А.Р. Ганеева

# Методы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми

В заданиях ЕГЭ по математике в последние годы появляются задачи на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми. В данной статье на примере одной задачи рассмотрены различные методы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми. Для решения различных задач можно использовать наиболее подходящий метод. Решив задачу одним методом, другим методом можно проверить правильность полученного результата.

Напомним следующие определения из школьных учебников.

Две прямые называются ***скрещивающимися***, если они не лежат в одной плоскости [1].

Понятие расстояния между скрещивающимися прямыми – это частный случай понятия расстояния между фигурами.

Точки $A_1$ и $A_2$ фигур $F_1$ и $F_2$ называются их ***ближайшими точками***, если для любых точек $X_1 \in F_1$ и $X_2 \in F_2$ выполняется неравенство $A_1A_2 \le X_1X_2$. ***Расстоянием между двумя фигурами*** называется расстояние между ближайшими точками этих фигур (если такие точки есть) [2].

**Опр.1.** Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между ближайшими точками этих прямых.

**Опр.2.** Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

**Опр.3**. Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от одной из скрещивающихся прямых до параллельной плоскости, проходящей через другую прямую.

**Опр.4**. Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между параллельными плоскостями, в которых находятся скрещивающиеся прямые.

**Опр.5.** Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между их проекциями на плоскость, которая перпендикулярна одной из этих прямых.

Все эти определения равносильны (эквивалентны).

В центре нашего внимания будет следующая

**Задача.** Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной равной 4. Высота призмы равна $2\sqrt{2}$. Найдите расстояние $\rho(DA_1, CD_1)$ между прямыми $DA_1$ и $CD_1$ (рис.1).

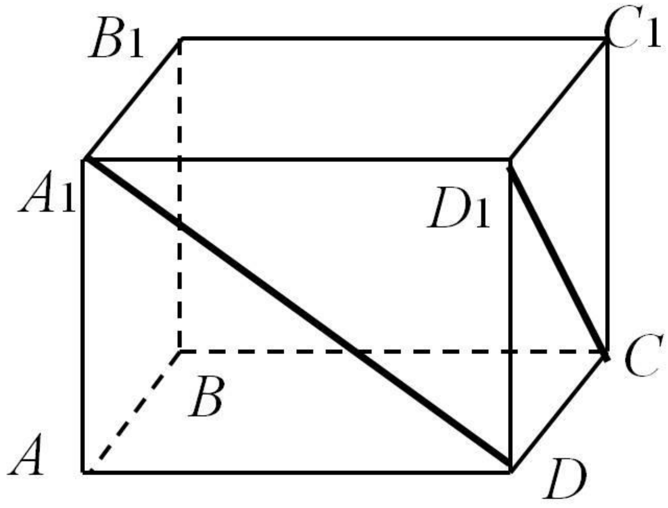


Рис. 1

Решим эту задачу различными способами.

**1. Нахождение расстояния согласно определению 3.**

Прямая $CD_1$ лежит в плоскости $CB_1D_1$, $DA_1 || CB_1$, следовательно, прямая $DA_1$ параллельна плоскости $CB_1D_1$. Найдем расстояние между ними, – оно и является ответом на вопрос задачи. В частности, это расстояние равно расстоянию от точки $A_1$ до плоскости $CB_1D_1$ (рис. 2). Найдем его.

Прямая $B_1D_1$ перпендикулярна плоскости $ACC_1$. Следовательно, плоскость $ACC_1$ перпендикулярна плоскости $CB_1D_1$ и пересекаются они по прямой $O_1C$, где $O$ и $O_1$ – центры нижнего и верхнего оснований призмы.

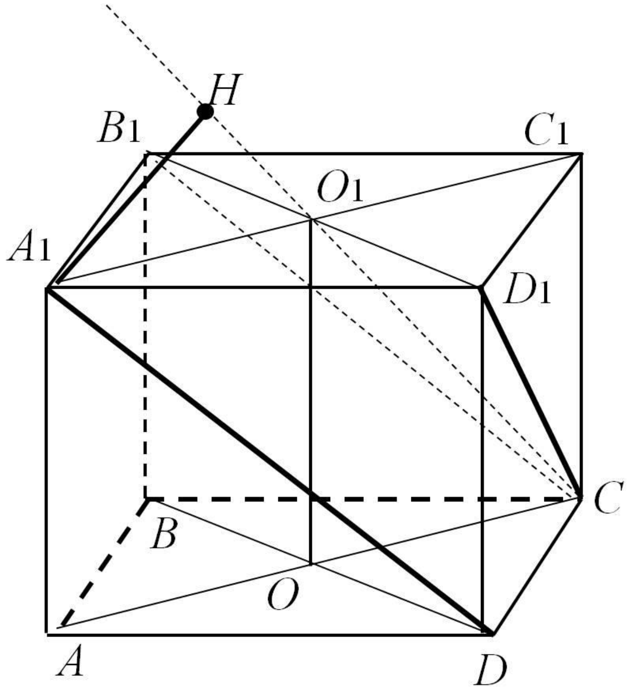


Рис. 2

В плоскости $ACC_1$ из точки $A_1$ опустим перпендикуляр $A_1H$ на прямую $CO_1$. $A_1H \perp CO_1$. Длина отрезка $A_1H$ и есть расстояние $\rho(DA_1, CD_1)$ между прямыми $DA_1$ и $CD_1$ (рис.2).

В завершение из прямоугольного треугольника $A_1HO_1$, зная гипотенузу $A_1O_1 = 2\sqrt{2}$ и $\sin\angle HO_1A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, находим катет $HA_1 = A_1O_1 \cdot \sin\angle HO_1A_1 = 2.$

Ответ: $\rho(DA_1, CD_1) = 2$.

**2. Нахождение расстояния согласно определению 4.**

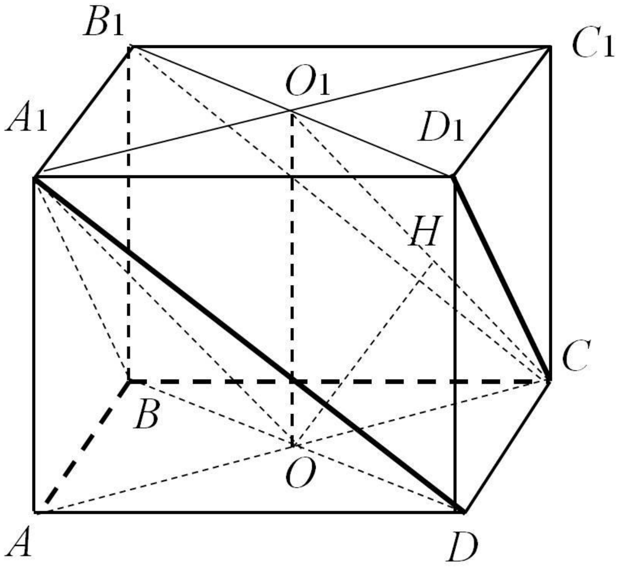


*Рис*. 3

Данные прямые $A_1D$ и $CD_1$ лежат в параллельных плоскостях $BDA_1$ и $CB_1D_1$ (см. рис. 3):

$$DA_1 \parallel CB_1,\ CD_1 \parallel BA_1 \Rightarrow (BDA_1) \parallel (CB_1D_1)$$

Расстояние между этими плоскостями равно, в частности, расстоянию от точки $O$ ($O=AC\cap BD$) плоскости $BDA_1$ до плоскости $CB_1D_1$.

$$\rho(A_1D, CD_1) = \rho(O, (CD_1B_1))$$

Плоскости $OCO_1$ и $CB_1D_1$ перпендикулярны и пересекаются по прямой $CO_1$.

$$OH \perp CO_1 \Rightarrow OH \perp (CB_1D_1),$$

Длина отрезка $OH$ и есть расстояние $\rho(DA_1, CD_1)$ между прямыми $DA_1$ и $CD_1$ (рис.2).

$$BD = AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},\ AO = 2\sqrt{2}.$$

Из прямоугольного треугольника $OAA_1$ находим

$$A_1O = CO_1 = \sqrt{AA_1^2 + AO^2} = \sqrt{4\cdot 2 + 4\cdot 2} = 4$$

Из подобия прямоугольных треугольников $OHO_1$ и $COO_1$ следует, что

$$\frac{OH}{CO} = \frac{OO_1}{CO_1},$$

отсюда

$$\rho(A_1D, CD_1) = OH = \frac{OO_1\cdot CO}{CO_1} = \frac{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{4} = 2.$$

3. ***Метод объемов*** *(использование вспомогательной пирамиды). Здесь рассматривается пирамида, высота которой является искомым расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми. Для нахождения же высоты следует найти объём этой пирамиды двумя способами, и затем найти эту высоту.*

*Отметим, что при данном методе нет необходимости в проведении общего перпендикуляра к данным скрещивающимся прямым.*

Применим этот метод. Так как $DA_1 \parallel CB_1$ и $CD_1 \parallel BA_1$, то $(BDA_1) \parallel (CB_1D_1)$ (рис. 3). Расстояние между этими плоскостями равно расстоянию от точки $C$ до плоскости $A_1BD$.

Рассмотрим пирамиду $BCDA_1$. Пусть в ней $h$ – это высота, проведенная из вершины $C$ на основание $BDA_1$.

Длина высоты $h$ равна расстоянию $\rho(DA_1, CD_1)$ между прямыми $DA_1$ и $CD_1$.

$$BD = AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2},\ AO = 2\sqrt{2}.$$

Из прямоугольного треугольника $OAA_1$ находим

$$A_1O = CO_1 = \sqrt{AA_1^2 + AO^2} = \sqrt{4\cdot 2 + 4\cdot 2} = 4$$

Найдем объем пирамиды $CA_1BD$ с основанием $A_1BD$ и высотой $h$:

$$V_{CA_1BD} = \frac{1}{3}S_{A_1BD}\cdot h =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}A_1O\cdot BD\cdot h = \frac{4\cdot 4\sqrt{2}}{6}h = \frac{8\sqrt{2}}{3}h,$$

ЗПТ в конце убрать.

Вычислим объем той же пирамиды $CA_1BD$ по-другому, считая теперь основанием $BCD$ и высотой $AA_1$:

$$V_{CA_1BD} = \frac{1}{3}S_{BCD}\cdot AA_1 = \frac{1}{3}\frac{1}{2}16\cdot 2\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

Приравняем два выражения для объема пирамиды

$$\frac{8\sqrt{2}}{3}h = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

и найдем расстояние $\rho(DA_1, CD_1)$ между прямыми $DA_1$ и $CD_1$ (рис.3).

$$\rho\left(A_1D, CD_1\right) = h = 2.$$

4. ***Метод ортогонального проектирования.***

Следуя определению 5, опишем алгоритм решения задачи данным методом.

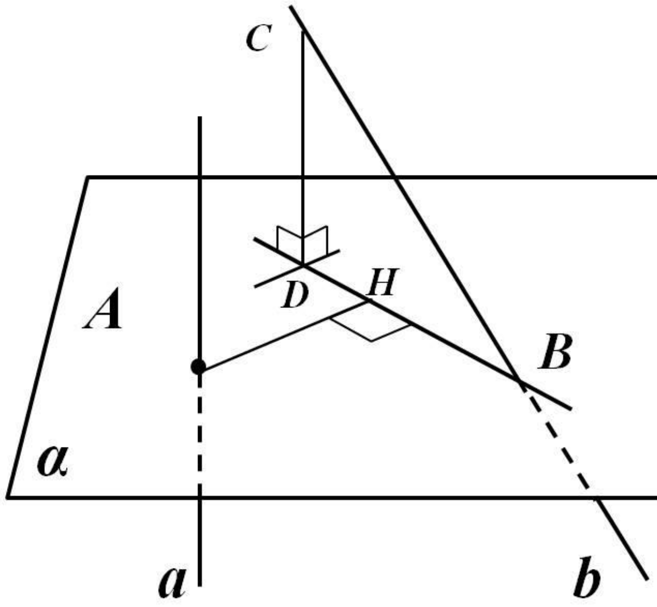


Рис. 4

1. Строим плоскость $\alpha$, перпендикулярную прямой $a$; точку $A$ – точка их пересечения (рис. 4).

2. Строим ортогональную проекцию $BD$ второй прямой $b$ на эту плоскость.

3. Находим расстояние от точки $A$ до этой проекции – длину перпендикуляра $AH$. Длина отрезка $AH$ равна расстоянием между скрещивающимися прямыми $a$ и $b$.

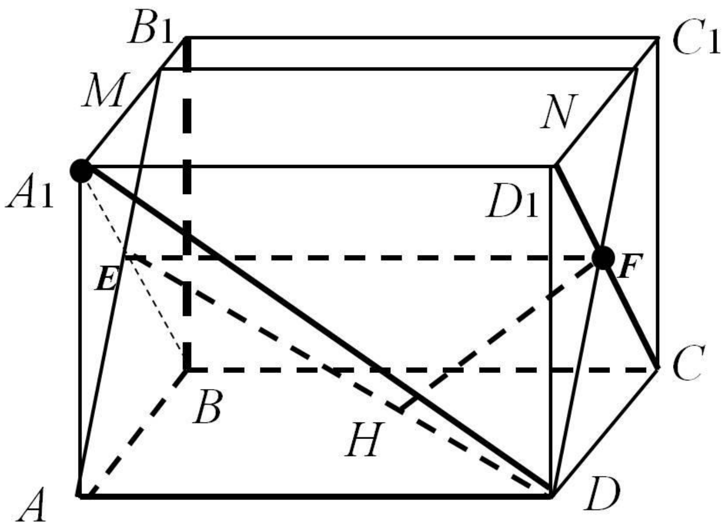


Рис. 5

Пусть точка $F$ O$[CD_1]$, $DF$ ^ $CD_1$, а точка $E$ O$[BA_1]$, $AE$ ^ $BA_1$. (рис. 5).

$$AE \text{ З } A_1B_1 = M,\ DF \text{ З } C_1D_1 = N$$

Проведем плоскость $ADN$. Она перпендикулярна прямой $CN$. Точка $F$ – проекция прямой $CN$ на проведенную плоскость. Далее спроектируем на плоскость $ADN$ прямую $DA_1$, её проекция - прямая $DE$.

Расстояние $\rho(DA_1, CD_1)$ между прямыми $DA_1$ и $CD_1$ после проекции перешло в расстояние $\rho(DE,F)$ между прямой $DE$ и точкой $F$ на плоскости $ADF$ (рис. 6).

$$\rho(DA_1,CD_1)=\rho(DE,F)$$

Чтобы найти расстояние $\rho(DE,F)$, опустим из точки $F$ перпендикуляр на прямую $ED$. $FH \perp ED$.

Длина отрезка $FH$ и есть расстояние $\rho(DA_1, CD_1)$ между прямыми $DA_1$ и $CD_1$ (рис. 5 и 6).

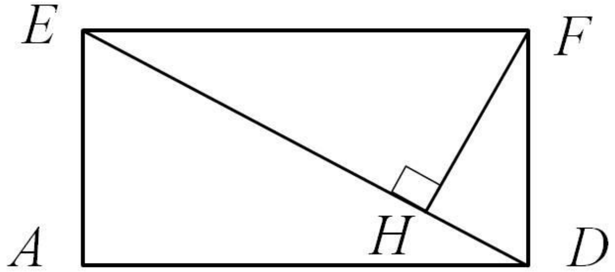


Рис. 6

Из прямоугольного треугольника $CDD_1$ найдем $CD_1$, используя теорему Пифагора (см. рис. 5):

$$CD_1 = \sqrt{DD_1^2 + CD^2} =$$
$$= \sqrt{4 \cdot 2 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Из подобия прямоугольных треугольников $CFD$ и $CDD_1$ (см. рис. 5) следует, что

$$\frac{CD}{CD_1} = \frac{DF}{DD_1}$$

$$DF = \frac{DD_1 \cdot CD}{CD_1} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4}{2\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Из прямоугольного треугольника $DEF$ найдем $DE$, используя теорему Пифагора (см. рис. 6)

$$ED = \sqrt{EF^2 + DF^2} = \sqrt{16 + \frac{16}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

$$FH = \frac{EF \cdot FD}{ED} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = 2.$$

Ответ: $\rho(DA_1, CD_1)=2$.

5. ***Метод координат***. Будем опираться на определение 3 и использовать координаты. Даны две скрещивающиеся прямые $d_1$ и $d_2$. Пусть известны координаты точки $M(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на прямой $d_1$. Пусть известно уравнение плоскости $\alpha$: $ax+by+cz+d=0$, которой параллельна первая прямая, и в которой лежит вторая прямая $d_2$. В этом случае для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми $d_1$ и $d_2$ можно применить известную формулу расстояния от точки $M$ до плоскости $\alpha$

$$r(M, a) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

В нашей задаче

$$CD_1 \parallel A_1B \Rightarrow CD_1 \parallel (A_1BD).$$

Следовательно,

$$\rho(CD_1, A_1D) = \rho(CD_1, A_1BD) = \rho(D_1, A_1BD)$$

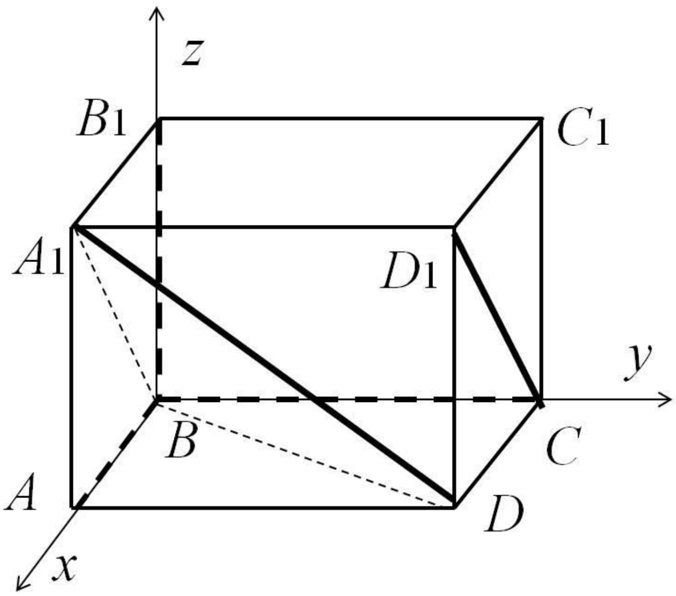


Рис. 7.

Введем систему координат (рис. 7). Начало координат поместим в точке $B$; оси координат $x$, $y$, $z$ направим по лучам $BA$, $BC$, $BB_1$ соответственно. Укажем координаты пяти точек:

$$B(0,0,0),\ A(4,0,0),\ C(0,4,0),\ D(4,4,0),\ A_1(4,0,2\sqrt{2}).$$

Найдем уравнение плоскости $ax+by+cz+d=0$, проходящей через точки $A_1$, $B$, $D$.

$$\begin{cases} a\cdot 4+b\cdot 0+c\cdot 2\sqrt{2}+d=0 \ (\text{для точки } A_1), \\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0+d=0 \ (\text{для точки } B), \\ a\cdot 4+b\cdot 4+c\cdot 0+d=0 \ (\text{для точки } D). \end{cases} \Leftrightarrow$$

отсюда

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+\sqrt{2}c=0, \\ d=0, \\ a+b=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-\sqrt{2}a, \\ d=0, \\ b=-a. \end{cases}$$

Итак,

$$ax-ay-\sqrt{2}az=0$$

Имеем, в частности, такое уравнение

$$x-y-\sqrt{2}z=0$$

Затем по формуле находим

$$\rho(D_1, A_1BD)=\frac{\left|1\cdot 4+(-1)\cdot 4+\left(-\sqrt{2}\right)2\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+1+2}}=\frac{4}{2}=2$$

Ответ: $\rho(DA_1, CD_1)=2$.

## Литература

1. Атанасян Л.С. Геометрия. Учебник для 10-11 классов \ Л.С. Атанасян и др. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.

2. Александров А.Д. Геометрия: учебник для 10-11 классов \ А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М. Просвещение, 2006 . – 240 с.

3. Корняков А.Н. Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников»: лекции 5-8 \ А.Н. Корняков, А.А. Прокофьев. – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2012. – 100 с.

4. Рыжик В.И. О расстоянии вообще и расстоянии между скрещивающимися прямыми в частности. Научно-популярный журнал «Математика для школьников», № 1, 2008.