температуру 100^0 С и помещенное в окружающую среду с постоянной температурой 20^0 С, охладится до температуры 40^0 С, если через 20 минут оно охладилось до температуры 85^0 С.

5. **Радиоактивный распад**. Используя закон радиоактивного распада, (скорость распада пропорциональна количеству нераспавшегося вещества), найти через сколько дней останется 1% нераспавшегося вещества, если за 30 дней количество нераспавшегося вещества уменьшилось вдвое.

6. **Ядерный заряд в боевой ракете**. Ядерный заряд, находящийся в боевой ракете, содержит два куска $^{239}\mathrm{Pu}$ массой 8 кг и 7,5 кг. Период полураспада этого изотопа – 24100 лет. Критическая масса – 11 кг. Какое время должно пройти, чтобы запуск ракеты не привел к ядерному взрыву?

7. **Задача о химической реакции**. Два жидких химических вещества первоначальным объемом первое --- 10 л, второе --- 20 л, вследствие химической реакции образуют третье химическое вещество. Считая, что из каждых двух объемов первого вещества и одного объема второго вещества образуется три объема третьего вещества, определить, сколько третьего вещества образовалось через 10 минут после начала реакции, если через 20 минут его образовалось 6 л. Использовать закон действующих масс: скорость реакции пропорциональна произведению концентраций веществ участвующих в реакции.

8. **Задача об электрических цепях**. В электрическую цепь последовательно включены: источник тока с меняющимся по закону $E = V\sin\omega t$ напряжением, сопротивление *R*, катушка самоиндукции *L* и конденсатор емкостью *C*. Найти *I(t)* – переменную силу тока в цепи, если известны следующие законы электрической цепи: падение напряжения на сопротивлении равно RI, падение напряжения на катушке равно $L\frac{dI}{dt}$, падение напряжения на конденсаторе равно $\frac{q}{C}$, где *q* – заряд конденсатора, связанный с силой тока формулой $I = \frac{dq}{dt}$.

9. **Задача о распространении эпидемии**. Считая, что скорость роста числа инфицированных в любой момент пропорциональна как количеству инфицированных, так и количеству восприимчивых к инфекции, но еще не инфицированных к этому моменту, сосчитайте количество инфицированных в городе Н. на 10-й день после обнаружения инфекции, если в первый день количество инфицированных в городе было 3, на 7-й день 105 человек, а количество не привитых горожан (восприимчивых к инфекции) составляет 500 человек.

10. **Распространение эпидемии при увеличивающейся популяции.** Количество особей в популяции искусственно поддерживается с ростом времени по закону $100t$. В эту популяцию занесена инфекционная болезнь. Скорость роста числа больных и переболевших к моменту времени пропорциональна числу не болевших к тому же моменту. Найти зависимость суммы числа больных и переболевших от времени, если в момент $t=2$ все были здоровы, а в момент $t=3$ было уже 3 заразившихся.

11. **Изменение популяции рыб в водоеме**. С помощью логистического уравнения найдите количество рыб в замкнутом водоеме через 200 дней после запуска в него 100 особей, если оптимальное количество особей для данного водоема – 300 особей, а через 100 дней в водоеме находилось 120 особей.

12. **Изменение популяции при отлове рыб в водоеме**. Найдите количество рыб в замкнутом водоеме через 200 дней после запуска в него 400 особей, если оптимальное количество особей для данного водоема – 300 особей, ежедневная квота отлова рыб в водоеме – 2 рыбины, а через 70 дней в водоеме находилось 360 особей.

13. **Рост дерева**. Благодаря балансу между затратой энергии, необходимой для роста дерева, и получением энергии благодаря фотосинтезу составлено дифференциальное уравнение для описания роста дерева в зависимости от времени ($x(t)$): $x'(t)=a-b\cdot x^2(t)$, где a>0, b>0. Решить это уравнение при начальном условии $x(0)=0$ и составить график решения.

14. **Локальная модель химической реакции**. Логистическое дифференциальное уравнение для плотности молекул вещества $x(t)$, изменяющейся во время химической реакции (локальная модель, без

учета диффузии) имеет вид $x'(t)=r\cdot x(t)(1-\frac{x(t)}{K})$, где K и r – постоянные. Решите уравнение со значениями $x(0)$ для случаев $x(0)>K$ и $x(0)<K$.

15. **Локальная модель химической реакции при постоянной суммарной концентрации**. Дифференциальное уравнение для плотности молекул вещества $x(t)$, изменяющейся во время химической реакции при взаимодействии с другим веществом, когда суммарная плотность двух веществ постоянна, имеет вид $x'(t)=a-x(t)+b\cdot x(t)(1-x(t))$. Решите это уравнение с произвольной начальной плотностью $x(0)$ при a=0.

16. **Химическая реакция взаимного превращения**. В некоторой химической реакции вещество x преобразуется в вещество y со скоростью, пропорциональной количеству x. В то же время образовавшееся вещество y посредством обратной реакции переходит в вещество x со скоростью, пропорциональной количеству y. Химический анализ дал следующие результаты в зависимости от времени:

t	0	3	∞
x	12	6	5,5
y	0	6	6,5

Найти зависимость x и y от времени t.

17. **Предельный цикл концентрационных автоколебаний в химических реакциях**. Найти предельный цикл концентрационных автоколебаний, заданных динамической системой

$$\begin{cases} \dot{x}=-y+y_0+(x-x_0)(R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2), \\ \dot{y}=x-x_0+(y-y_0)(R^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2). \end{cases}$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ – значения концентраций каждого из веществ, участвующих в реакции, в зависимости от времени.

18. **Движение в среде с сопротивлением**. Тело движется сквозь жидкость вдоль оси Ох. Сила сопротивления движению равна $F_x=-\xi v_x$, где v_x– скорость, ξ– константа. Найти закон движения $x(t)$ тела вдоль оси Ох, если начальная скорость известна (v_0) и в начальный момент тело находилось в нулевой точке.

19. **Движение под действием силы**. Частица массой m движется прямолинейно под действием возрастающей со временем силы $F(t) = F_0(1 - e^{-bt})$, где F_0 и b – константы. Найти закон движения частицы, если ее начальная скорость нулевая и в начальный момент частица находилась в нулевой точке.

20. **Определение перепада высот по барометру**. Пользуясь фактом уменьшения давления при увеличении высоты и законом Бойля-Мариотта, выведите формулу, позволяющую судить по изменению давления об изменении высоты над уровнем моря.

21. **Концентрация бактерий**. Бактерии, служащие пищей для популяции простейших, поступают в среду обитания простейших с постоянной скоростью ω и потребляются простейшими со скоростью, пропорциональной квадрату концентрации бактерий. Найдите критический момент концентрации бактерий, выразив его через начальную концентрацию бактерий.

22. **Равновесная популяция**. Равновесный размер популяции некоторого вида в заданной среде оценивается как 1000 особей. Численность популяции $x(t)$ (время в годах) испытывает флуктуации и описывается дифференциальным уравнением $x''(t) = 4\pi^2[1000 - x(t)]$. Найти график функции $x(t)$, если $x(0) = 1500$ особей.

23. **Взаимодействие «хищник-жертва»**. Обозначая зависимость от времени количества особей вида-хищника $x(t)$, а количество особей вида-жертвы $y(t)$, предположим, что популяции данных видов описываются системой уравнений $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = -x(t) + y(t). \end{cases}$ Найдите графики зависимостей количества особей обоих видов от времени, если $x(0) = y(0) = 1000$.

24. **Задача о редком инфекционном заболевании**. С момента занесения в среду обитания 1000 особей редкого заболевания члены сообщества подразделяются на три группы: болеющих ($x(t)$), восприимчивых к заболеванию и контактировавших с заболевшими ($y(t)$) и остальных – умерших, изолированных и переболевших ($z(t)$). Модель

распространения заболевания в среде регулируется системой уравнений $\begin{cases} x'(t) = -\beta x(0) y(t), \\ y'(t) = \beta x(0) y(t) - \gamma y(t), \\ z'(t) = \gamma y(t). \end{cases}$

Найдите решение этой системы при заданных начальных условиях $x(0)=10$, $y(0)=800$, $z(0)=190$. Покажите, что если $\beta x(0) < \gamma$, заболевание не приводит к эпидемии.

25. **Задача о росте популяции**. Популяция некоторого вида в момент времени t содержит $x(t)$ самцов и $y(t)$ самок. Математическая модель роста популяции представляет собой систему уравнений $\begin{cases} x'(t) = -a \cdot x(t) + b \cdot y(t), \\ y'(t) = c \cdot y(t), \end{cases}$

   где a, b, c – положительные константы. Выразить зависимость решения от начальных данных.

26. **Силовые линии плоского векторного поля**. С помощью компьютерной графики найти проходящую через точку (3,1) силовую линию плоского электростатического поля, созданного двумя равномерно заряженными прямыми с линейными плотностями зарядов 1 и -2, проходящими перпендикулярно плоскости XOY через точки (0,1) и (-2,0).

27. **Разогрев металла**. Кусок металла с температурой a градусов помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a градусов до b градусов. При разности температур печи и металла в T градусов металл нагревается со скоростью kT градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

Уравнения в частных производных (направление Геология, профиль Геофизика)

1. Найти распределение электрического напряжения для электрической линии без искажений длины l с изолированными концами, если напряжение в начальный момент распределено по закону $U(x,0) = \frac{x}{2}(l - x)$, а ток в начальный момент отсутствует.

2. Решить задачу об остывании однородного стержня длины l с теплоизолированным концом $x=0$, если его второй конец поддерживается при нулевой температуре, начальная температура равна $U(x,0)=x(l-x)$.

3. Найти силу тока в электрической линии длины l без потерь при условии, что начальный ток имеет вид $y=x^2(l-x)$, а начальное напряжение равно $x(l-x)$, сила тока на концах линии постоянна.

4. Решить уравнение Лапласа для функции $U(x,y)$ (потенциал электростатического поля) в круге радиуса R с центром в нуле, если известны граничные значения $U(R\cos\phi, R\sin\phi)=\begin{cases}\phi+\pi, \phi\in[-\pi,0],\\ \pi-\phi, \phi\in[0,\pi].\end{cases}$

5. Найти симметричные колебания $U(x,y)$ круговой мембраны радиуса R с центром в нуле, закрепленной вдоль границы, если начальные смещения равны $3J_0(\lambda_5\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R})-J_0(\lambda_7\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R})$, а начальные скорости равны $2J_0(\lambda_3\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R})-4J_0(\lambda_8\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R})$, где λ_k – k-й корень функции Бесселя $J_0(x)$.

6. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x,y)$ в прямоугольнике $0\le x\le a, 0\le y\le b$, если вдоль стороны $0\le x\le a,\ y=0$ потенциал равен $5\sin\frac{\pi x}{a}$, а три остальные стороны заземлены.

7. Пусть электрическая линия длины l без потерь накоротко замкнута на конце $x=l$. До начального момента напряжение и ток в цепи отсутствовали, в начальный момент в конце $x=0$ включается источник переменного тока с ЭДС $E\sin\omega t$. Найти $u(x,t)$ при $t>0$.

8. Для осуществления электроразведки требуется найти решение задачи Дирихле для внешности сферы радиуса R, если искомая функция u зависит только от расстояния переменной точки до центра сферы r и от ψ – угла, который радиус-вектор переменной точки, направленный из центра сферы, образует с направлением от центра сферы к «северному полюсу». Решение

должно обращаться в ноль в бесконечно удаленной точке и принимать значения $P_n(\cos\psi)$, где $P_n(t)$– полином Лежандра *n*-й степени, на поверхности сферы.

9. Найти температуру $U(x,y)$ круглой пластинки с центром в нуле радиуса *R*, зависящую только от расстояния точки от центра, если на границе поддерживается постоянная температура *T*, а начальная температура равна $3J_0(\lambda_4 \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}) - 8J_0(\lambda_7 \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}) + T$, где λ_k – k-й корень функции Бесселя $J_0(x)$.

10. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(r,\varphi)$ в кольце $r_1 \le r \le r_2$, если вдоль внешней границы кольца потенциал равен $U_0 \cos\varphi$, а внутренняя окружность изолирована.

11. Сфера радиуса *R* содержит растворенное вещество с начальной постоянной концентрацией C_0. Концентрация на поверхности сферы поддерживается постоянной, равной C_1, ($C_1 > C_0$). Найти количество абсорбированного вещества в момент времени $t > 0$.

Задачи для направления Социология

1. Государство решило перечислить в течение двух лет в только что созданное предприятие и расширение его производства денежную сумму в 10 условных единиц. При этом оно должно выбрать одну из непрерывных схем финансирования: *u(t)=5t* или *u(t)=10-5t.*

Какую из двух схем инвестирования должно выбрать государство, чтобы предприятие выпустило больший объем продукции, учитывая, что объем *y(t)* выпускаемой продукции описывается уравнением *y'+ky=u(t),* где *k* – постоянный коэффициент износа оборудования, *y(0)=0.*

2. Для обеспечения пищей одного человека необходима площадь 0.1 га. На земном шаре 4000 млн. га пахотной земли. Когда будет достигнут предел насыщения населения, если оно растет непрерывно со скоростью 1.8% в год, а в 2000 г. численность населения равнялась 6 млрд. человек.

3. Предприятие производит три вида товаров, цены на эти товары P1=7, P2=8, P3=9. Функция затрат на производство $F=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz$, где x, y, z – количество произведенного товара. Требуется определить количество товара, которое следует производить предприятию для получения наибольшей прибыли.

4. Урожайность кукурузы зависит от затрат на удобрения x и затрат на семена y по формуле $F=16\,x^{0.4}y^{0.1}$. Определить, при каких значениях x и y урожайность достигнет наибольшего значения, если суммарные затрата на приобретение удобрений и семян x+y=2.

5. Потребление энергии в городе в течение года описывается уравнением $W = b + c\cos(2\pi t)$, где t изменяется в течение года от 0 до 1. Определить суммарное потребление энергии городом за 1) за весь год 2) месяц январь 3) три весенних месяца.

6. Учитывая следующую таблицу,

	Площадь (млн. км^2)	Население (сот. млн.)	ВВП (трил. $)
Россия	17	1.5	2
США	9	3	17
Китай	9	13	9
Бразилия	8	2	2.5

найти две самых похожих страны, используя евклидову метрику.

7. Рассмотрите следующую таблицу:

Сфера занятости	Года				
	1	2	3	4	5
Работающие по найму	5.7	4.3	4.8	4.8	4.7
Горнодобывающая промышленность	9.7	5.4	3.1	2.9	2.9
Перерабатывающая промышленность	6.2	4.0	5.6	4.3	5.7
Строительство	13.5	10.1	9.7	8.8	10.6
Торговля	2.4	2.3	2.8	2.7	3.1

В таблице приведен процент безработицы в пяти сферах занятости за 5 лет. Найдите:

1) Средний процент по каждой сфере
2) Средний процент на каждый год
3) Общее среднее
4) Стандартное отклонение какой-нибудь строки и какого-нибудь столбца.

8. В таблице приведены данные по трем характеристикам автомобилей.

Автомобили	Цена	Расход	Мощность
Logan	370	10	80
Getz	450	7	100
Prius	1100	4	100
Lancer	1300	13	240

1) Нормализовать данные по столбцам.

2) Составить матрицы различий между автомобилями, используя евклидову метрику и метрику «города».

9. В таблице приведены меры различий между четырьмя товарами.

N товара	1	2	3	4
1	0	15	32	7
2		0	40	10
3			0	40
4				0

1) Заполните нижнюю часть таблицы, используя аксиому симметрии.
2) Проверьте выполнение неравенства треугольника для данных товаров.

10. Пусть x – рыночная цена за единицу продукции. Спрос описывается уравнением D = 400–x, а предложение – уравнением S = 100 + 2x. Правительство решило ввести налог на производителей в размере 15$ за единицу продукции.

Определите:

1) как изменятся равновесные цена и объем продукции;
2) каков доход государства от введения этого налога;
3) в какой степени пострадают от введения этого налога потребители.

11. Пусть $x(t)$ – процент покупателей, информированных об некоторой рекламной продукции. Эта функция удовлетворяет уравнению

$x'=kx(100-x)$

1) найдите коэффициент пропорциональности k, если известно, что $x(0)=10, x(1)=20$
2) найдите процент информированных покупателей в моменты времени $t=2,5, 10$.

12.Пусть *p(t)* – цена на товар в момент времени *t*. Спрос D и предложение S определяются соотношениями: $D=4p'-2p+39$, $S=44p'+2p-1$.

1) Составьте дифференциальное уравнение для нахождения рыночной цены на товар.
2) Решите найденное уравнение при начальном условии $p(0)=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва. Изд. «Наука», 1973.
2. Ю.И. Гильдерман. Лекции по высшей математике для биологов. Новосибирск, 1974.
3. М.М. Смирнов. Задачи по уравнениям математической физики. Москва. Изд. «Наука», 1975.
4. Р.М. Константинов. Математические методы количественного прогноза рудоносности. Москва. Изд. «Недра», 1979.
5. С. Гроссман, Дж. Тернер. Математика для биологов. Москва. Изд. «Высшая школа», 1983.
6. А.А. Гусак. Задачи и упражнения по высшей математике (в двух частях). Минск. Изд. «Вышэйшая школа», 1988.
7. Дейвисон М. Многомерное шкалирование. М.: Финансы и статистика, 1988.
8. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов: Учеб. пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
9. В.В. Еремин. Теоретическая и математическая химия. Москва. Изд МЦНМО, 2007.
10. R.G. Mortimer. Solutions Manual for Mathematics for Physical Chemistry. Elsevier, 2008.