

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

В.А. ТЮРИН, Б.П. БОЙКО

СПЕКТР СИГНАЛА

КАЗАНЬ 2023

Издается по решению

Учебно-методической комиссии института физики

протокол № 05 от 12 января 2023 г.

Авторы

Кандидат физ.-мат. наук, доцент В.А. Тюрин,

кандидат физ. мат. наук, доцент Б.П. Бойко

Рецензент

Кандидат физ.-мат. наук, доцент И.А. Насыров

Тюрин, В.А. Спектр сигнала: учебное пособие / В.А. Тюрин, Б.П. Бойко. – 2-е изд. – исправ. и доп. – Казань: Казанский федеральный университет, 2023. – 34 с.

Учебное пособие «Спектр сигнала» предназначено для самостоятельной подготовки студентов отделения «Радиофизика и информационные системы» Института физики по соответствующим разделам теоретического курса «Радиоэлектроника». Пособие будет полезно при работе в лабораториях кафедры радиофизики «Практикум по радиофизике и электронике», в частности, при выполнении лабораторной работы «Амплитудные спектры сигналов», а также в лаборатории «Статистическая радиофизика и цифровая обработка сигналов» при выполнении лабораторной работы «Теорема Котельникова». В пособии приводятся базовые положения спектрального анализа как аналоговых, так и дискретных сигналов. Обсуждается взаимосвязь спектров различных классов сигналов. Отмечается преимущество спектрального анализа перед временным анализом при синтезе линейных цепей с заданными частотными свойствами.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Спектр периодического сигнала	6
1.1. Спектральный анализ на основе тригонометрического ряда Фурье	7
1.2. Спектральный анализ на основе комплексного ряда Фурье	10
2. Спектральный анализ на основе интегрального преобразования Фурье	14
3. Спектр отклика линейной цепи	17
4. Энергетические соотношения	18
5. Ширина спектра сигнала	20
6. Связь непрерывного и дискретного спектров	22
7. Спектр дискретного сигнала	25
8. Спектр дискретного периодического сигнала	29
Литература	33
Приложение. Свойства спектра	34

ВВЕДЕНИЕ

Сигнал – это материальный носитель информации. В радиоэлектронике сигнал физически представлен электромагнитными величинами, например, такими как напряжение U , ток I , напряженность электрического поля \vec{E} , напряженность магнитного поля \vec{H} и другими. Для сигнала характерно изменение физической величины, представляющей его, со временем. Поэтому естественная математическая модель сигнала – это функция времени $S(t)$. Размерность $S(t)$ определяется размерностью соответствующей физической величины [1].

В радиоэлектронике широко используется другая математическая модель $F(\omega)$ – функция частоты, известная как *спектр* сигнала. Спектр и функция времени описывают один и тот же сигнал, следовательно, они взаимосвязаны. Полагая функцию времени $S(t)$ известной, рассмотрим, что означает понятие спектр.

Спектр сигнала существует, если сигнал $S(t)$ можно представить в виде суммы гармонических колебаний. Представление $S(t)$ в виде суммы гармонических колебаний называют *спектральным разложением Фурье*. Гармонические колебания представляют собой ортогональный базис. Ортогональность базиса – это условие единственности разложения [2]. Гармонический базис не единственный ортогональный базис. Известны ортогональные базисы, образованные функциями Уолша, функциями Котельникова и т.д. Далее будем рассматривать спектральное разложение только по гармоническому базису, поэтому определение «Фурье» упоминать не будем.

Гармоническое колебание, как функция времени, имеет вид:

$$S(t) = A \cos(2\pi ft + \Phi). \quad (\text{B.1})$$

Аргумент функции $(2\pi ft + \Phi) = \Theta, (\text{рад})$ называется текущей фазой. Колебание полностью определено, если известны три параметра: частота f , амплитуда A , начальная фаза Φ . Частота f является физическим параметром, размерность которого *герц [Гц]*. Все измерительные приборы, предназначенные для частотных измерений, градуируются в *герцах*. Амплитуда A может быть любой, но обязательно положительной величиной. Начальная фаза может быть любой в интервале $-\pi < \Phi < \pi$. При записи аналитических выражений обычно используется круговая частота ω , которая связана с частотой f линейной зависимостью

$$\omega = 2\pi f, (\text{рад/сек}). \quad (\text{B.2})$$

Круговая частота имеет смысл скорости изменения текущей фазы Θ , поскольку является ее производной. Далее определение “круговая” может отсутствовать, но точный смысл и размерность термина “частота” всегда будут понятны из контекста изложения.

В теории сигналов под энергией сигнала понимается величина

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt . \quad (\text{B.3})$$

В свою очередь, средняя мощность в общем виде определяется как

$$\langle P \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t) dt \quad (\text{B.4})$$

Если энергия сигнала E является бесконечной, а средняя мощность – конечная величина, то спектральное разложение сигнала $S(t)$ имеет вид ряда

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \Phi_n) . \quad (\text{B.5})$$

Если энергия сигнала E – конечная величина, спектральное разложение имеет интегральное представление

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos[\omega t + \Phi(\omega)] d\omega . \quad (\text{B.6})$$

В разложении (B.5) частота принимает дискретные значения ω_n . Множество амплитуд A_n и множество начальных фаз Φ_n гармонических колебаний представляют **дискретный спектр** сигнала $S(t)$.

В разложении (B.6) роль амплитуды играет дифференциал

$$dA = \frac{1}{\pi} F(\omega) d\omega . \quad (\text{B.7})$$

Сигнал $S(t)$, в данном случае, формируется суммой гармонических колебаний *всех частот*. Амплитуда (B.7) на фиксированной частоте ω бесконечно мала и её значение не определено, поскольку бесконечно малый интервал частот $d\omega$ не имеет конкретного значения. Однако сигнал (B.6) полностью определен, если известны *амплитудная спектральная плотность* $F(\omega)$ и начальная фаза $\Phi(\omega)$ как функции частоты. Функции $F(\omega)$ и $\Phi(\omega)$ представляют **непрерывный спектр** сигнала $S(t)$.

Подчеркивая общее свойство выражений (B.5) и (B.6), можно дать следующее определение:

***спектром сигнала** $S(t)$ называется множество амплитуд и начальных фаз гармонических колебаний кратных частот, сумма которых равна сигналу $S(t)$.*

Если множество частот гармонических колебаний дискретное, то спектр дискретный, если множество частот непрерывное, то и спектр непрерывный. Детализируя спектр, различают амплитудный и фазовый спектры.

- *Амплитудный спектр* – это множество амплитуд гармонических колебаний кратных частот. У непрерывного спектра характеристикой амплитудного спектра является амплитудная спектральная плотность $F(\omega)$, поскольку она определяет зависимость бесконечно малой амплитуды от частоты при фиксированном значении бесконечно малого интервала частот $d\omega$.
- *Фазовый спектр* – это множество начальных фаз гармонических колебаний кратных частот. У непрерывного спектра характеристикой фазового спектра является начальная фаза $\Phi(\omega)$.

Если спектр известен, то сигнал как функцию времени всегда можно получить с помощью выражений (В.5), (В.6).

На практике обычно возникает задача определения спектра сигнала, поскольку сам сигнал как функция времени известен. Эта задача известна как *спектральный анализ*. Аналоговый аппаратный спектральный анализ основан на узкополосной фильтрации. Теоретический анализ спектра базируется на соответствующих разделах математического анализа. В настоящее время, благодаря достижениям в компьютерных технологиях, практический спектральный анализ сигнала представляет численный расчет спектра за очень короткое время. Если время наблюдения сигнала $S(t)$ много больше времени вычисления спектра, то говорят о спектральном анализе в реальном масштабе времени [1].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Почему энергия периодического сигнала бесконечна?
2. Почему энергия одиночного сигнала конечна?
3. Что является гарантией единственности спектрального разложения?

1. СПЕКТР ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Сигнал $S(t)$ является периодическим, если существует интервал времени T , когда при любом t выполняется равенство

$$S(t) = S(t+T) \quad (1.1)$$

Минимальное положительное значение T называется *периодом* сигнала $S(t)$ и является параметром периодического сигнала. Условие периодичности в общем виде: $S(t) = S(t + nT)$, где n – любое целое число.

Выражение (В.1) в виде $S(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$ – наиболее употребительная форма записи гармонического во времени сигнала. Менее употребительная форма использует функцию синуса. Сигнал является периодическим с периодом

T вследствие периодичности тригонометрических функций $\cos\theta$, $\sin\theta$, период которых равен 2π . Чтобы выполнялось требование (1.1), круговая частота и период должны быть связаны соотношением [1]:

$$\omega T = 2\pi. \quad (1.2)$$

1.1 Спектральный анализ на основе тригонометрического ряда Фурье

Из математического анализа известно, что периодический сигнал можно представить в виде тригонометрического ряда Фурье:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t). \quad (1.3)$$

Параметр ω_1 (основная частота) выражается через известный период T сигнала (1.2):

$$\omega_1 = 2\pi/T. \quad (1.4)$$

Коэффициенты Фурье a_n , b_n могут быть найдены с использованием свойства ортогональности гармонического базиса

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T S(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_T S(t) \sin n\omega_1 t dt.$$

Интервал интегрирования по времени равен периоду T . Начальное значение интервала выбирается произвольно. Однако, чтобы исключить неопределенность, в радиоэлектронике используется интервал $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$. Отсюда общепринятые выражения для коэффициентов Фурье:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \sin n\omega_1 t dt. \quad (1.5)$$

В тригонометрическом ряду Фурье (1.3), традиционно используемом в математике, гармоническое колебание с частотой $n\omega_1$ представлено суммой квадратурных составляющих с коэффициентами a_n , b_n . Для того, чтобы коэффициенты при квадратурных составляющих выразить через амплитуду и начальную фазу

$$a = A \cos \Phi, \quad b = -A \sin \Phi, \quad (1.6)$$

необходимо воспользоваться тригонометрическим равенством:

$$A \cos(\omega t + \Phi) = A(\cos \Phi \cos \omega t - \sin \Phi \sin \omega t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t.$$

Из (1.6) можно получить выражения для амплитуды и фазы через коэффициенты при квадратурных составляющих:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \Phi_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}. \quad (1.7)$$

Выражения (1.7) позволяют найти амплитудный и фазовый спектры через коэффициенты Фурье. Теперь ряд Фурье можно записать в форме спектрального разложения (В.5)

$$S(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \Phi_n) \quad (1.8)$$

по гармоническим колебаниям кратных частот

$$\omega_n = n\omega_1, \quad (1.9)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Ненулевые частоты кратны основной частоте ω_1 . Гармоническое колебание на частоте $n\omega_1$ называют *n-ой гармоникой*. Частота первой гармоники равна основной частоте, поэтому обозначение основной частоты (1.4) имеет индекс 1. Частоте $\omega_0 = 0$ соответствует постоянная составляющая сигнала, которая находится интегрированием (1.3) или (1.8) на интервале периода и представляет среднее за период значение сигнала [1, 2]

$$\frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) dt. \quad (1.10)$$

В таблице 1.1, в качестве примера, представлены результаты спектрального анализа периодической последовательности прямоугольных импульсов. Функция $S(t)$, описывающая форму импульсов, выбрана четной со скважностью $q = 3$. Аналитический вид $S(t)$ получен при помощи единичной П-функции, образованной суперпозицией двух функций Хевисайда. Поскольку функция $S(t)$ – четная, то коэффициенты Фурье b_n будут равны нулю, а сам ряд будет образован нулевой гармоникой и косинусоидами с коэффициентами a_n . Графики амплитудного и фазового спектров являются графиками дискретных функций и в теории спектров называются спектральными диаграммами. Огибающая амплитуд гармоник амплитудного спектра есть модуль $\operatorname{sinc}(n\pi/q)$. Нули этой функции совпадают с номером гармоники, кратным скважности. Фазовый спектр будет определяться знаком функции $\operatorname{sinc}(n\pi/q)$ в соответствующем лепестке.

ВЫВОДЫ

- У периодического сигнала спектр существует и является дискретным.
- Частоты спектральных составляющих кратны основной частоте периодического сигнала.

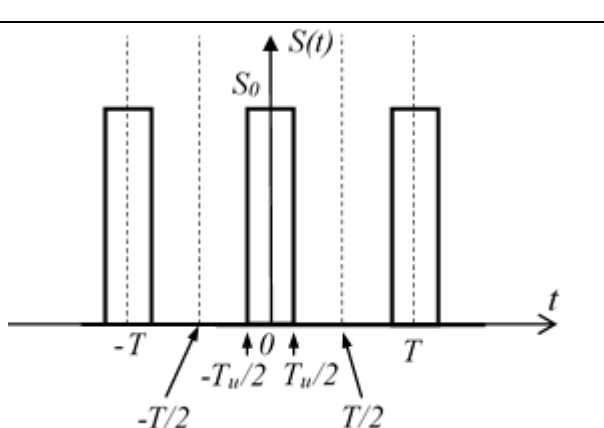
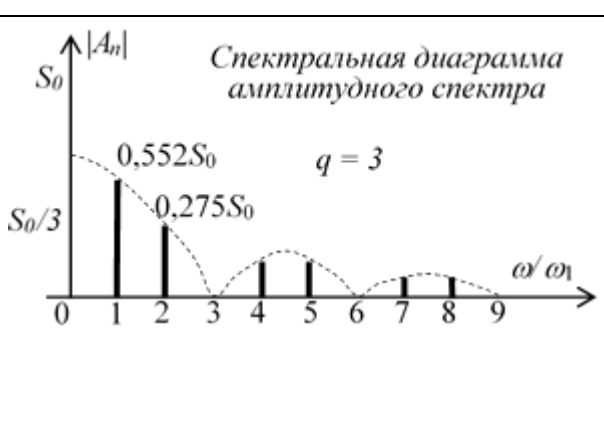

- Спектр периодического сигнала можно найти, используя выражения для коэффициентов тригонометрического ряда Фурье.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Какой физический смысл имеет нулевая гармоника?
2. Какой математический смысл имеет нулевая гармоника?
3. Что называют спектральной диаграммой?

Таблица 1.1.

Спектральный анализ последовательности прямоугольных импульсов.

Сигнал	
	$P(t) = \sigma(t + T_u/2) - \sigma(t - T_u/2)$ $P(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 \leq t \leq -T_u/2 \\ 1 & -T_u/2 \leq t \leq T_u/2 \\ 0 & T_u/2 \leq t \leq T/2 \end{cases}$ $S(t) = S_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} P(t-nT)$
Спектр	
	<p>Коэффициенты Фурье: $q = T/T_u$ – скважность; $n = \omega/\omega_1$. $a_0/2 = S_0/q$; $a_n = 2 \frac{S_0 \sin n\pi/q}{q n\pi/q}$; $b_n = 0$.</p> <p>Ряд Фурье: $S(t) = \frac{S_0}{q} + 2 \frac{S_0}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi/q}{n\pi/q} \cos n\omega_1 t$</p> <p>Амплитудный спектр: $A_n = \frac{S_0}{q} + 2 \frac{S_0}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ \sin n\pi/q }{n\pi/q}$</p>
	<p>Фазовый спектр: $\Phi(n) = -\pi[n/q]$</p>

1.2. Спектральный анализ на основе комплексного ряда Фурье

Формула Эйлера связывает действительные тригонометрические функции и комплексную экспоненту:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta, \quad (1.11)$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. В качестве обобщенной модели гармонического колебания с частотой ω , амплитудой A , начальной фазой Φ широко используется комплексное колебание:

$$\bar{S}(t) = \bar{A} e^{j\omega t} = A \cos(\omega t + \Phi) + jA \sin(\omega t + \Phi), \quad (1.12)$$

где $\bar{A} = A e^{j\Phi}$ – комплексная амплитуда. Амплитуда гармонического колебания равна модулю комплексной амплитуды:

$$A = |\bar{A}| = \sqrt{\bar{A} \bar{A}^*} = \sqrt{\{\operatorname{Re}[\bar{A}]\}^2 + \{\operatorname{Im}[\bar{A}]\}^2}. \quad (1.13)$$

Начальная фаза равна аргументу комплексной амплитуды:

$$\Phi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[\bar{A}]}{\operatorname{Re}[\bar{A}]}. \quad (1.14)$$

Разложение, известное как *комплексный ряд Фурье*, имеет вид:

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{A}_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (1.15)$$

Ряд представляет сумму комплексных колебаний. Комплексные амплитуды гармоник играют роль коэффициентов ряда. Если известен сигнал во времени, комплексная амплитуда гармоники выражается как

$$\bar{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (1.16)$$

Комплексный ряд Фурье можно получить, преобразуя тригонометрический ряд Фурье в форме спектрального разложения (1.8) с учетом (1.12). Косинусоидальное колебание является вещественной частью комплексного колебания (1.11). Вещественную часть можно выделить, используя операцию комплексного сопряжения

$$A \cos(\omega t + \Phi) = \operatorname{Re}[\bar{S}(t)] = \frac{1}{2} \bar{S}(t) + \frac{1}{2} \bar{S}^*(t).$$

Значок “*” означает операцию комплексного сопряжения, которая состоит в смене знака перед мнимой единицей. Выразим n -ю гармонику в ряде Фурье через комплексное колебание:

$$A_n \cos(n\omega_1 t + \Phi_n) = \frac{1}{2} \bar{A}_n e^{jn\omega_1 t} + \frac{1}{2} \bar{A}_n^* e^{-jn\omega_1 t}. \quad (1.17)$$

Чтобы найти связь комплексной амплитуды гармоники и коэффициентов тригонометрического ряда Фурье, надо представить комплексную амплитуду в виде суммы вещественной и мнимой частей, используя формулу Эйлера (1.11).

$$\bar{A}_n = A_n e^{j\Phi_n} = A_n \cos \Phi_n + jA_n \sin \Phi_n.$$

Если обратиться к выражениям (1.7), то получим:

$$\bar{A}_n = a_n - jb_n. \quad (1.18)$$

Подставляя выражения коэффициентов тригонометрического ряда Фурье (1.5), после простых преобразований получаем выражение комплексной амплитуды гармоники через сигнал (1.16). Выражения (1.13), (1.14) показывают, что для нахождения спектра периодического сигнала достаточно найти комплексные амплитуды гармоник по выражению (1.16).

Из (1.16) следует, что

$$\bar{A}_n^* = \bar{A}_{-n}. \quad (1.19)$$

Отрицательный знак номера гармоники согласно (1.9) означает, что частота становится отрицательной. Отрицательная частота не имеет физического смысла, но удобна при аналитических исследованиях. Смена знака частоты соответствует операции комплексного сопряжения для комплексного колебания.

С учетом (1.17), (1.19) ряд Фурье (1.8) примет вид:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \bar{A}_n e^{jn\omega_1 t} + \frac{1}{2} \bar{A}_n^* e^{-jn\omega_1 t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n e^{jn\omega_1 t} + \frac{1}{2} A_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{-n} e^{-jn\omega_1 t}. \end{aligned}$$

В последней сумме надо перейти к суммированию по отрицательным номерам, а затем все слагаемые объединить суммированием по всем номерам – и отрицательным, и положительным. Окончательный результат представляет комплексный ряд Фурье (1.15).

Сигнал, как комплексный ряд Фурье, и спектр, как множество комплексных амплитуд, имеют компактную форму и широко используются в теоретических исследованиях. Особенность спектра при использовании комплексного ряда

Фурье в том, что параметр “частота” принимает значения $\omega_n = n\omega_1$, где $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Как следует из (1.19), амплитудный спектр является четной функцией частоты, а фазовый – нечетной функцией:

$$|\bar{A}_n| = |\bar{A}_{-n}| ; \Phi_n = -\Phi_{-n}. \quad (1.20)$$

Физический спектр соответствует положительным частотам. На нулевой частоте физическая спектральная составляющая равна половине теоретической. Если известен спектр на положительных частотах, то спектр на отрицательных частотах получают, используя свойства (1.20). Полезно помнить, что отрицательная частота соответствует операции комплексного сопряжения для комплексного колебания, а суммирование по всем частотам приводит к вещественному сигналу во времени, что и отражает комплексный ряд Фурье [2, 3].

Результаты спектрального анализа периодической последовательности прямоугольного импульсов на основе комплексного ряда Фурье представлены в таблице 1.2 [1]. Функция, описывающая сигнал, запаздывает на $T_w/2$ относительно функции в таблице 1.1. Поэтому в выражении для комплексных амплитуд, согласно теореме запаздывания, появилась комплексная экспонента [1, 2]. Амплитудный спектр распространился и на отрицательные частоты. Фазовый спектр приобрел дополнительный фазовый сдвиг внутри каждого лепестка.

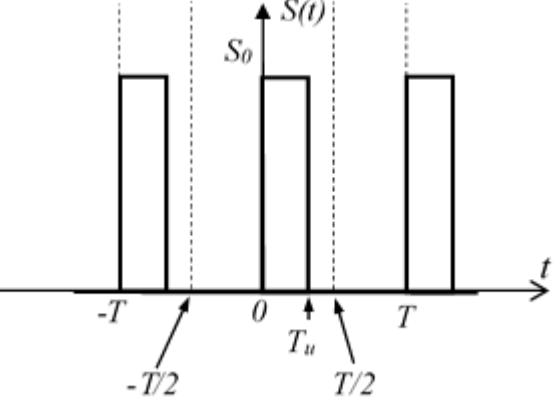
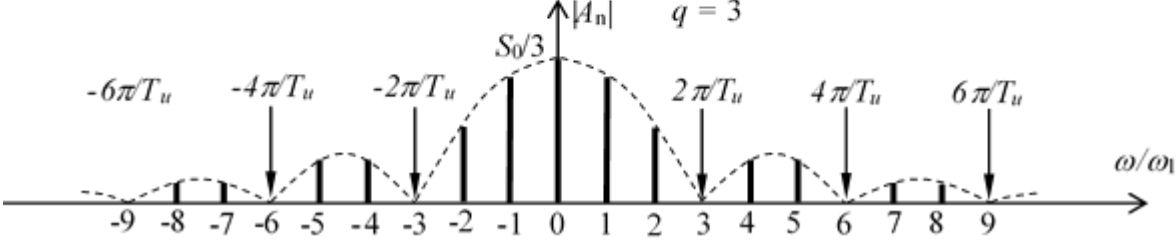
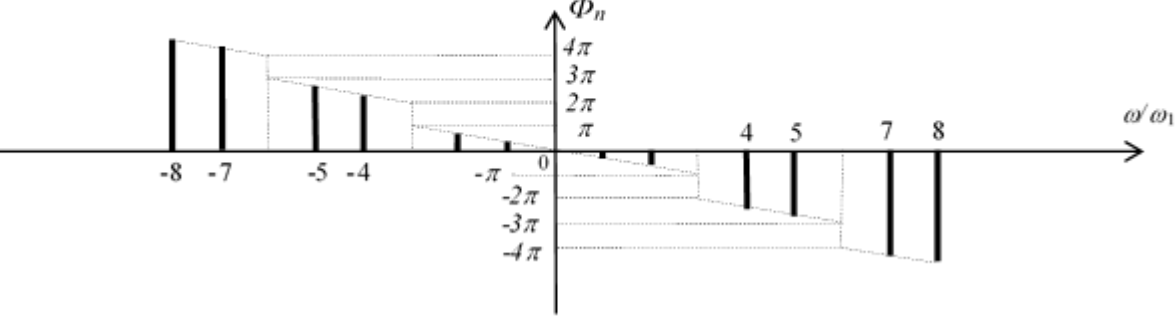
ВЫВОДЫ

- Комплексный ряд Фурье представляет взвешенную сумму комплексных экспонент как функций времени. Экспоненциальные функции удобны для ряда математических операций.
- Спектральный анализ представляет вычисление комплексных амплитуд гармоник с дальнейшим переходом к амплитудному и фазовому спектрам.
- Для спектра используются и положительные, и отрицательные частоты, но вся информация о спектре содержится на положительных частотах, которым соответствует физический спектр.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. В чем преимущество комплексного ряда Фурье перед тригонометрическим?
2. Как от комплексного ряда Фурье перейти к тригонометрическому?
3. Почему отрицательные частоты не имеют физического смысла?

Комплексный спектр периодического сигнала.

Сигнал	
	$\Pi(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_u)$ $\Pi(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 < t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq T_u \\ 0 & T_u < t < T_u/2 \end{cases}$ $S(t) = S_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi(t - nT)$
Спектр	
Комплексные амплитуды гармоник	
$\bar{A}_n = 2S_0 \frac{1 - e^{-jn\omega_1 T_u}}{jn\omega_1 T} = 2S_0 \frac{T_u}{T} \frac{\sin n\omega_1 \frac{T_u}{2}}{n\omega_1 \frac{T_u}{2}} e^{-jn\omega_1 \frac{T_u}{2}} = 2 \frac{S_0}{q} \frac{\sin n\pi / q}{n\pi / q} e^{-jn\pi / q}$	
Амплитудный спектр	
$ \bar{A}_n = 2 \frac{S_0}{q} \frac{ \sin n\omega_1 \frac{T_u}{2} }{n\omega_1 \frac{T_u}{2}} = 2 \frac{S_0}{q} \frac{ \sin n\pi / q }{n\pi / q}$	
	
Фазовый спектр	
$\Phi_n = -n\omega_1 \frac{T_u}{2} - \pi \left[\frac{n\omega_1 T_u}{2\pi} \right] = -n\pi / q - \pi \left[\frac{n}{q} \right]. \quad \left[\frac{n}{q} \right] - \text{целая часть}$	
	

2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Ряд Фурье лежит в основе спектрального анализа периодического сигнала. Теоретически периодический сигнал существует на всей оси времени и его энергия бесконечна. А если сигнал существует на конечном интервале времени, или, обобщая, имеет *конечную энергию*, можно ли для него ввести понятие спектра? Оказывается, можно, и в математическом анализе соответствующие соотношения известны как интегральные преобразования Фурье [1,2, 4, 5]:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.1)$$

$$\bar{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.2)$$

Интегральная операция (2.2) известна как **прямое преобразование Фурье**. Комплексная функция частоты $\bar{F}(\omega)$ называется *спектральной функцией*. Интегральная операция (2.1) известна как **обратное преобразование Фурье**. вещественный сигнал представляет сумму комплексных колебаний всех частот. Множество частот является непрерывным, поэтому спектр *непрерывный*.

Не претендуя на строгость доказательства для любых сигналов с конечной энергией, получим соотношения (2.1), (2.2), полагая, что конечная энергия обусловлена конечной длительностью сигнала. Одиночный сигнал можно трактовать как периодический, но с бесконечным периодом. Чтобы получить результат, надо в комплексном ряде Фурье совершить предельный переход при стремлении периода T к бесконечности. Пусть текущему значению частоты ω соответствует n -я гармоника ω_n . Тогда приращение частоты $d\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \omega_1$ и, вследствие (1.4), будет бесконечно малой величиной при бесконечно большом периоде. Комплексная амплитуда (1.15) становится бесконечно малой:

$$d\bar{A}_\omega = \frac{1}{\pi} d\omega \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.3)$$

Комплексный ряд Фурье представляет сумму бесконечно малых величин и в пределе является интегралом (2.1) по определению. Функция $\bar{F}(\omega)$ в прямом преобразовании Фурье (2.2) – предельное значение интеграла в выражении (2.3) при стремлении периода T к бесконечности. Она описывает спектр, поэтому ее называют спектральной функцией.

Представим комплексную спектральную функцию в полярной форме:

$$\bar{F}(\omega) = F(\omega)e^{j\Phi(\omega)}. \quad (2.4)$$

$F(\omega) = |\bar{F}(\omega)|$ – модуль спектральной функции называется *амплитудным спектром*. $\Phi(\omega)$ – аргумент спектральной функции – *фазовым спектром*. Вычислительные процедуры представлены соотношениями (1.12), (1.13).

Для непрерывного спектра амплитудный спектр требует уточнения. Комплексная амплитуда в выражении (2.1) на конкретной частоте

$$d\bar{A}_\omega = \frac{1}{2\pi} \bar{F}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} F(\omega)d\omega e^{j\Phi(\omega)} = dA_\omega e^{j\Phi(\omega)}.$$

Амплитуда на конкретной частоте является бесконечно малой:

$$dA_\omega = \frac{1}{2\pi} F(\omega)d\omega. \quad (2.5)$$

Главное для амплитудного спектра – это зависимость амплитуды от частоты, что полностью описывается функцией $F(\omega)$. Из (2.5) видно, функция $F(\omega)$ имеет смысл *амплитудной спектральной плотности*. Аргумент $\Phi(\omega)$ имеет смысл начальной фазы гармонического колебания с частотой ω , поэтому фазовый спектр особенностей не имеет и сохраняет свой обычный смысл.

Из (2.2) следует: $\bar{F}(-\omega) = \bar{F}^*(\omega)$. Применяв эту операцию к (2.4), получаем:

$$F(-\omega) = F(\omega), \quad \Phi(-\omega) = -\Phi(\omega). \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что амплитудный спектр является четной функцией частоты, а фазовый спектр – нечетной функцией частоты. Пример спектрального анализа сигнала приведен в таблице 2.1.

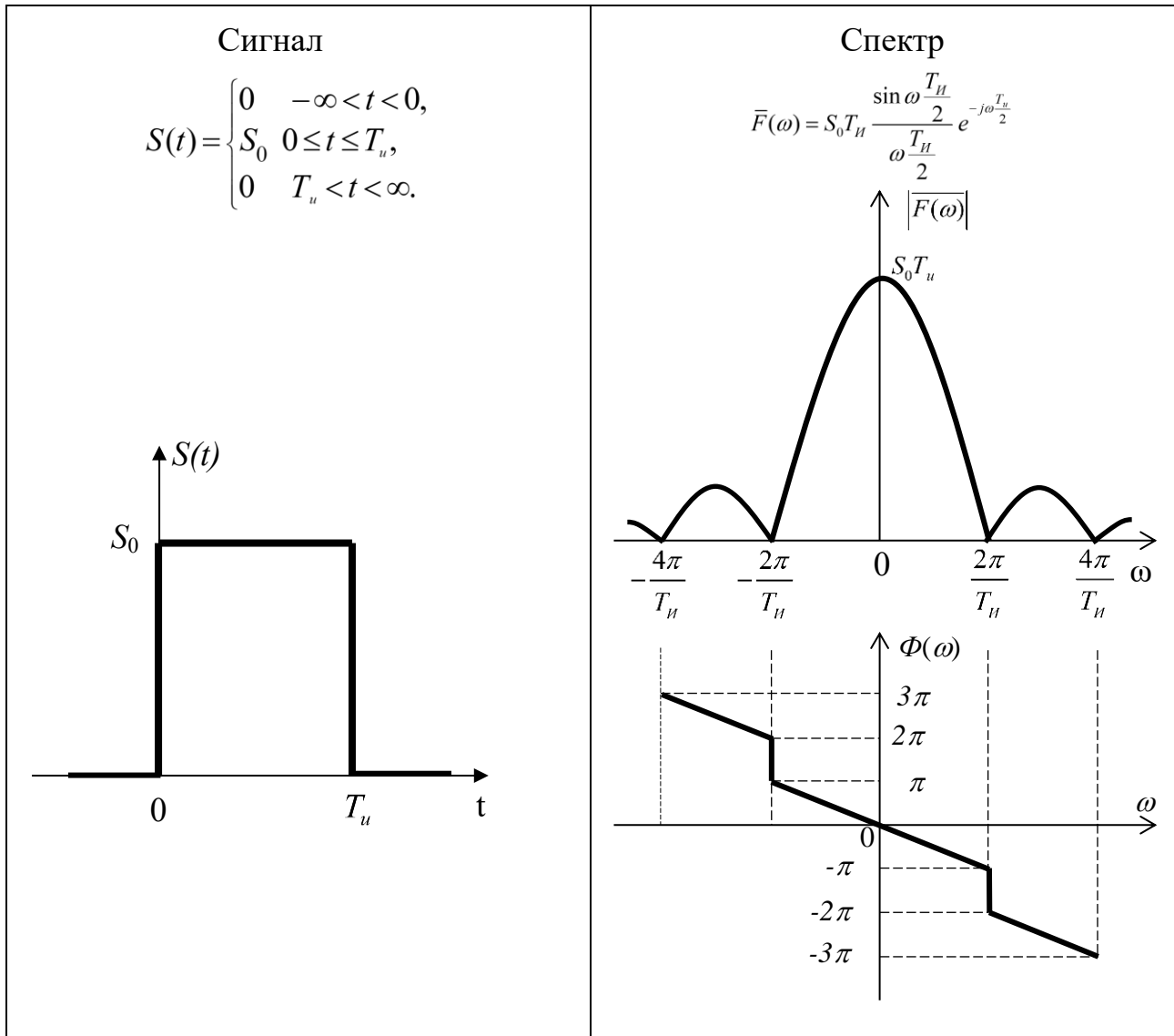
Используя (2.4), интеграл Фурье (2.1) можно записать только для положительных частот:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega)e^{j[\omega t + \Phi(\omega)]} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 F(\omega)e^{j[\omega t + \Phi(\omega)]} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \{F(\omega)e^{j[\omega t + \Phi(\omega)]} + F(-\omega)e^{j[-\omega t + \Phi(-\omega)]}\} d\omega. \end{aligned}$$

Учитывая (2.6) и используя формулу Эйлера (1.11), получим спектральное разложение в виде интеграла (B.4):

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos[\omega t + \Phi(\omega)] d\omega.$$

Одиночный симметричный импульс и его непрерывный спектр.



Парадокс этого разложения состоит в том, что для точного значения частоты, когда $d\omega=0$, амплитуда $dA_\omega = \frac{1}{\pi} F(\omega)d\omega$ также равна нулю. Однако представление амплитуды в виде дифференциала оправдано тем, что на практике нет прибора с нулевой ошибкой измерения частоты. Следовательно, аппаратурное измерение амплитуды будет происходить в некотором интервале частот, а измеренная амплитуда на конкретной частоте будет отлична от нуля [1, 2, 4,5].

ВЫВОДЫ.

- У сигнала с конечной энергией спектр существует.
- Множество частот в спектре является непрерывным и может содержать все частоты от нулевой до бесконечной.

- Амплитудный спектр описывается амплитудной спектральной плотностью.
- Для теоретического спектра используются и положительные, и отрицательные частоты, но вся информация о спектре содержится на положительных частотах, которые имеют физический смысл.
- Спектральный анализ известного во времени сигнала состоит в отыскании при помощи прямого преобразования Фурье комплексной спектральной функции, модуль и аргумент которой дадут амплитудный и фазовый спектры.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Что называют спектральной функцией?
2. Каков физический смысл спектральной плотности?
3. Какой спектр содержит информацию об энергии сигнала?

3. СПЕКТР ОТКЛИКА ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ

Как уже говорилось, для сигнала существуют две математические модели: функция времени и функция частоты (спектр). Модели взаимосвязаны преобразованиями Фурье. Выбор модели определяется решаемой задачей.

Если требуется найти отклик линейной стационарной цепи, на входе которой действует известный сигнал, то преимущество имеет частотный подход, когда сигналы задаются своими спектрами, а линейная цепь полностью определяется комплексным коэффициентом передачи $\bar{K}(\omega)$. Спектр выходного сигнала (отклика) связан со спектром входного (воздействующего) сигнала линейной алгебраической зависимостью:

- для дискретного спектра $\bar{A}_{2n} = \bar{K}(n\omega_1) \bar{A}_{1n}$; (3.1)

- для непрерывного спектра $\bar{F}_2(\omega) = \bar{K}(\omega) \bar{F}_1(\omega)$. (3.2)

Комплексный коэффициент передачи линейной цепи:

$$\bar{K}(\omega) = \frac{\bar{A}_{2\omega}}{\bar{A}_{1\omega}}. \quad (3.3)$$

\bar{A}_ω – комплексная амплитуда на частоте ω (индекс ω обычно опускается). Индекс 1 традиционно относится к входному сигналу, индекс 2 – к выходному. Комплексный коэффициент передачи в показательной форме:

$$\bar{K}(\omega) = K(\omega)e^{j\Phi_K(\omega)}. \quad (3.4)$$

$K(\omega)$ – модуль комплексного коэффициента передачи. Он равен отношению выходной амплитуды гармонического сигнала к входной и называется амплитудным коэффициентом передачи. Зависимость амплитудного коэффициента передачи от частоты называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) цепи. $\Phi_K(\omega)$

– аргумент комплексного коэффициента передачи представляет сдвиг фаз, вносимый цепью. Зависимость сдвига фаз от частоты называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) цепи. Если известна принципиальная схема цепи, частотные характеристики можно рассчитать, например, методом комплексных амплитуд. Частотные характеристики можно измерить экспериментально.

Возвращаясь к (3.1), (3.2), видим, что поиск спектра выходного сигнала сводится к перемножению двух комплексных функций. Как следствие, амплитудный спектр выходного сигнала есть результат перемножения амплитудного спектра входного сигнала и АЧХ линейной цепи

$$A_{2n} = K(n\omega_1) A_{1n}; \quad (3.5)$$

$$F_2(\omega) = K(\omega) F_1(\omega); \quad (3.6)$$

а фазовый спектр выходного сигнала представляет сумму фазового спектра входного сигнала и ФЧХ линейной цепи

$$\Phi_{2n} = \Phi_K(n\omega_1) + \Phi_{1n}; \quad (3.7)$$

$$\Phi_2(\omega) = \Phi_K(\omega) + \Phi_1(\omega). \quad (3.8)$$

Если появляется необходимость изменить спектр сигнала, соотношения (3.1), (3.2) показывают, какую линейную цепь с требуемыми частотными характеристиками надо синтезировать. В частности, это осуществляется при построении частотных фильтров [1 – 7].

Простота и фундаментальность алгебраических соотношений (3.5) – (3.8) привела к тому, что многие радиоспециалисты предпочитают анализировать обработку сигналов частотными методами, а не временными, когда приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями или с интегралом Дюамеля [1, 2]. Поэтому соотношения (3.5) и (3.6) часто называют «Основным соотношением линейной радиотехники».

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Каково практическое значение связи входного и выходного спектров линейной цепи?
2. Какие яркие примеры практического применения «Основного соотношения линейной радиотехники» можно привести?

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Из теории рядов Фурье известно равенство Парсеваля для тригонометрического ряда Фурье

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (4.1)$$

для комплексного ряда Фурье

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t) dt = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{A}_n \bar{A}_n^* . \quad (4.2)$$

Если сигнал представлен в форме спектрального разложения (1.8), равенство Парсеваля принимает вид:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S^2(t) dt = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \quad (4.3)$$

Левая часть равенства Парсеваля представляет среднюю за период мощность периодического сигнала. В правой части равенства средняя за период мощность выражается через амплитудный спектр. Легко проверить, что средняя за период мощность гармонического сигнала:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \cos^2(\omega t + \Phi) dt = \frac{1}{2} A^2 .$$

Из равенства Парсеваля следует, что средняя за период мощность сигнала равна мощности постоянной составляющей плюс сумма средних мощностей гармоник

$$\langle P \rangle = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle P_n \rangle . \quad (4.4)$$

Для сигнала с непрерывным спектром аналогом равенства Парсеваля является равенство Рэлея:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\omega) \bar{F}^*(\omega) d\omega . \quad (4.5)$$

Энергия сигнала (В.1) определяется амплитудным спектром. С учетом четности амплитудного спектра равенство Рэлея принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F^2(\omega) d\omega. \quad (4.6)$$

Энергию вещественного сигнала можно найти, если известен либо сигнал во времени, либо его физический амплитудный спектр [1–3].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Какой фундаментальный вывод следует из равенства Парсеваля для сигнала с дискретным спектром?
2. Какой фундаментальный вывод следует из равенства Рэлея для сигнала с непрерывным спектром?

5. ШИРИНА СПЕКТРА СИГНАЛА

Ширина спектра является одним из важнейших числовых параметров сигнала. Физически реализуемый сигнал всегда имеет конечную протяженность во времени. Его спектр теоретически занимает частоты от нуля до бесконечности. Однако практика показывает, а теория обосновывает, что для удовлетворительного описания сигнала достаточно учесть спектр в конечном интервале частот $f_n < f < f_b$, который и называют «шириной спектра» сигнала. Частоты f_n – нижняя и f_b – верхняя граничные частоты интервала соответственно.

Шириной спектра сигнала называется интервал частот $\Delta f = f_b - f_n$, в котором содержится не менее 90% энергии (мощности) сигнала.

Для оценки ширины спектра используется амплитудный спектр, так как он определяет энергию (4.6) и среднюю мощность (4.3) сигнала, однако до сих пор нет единого критерия для этой оценки. Но для любого критерия, используемого на практике, доля энергии (мощности) сигнала, которая содержится в Δf , составляет не менее 90% от всей энергии (мощности) сигнала. Приведем три наиболее распространенных критерия для оценки ширины спектра. Для получения количественных соотношений используется амплитудный непрерывный спектр.

• Первый критерий, который часто называют энергетическим, определяет граничные частоты из уравнения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_n}^{\omega_b} |\overline{F}(\omega)|^2 d\omega = \alpha E, \quad (5.1)$$

где $E = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_n}^{\omega_b} |\overline{F}(\omega)|^2 d\omega$ – энергия сигнала (4.6), α – заданная константа в интервале $0.9 \leq \alpha < 1$. Если $\omega_n \neq 0$, то должно выполняться условие

$$\left| \overline{F}(\omega_H) \right| = \left| \overline{F}(\omega_B) \right|. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) имеет ясный смысл: в интервале частот от ω_H до ω_B содержится заданная доля α всей энергии сигнала. Если величина α не оговаривается, то считается $\alpha = 0,9$. Ширина спектра в этом случае называется *активной*.

• Второй критерий можно назвать критерием заданного уровня. На частотах вне ширины спектра $\omega < \omega_H$ и $\omega_B < \omega$ спектральные составляющие не должны превышать заданный граничный уровень:

$$\left| \overline{F}(\omega) \right| < F_{zp}. \quad (5.3)$$

Спектральные составляющие, превышающие граничный уровень $\left| \overline{F}(\omega) \right| > F_{zp}$, могут присутствовать только в диапазоне частот, соответствующем ширине спектра. Если уровень F_{zp} не оговаривается, то обычно задается как $F_{zp} = 0,1 F_{max}$, где F_{max} – абсолютный максимум амплитудного спектра $\left| \overline{F}(\omega) \right|$. Если неравенство (5.4) превратить в равенство

$$\left| \overline{F}(\omega) \right| = F_{zp}, \quad (5.4)$$

то получим алгебраическое уравнение относительно частот. Минимальный корень ω_F равен *нижней* граничной частоте спектра ω_H , максимальный корень ω_F равен *верхней* граничной частоте ω_B . Решение уравнения (5.4) чаще всего осуществляется графическим методом, применение которого показано на рисунке 5.1.

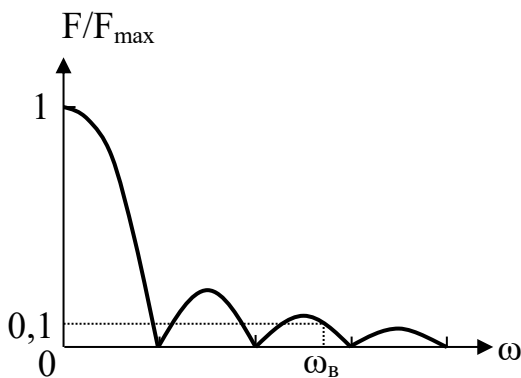


Рис. 5.1. Оценка ширины спектра по уровню $0,1 F_{max}$.

На графике амплитудного спектра проводят отрезок прямой $\left| \overline{F} \right| = F_{zp}$. Точкам пересечения графика спектра и прямой соответствуют частоты, которые являются корнями уравнения (5.4). Определяются граничные значения ω_B и ω_H и ширина спектра сигнала $\Delta\omega$.

• Третий критерий применяется, когда амплитудная спектральная плотность обращается в нуль на некоторых частотах. Граничные частоты выбираются из положительных частот, на кото-

рых наблюдаются *нули амплитудной спектральной плотности*. Ярким примером применения этого критерия может служить определение ширины спектра прямоугольного импульса (таблица 2.1). Нижняя граничная частота $\omega_H = 0$, а верхняя

граничная частота выбирается как частота первого нуля амплитудной спектральной плотности: $\omega_c \frac{T_H}{2} = \pi$. Ширина спектра для прямоугольного импульса:

$$\Delta f = \frac{1}{T_H} . \quad (5.5)$$

По соотношению (5.5) можно оценить долю энергии прямоугольного импульса, которая содержится в первом лепестке амплитудного спектра. Численный расчет дает $\alpha_1 = 0,902$. Легко видеть, что первый нуль спектральной плотности определяет активную ширину спектра прямоугольного импульса.

Интересно отметить, что ширина спектра по уровню $0,1F_{max}$ приблизительно равна частоте третьего нуля спектральной плотности: $\Delta f = \frac{3}{T_H}$. Числен-

ный расчет дает доли энергии прямоугольного импульса в ширине спектра по уровню $\alpha_{0,1} = 0,964$, а по третьему нулю $\alpha_3 = 0,967$.

Соотношение (5.5) часто используется для оценки ширины спектра импульса малой длительности T_H , несмотря на то, что его форма может отличаться от прямоугольной [1, 2].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Что будет происходить с формой прямоугольного импульса, если его спектр последовательно ограничивать частотой третьего нуля, частотой второго нуля и, наконец, частотой первого нуля?

6. СВЯЗЬ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРОВ

Для простоты рассмотрения сигнал с конечной энергией представим в виде одиночного импульса $S_1(t)$, отличного от нуля на интервале времени $t_1 < t < t_2$. Импульс имеет конечную длительность

$$T_H = t_2 - t_1. \quad (6.1)$$

Спектр одиночного импульса непрерывный. Спектральная функция (2.2) с учетом свойств интеграла примет вид:

$$\bar{F}(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} S_1(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6.2)$$

Периодическая последовательность таких же импульсов с периодом $T \geq T_H$ имеет дискретный спектр. Комплексная амплитуда (1.16) с учетом свойств интеграла примет вид

$$\bar{A}_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} S_1(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (6.3)$$

Видно, что интеграл в выражении (6.3) равен спектральной функции (6.2) для частот $\omega = n\omega_1$. Следовательно, комплексную амплитуду можно выразить через спектральную функцию:

$$\bar{A}_n = \frac{2}{T} \bar{F}(n\omega_1) = \frac{1}{\pi} \omega_1 \bar{F}(n\omega_1). \quad (6.4)$$

Комплексная амплитуда n -ой гармоники пропорциональна отсчету спектральной функции на частоте $n\omega_1$. Коэффициент пропорциональности – постоянная размерная величина, которая однозначно определяется периодом сигнала.

Получен важный результат: формирование во времени периодической последовательности одиночных импульсов приводит к равномерной дискретизации непрерывного спектра одиночного импульса с интервалом частот, равным $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

Этот вывод иллюстрируют графики на рисунке 6.1. На рисунке 6.1а показан одиночный импульс и его спектральная диаграмма. Периодические последовательности импульсов и соответствующие им спектральные диаграммы показаны на рисунках 6.1б, в. Сигнал $S(t)$ на рисунке 6.1в известен как периодическое продолжение сигнала $S_1(t)$. Начало отсчета времени на графиках выбрано в середине интервала (t_1, t_2) [3]. Выражение (6.4) получено для периода T большего или равного длительности импульса T_H . Замечательно то, что дискретизация непрерывного спектра одиночного сигнала происходит и при $T < T_H$ (рисунок 6.1г). Чтобы это показать, надо периодический сигнал трактовать как сумму одиночных сигналов, сдвинутых относительно друг друга во времени на интервал T :

$$S(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_1(t - mT). \quad (6.5)$$

При $T < T_H$ одиночные сигналы перекрываются. На периоде T присутствует часть сигнала $S_1(t)$ и “хвосты” $S_1(t)$ соседних периодов. Комплексная амплитуда (1.15) с учетом (6.5) приобретает вид

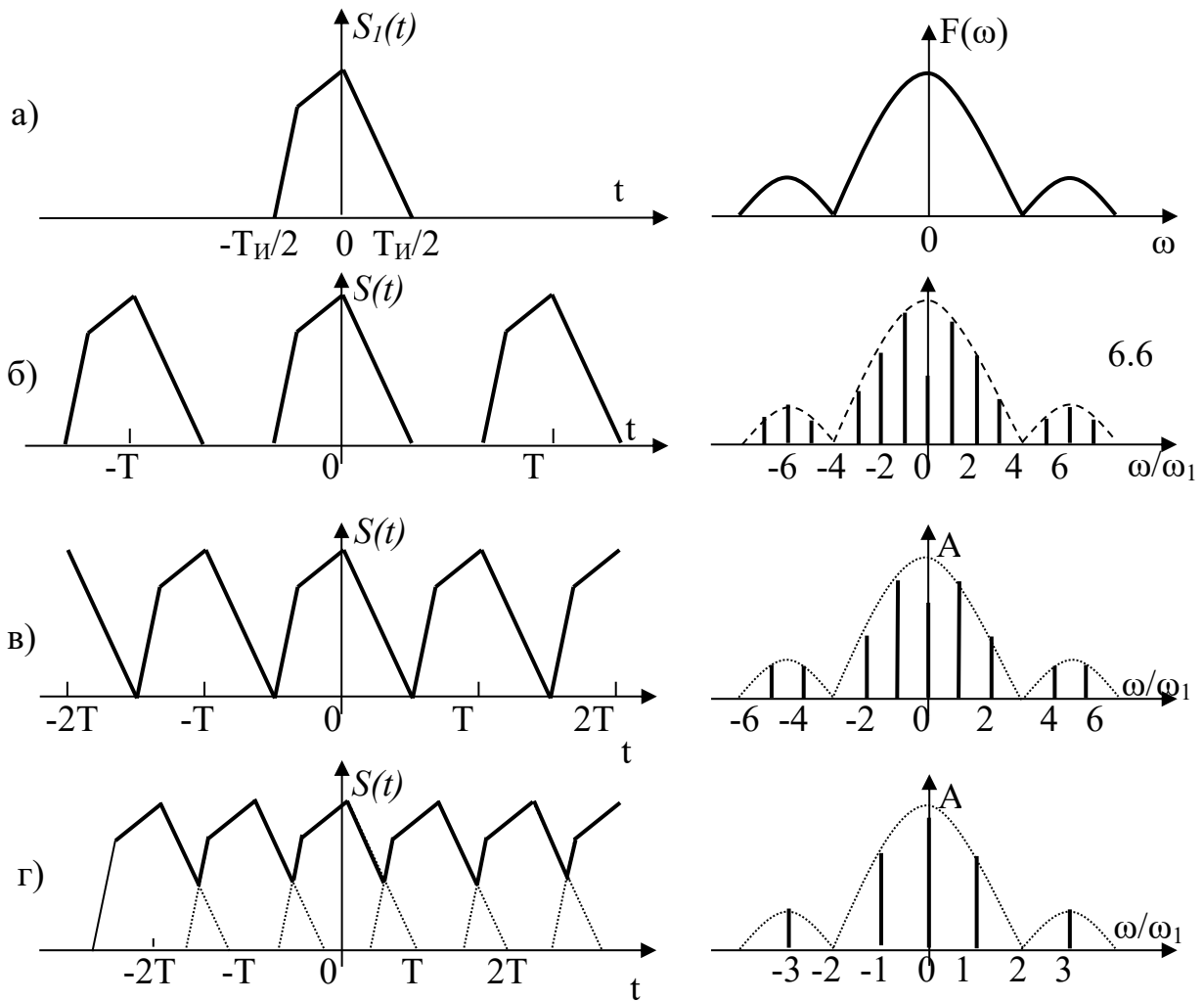


Рис. 6.1. Сигналы и их амплитудные спектры. Одиночный импульс $S_I(t)$ с длительностью T_H (а), периодическая последовательность импульсов с периодом $T > T_H$ (б), периодическое продолжение одиночного импульса $T = T_H$ (в) и периодический сигнал как сумма одиночных импульсов с периодом $T < T_H$ (г).

$$\begin{aligned} \bar{A}_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} S_1(t - mT) \right] e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S_1(t - mT) e^{-jn\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_1 mT} \int_{-\frac{T}{2} + mT}^{\frac{T}{2} + mT} S_1(\xi) e^{-jn\omega_1 \xi} d\xi \end{aligned}$$

Для периодического сигнала $\omega_1 T = 2\pi$ и n и m – целые числа, следовательно, комплексная экспонента перед интегралом равна 1. Сумму интегралов надо заменить одним интегралом и учесть (6.2):

$$\bar{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\xi) e^{-jn\omega_1 \xi} d\xi = \frac{2}{T} \bar{F}(n\omega_1). \quad (6.7)$$

Полученное выражение повторяет (6.4). Общий итог: если периодический во времени сигнал образован бесконечной суммой одиночных импульсов, сдвинутых относительно друг друга на интервал T , то его спектр получают равномерной дискретизацией с частотным интервалом $\Delta\omega = \omega_1 = 2\pi/T$ непрерывной спектральной функции одиночного импульса и умножением на постоянный размерный коэффициент ω_1/π .

Восстановление формы одиночного импульса с помощью ряда Фурье возможно только тогда, когда период T больше или равен длительности импульса T_H . Если $T < T_H$, восстановить точно одиночный импульс невозможно. Если сигнал с конечной энергией существует на бесконечном интервале времени, вводят числовой параметр – длительность сигнала T_H , указав соответствующий критерий. Восстановление формы одиночного сигнала будет неточным, но близким, если период $T \geq T_H$.

Дискретный спектр периодической последовательности импульсов определяется однозначно по непрерывному спектру одиночного импульса. Обратная операция (получение спектральной функции одиночного импульса по известному дискретному спектру) не является однозначной. На практике приближенное значение спектральной функции получают путем линейной интерполяции дискретного спектра. Чем меньше интервал дискретизации по частоте ω_1 (чем больше период T), тем точнее приближенная огибающая к спектральной функции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Почему невозможно восстановить форму импульса, если период следования меньше длительности импульса?

7. СПЕКТР ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА

Дискретный сигнал $S[k]$ можно рассматривать как последовательность отсчетов аналогового сигнала $S(t)$ в моменты времени $t_k = k\Delta t$, где k – номер отсчета, Δt – постоянный временной интервал [4, 5]. Формирование дискретного сигнала из аналогового называется *дискретизацией* сигнала. Аппаратурная реализация дискретизации осуществляется, например, в аналого-цифровом преобразователе (АЦП). Ниже по необходимости будут использоваться равноценные обозначения

$$S_k = S[k] = S(k\Delta t), \quad (7.1)$$

где k —целые числа, которые меняются от $-\infty$ до $+\infty$.

Спектр дискретного сигнала описывается комплексной спектральной функцией, которая выражается через значения сигнала:

$$\bar{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{-j\omega k\Delta t}. \quad (7.2)$$

Спектральная функция является непрерывной и периодической $\bar{f}(\omega) = \bar{f}(\omega + \Omega)$ с периодом

$$\Omega = \frac{2\pi}{\Delta t} \quad (7.3)$$

Периодичность спектральной функции следует из периодичности комплексной экспоненты:

$$e^{j(\omega+\Omega)k\Delta t} = e^{j(\omega k\Delta t + k\Omega\Delta t)} = e^{j\omega k\Delta t}, \text{ если } \Omega\Delta t = 2\pi.$$

Вследствие периодичности спектральной функции вся информация о спектре содержится на периоде Ω . Если выбрать период на частотном интервале $(-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2})$, то для вещественного сигнала достаточно знать спектр на положительных частотах, так как спектр на отрицательных частотах связан со спектром на положительных частотах соотношениями (2.6). Если период выбирается на положительных частотах в интервале $(0, \Omega)$, то физический спектр по-прежнему соответствует интервалу $(0, \frac{\Omega}{2})$, а спектр на интервале $(\frac{\Omega}{2}, \Omega)$ представляет спектр на отрицательных частотах.

Дискретный сигнал выражается через спектральную периодическую функцию:

$$S_k = \frac{1}{\Omega} \int_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} \bar{f}(\omega) e^{j\omega k\Delta t} d\omega = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \bar{f}(\omega) e^{j\omega k\Delta t} d\omega. \quad (7.4)$$

Не проводя строгого доказательства (7.2) и (7.4), отметим, что они следуют из свойства дуальности интегральных преобразований Фурье (2.1), (2.2) (смотри в приложении таблицу П1).

Дуальность состоит в том, что замена ω на t , а $-t$ на $-\omega$ сохраняет пару интегральных преобразований Фурье, причем спектральная функция

становится функцией времени, а функция, описывающая сигнал, становится функцией частоты.

Выше было показано, что периодизация одиночного сигнала во времени приводит к дискретизации спектральной функции с интервалом дискретизации по частоте (1.4). Из дуальности интегрального преобразования Фурье следует, что периодизация спектральной функции по частоте с периодом Ω (дуальный параметр T) должна приводить к дискретизации сигнала во времени с интервалом Δt (дуальный параметр ω_l):

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (7.5)$$

Выражение спектральной функции (7.2) является дуальным комплексному ряду Фурье (1.14), в котором дискретную частоту ω_l заменили дискретным временем Δt , а непрерывное время t заменили непрерывной частотой $-\omega$. Выражение (7.4) для дискретного сигнала является дуальным выражению для коэффициентов ряда Фурье. Учитывается то, что этот коэффициент равен $1/2$ комплексной амплитуды (1.15). Влияние дискретизации одиночного аналогового сигнала во времени на спектр иллюстрируется рисунком 7.1. Дискретизации сигнала соответствует формированию периодической спектральной функции как суммы спектральных функций одиночного сигнала, сдвинутых относительно друг друга по оси частот на период Ω (смотри дуальное выражение (6.5) с учетом (6.4)):

$$\bar{f}(\omega) = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{F}(\omega - m\Omega). \quad (7.6)$$

Если спектральные функции $\dots, \bar{F}(\omega - \Omega), \bar{F}(\omega), \bar{F}(\omega + \Omega), \dots$ на периоде $-\frac{\Omega}{2} < \omega < \frac{\Omega}{2}$ перекрываются, то на этом периоде $\bar{f}(\omega) \neq \Omega \bar{F}(\omega)$. Как следствие, одиночный аналоговый сигнал и аналоговый сигнал, полученный обратным преобразованием Фурье (24) на периоде $-\frac{\Omega}{2} < \omega < \frac{\Omega}{2}$, не совпадают.

Котельников В.А. показал, что аналоговый сигнал восстанавливается точно по своим отсчетам $S(k\Delta t)$, если спектр $\bar{F}(\omega)$ одиночного аналогового сигнала не содержит частот $|\omega| > \omega_b$ и интервал отсчета

$$\Delta t \leq \pi/\omega_b. \quad (7.7)$$

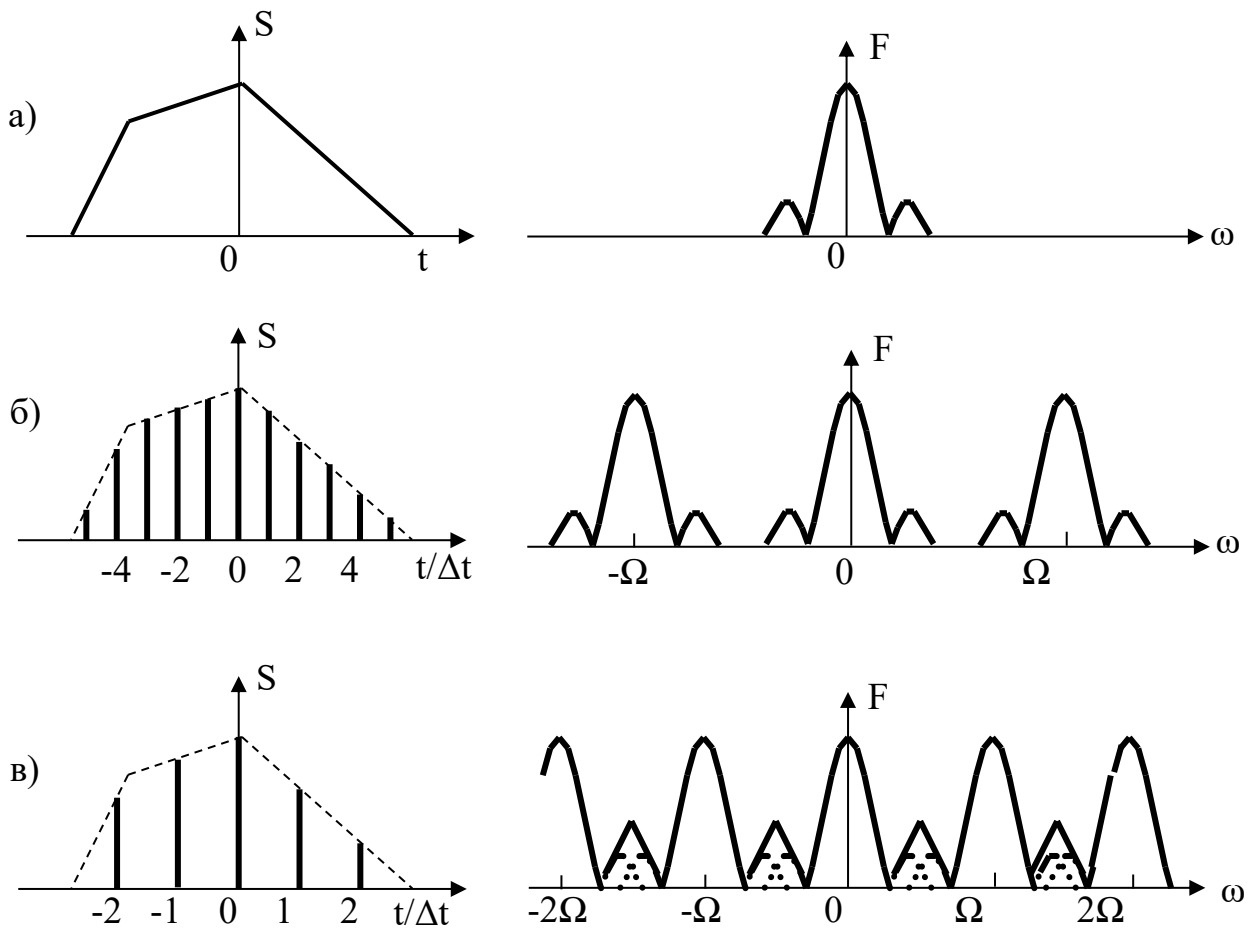


Рис. 7.1. Сигналы и их амплитудные спектры.

Аналоговый импульс с верхней граничной частотой спектра ω_g (а), импульс, дискретизированный с интервалом $\Delta t \leq \pi/\omega_g$ (б), импульс, дискретизированный с интервалом $\Delta t > \pi/\omega_g$ (в).

Если сравнить (7.5) и (7.7), то точное восстановление аналогового сигнала возможно, если период спектральной функции дискретизированного сигнала $\Omega \geq 2\omega_g$. Последнее условие согласуется с общим требованием: спектры одиночных импульсов в (7.6) не должны перекрываться.

Выражение (7.7) можно представить через частоту в герцах

$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_g}. \quad (7.8)$$

Частота дискретизации $f_{\text{дискр.}} = 2f_g$ известна как частота Найквиста.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. При соблюдении каких условий и почему возможно восстановление формы аналогового сигнала по его дискретным отсчетам?

8. СПЕКТР ДИСКРЕТНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Спектр дискретного периодического сигнала находят с помощью операции, которая известна как дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Запишем выражение ДПФ в виде, которое чаще всего встречается в литературе:

$$\bar{X}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}, \quad (8.1)$$

где $x[k]$ – дискретный сигнал. Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) позволяет найти отсчет сигнала на периоде во времени:

$$x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{X}[n] e^{j \frac{2\pi nk}{N}}. \quad (8.2)$$

Чтобы обосновать эти соотношения, воспользуемся свойствами спектров, рассмотренных выше. Формирование периодического сигнала из одиночных сигналов приводит к дискретизации непрерывного спектра с интервалом частот (1.4) (рисунок 2). Если периодический сигнал образуется суммой одиночных дискретных сигналов, сдвинутых во времени на период T , то период полагают равным целому числу интервалов отсчета во времени:

$$T = N \Delta t. \quad (8.3)$$

Для дискретного периодического сигнала спектр становится не только периодическим с периодом (7.3), но и дискретным по частоте с дискретом (1.4). Рисунок 8.1 иллюстрирует преобразование сигнала во времени и его спектр.

Дискрет по частоте (1.4) связан с периодом во времени, а период по частоте связан с дискретом во времени (7.3):

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t} = \frac{\Omega}{N}. \quad (8.4)$$

Из (8.3) и (8.4) следует:

$$N = \frac{T}{\Delta t} = \frac{\Omega}{\omega_1}.$$

У дискретного преобразования Фурье число отсчетов на интервале периода во времени и число отсчетов на интервале периода по частоте одинаково.

Если из одиночных дискретных сигналов сформировать периодический дискретный сигнал аналогично процедуре, представленной на рисунке 6.1, то непрерывный спектр дискретного сигнала (7.2) должен дискретизироваться с учетом (8.4):

$$\bar{f}(n\omega_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{-j\frac{2\pi n}{N}k}. \quad (8.5)$$

В дискретном преобразовании Фурье традиционно начальный номер отсчета на периоде равен нулю, а конечный равен $(N-1)$. На одиночном дискретном сигнале выделим интервалы, равные $T = N\Delta t$. Если N_H – число отсчетов на одиночном дискретном сигнале (дискретная длительность сигнала) и $N < N_H$, выражение (8.5) представим в виде, аналогичном (6.5):

$$\begin{aligned} \bar{f}(n\omega_1) = & \dots + \sum_{k=0}^{N-1} S_1[k-N] e^{-j\frac{2\pi n}{N}(k-N)} + \sum_{k=0}^{N-1} S_1[k] e^{-j\frac{2\pi n}{N}k} + \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} S_1[k+N] e^{-j\frac{2\pi n}{N}(k+N)} + \dots \end{aligned}$$

Комплексная экспонента по переменной k является периодической с периодом N . Тогда

$$\bar{f}(n\omega_1) = \sum_{k=0}^{N-1} \{ \dots + S_1[k-N] + S_1[k] + S_1[k+N] + \dots \} e^{-j\frac{2\pi n}{N}k}. \quad (8.6)$$

Обозначим

$$x[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_1[k+mN]. \quad (8.7)$$

Если число отсчетов одиночного дискретного сигнала $N_H < N$, то отсутствуют “хвосты” одиночного сигнала от соседних периодов и $m=0$. Если $N_H > N$, одиночные сигналы перекрываются, тогда $m \neq 0$. Отметим, что правая часть (8.6) не зависит явно от ω_1 . Введем обозначение

$$\bar{X}[n] = \bar{f}(n\omega_1). \quad (8.8)$$

В результате выражение (8.6) принимает вид дискретного преобразования Фурье (8.1). Переменная $n > 0$, поэтому частоты на периоде только положительные.

Чтобы получить обратное дискретное преобразование Фурье, надо обратиться к комплексному ряду Фурье (1.14) и выполнить дискретизацию по времени с учетом (8.4):

$$S(k\Delta t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{A}_n e^{j \frac{2\pi nk}{N}}. \quad (8.9)$$

Спектр аналогового периодического во времени сигнала представляет результат дискретизации непрерывного спектра одиночного сигнала (рисунок 6.1) и учитывается (6.4) связь дискретной составляющей спектра со спектральной функцией. Это свойство должно выполняться и для дискретного периодического сигнала:

$$S(k\Delta t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_1}{\pi} \bar{F}(n\omega_1) e^{jn\omega_1 k\Delta t}. \quad (8.10)$$

Но для дискретного сигнала спектр должен быть периодическим (7.6) с периодом (7.3). Для дискретного периодического сигнала, как следует из (8.4), этот период равен $\Omega = N\omega_1$. Выражение (8.10) представим в виде суммы слагаемых на частотных периодах:

$$\begin{aligned} S(k\Delta t) = & \dots + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\omega_1}{2\pi} \bar{F}[(n-N)\omega_1] e^{j \frac{2\pi(n-N)k}{N}} + \\ & + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\omega_1}{2\pi} \bar{F}(n\omega_1) + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\omega_1}{2\pi} \bar{F}[(n+N)\omega_1] e^{j \frac{2\pi(n+N)k}{N}} + \dots \end{aligned}$$

Комплексная экспонента по переменной n является периодической с периодом N . Тогда выражение для $S(k\Delta t)$ примет вид

$$S(k\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{N\omega_1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{F}[(n-mN)\omega_1] \right\} e^{j \frac{2\pi nk}{N}}.$$

Выражение справа не зависит от Δt в явном виде. Выражение в фигурных скобках представляет дискретизированную спектральную функцию (7.6) с периодом $\Omega = N\omega_1$, для которой введено обозначение (8.8). Частоты спектральных составляющих на периоде Ω только положительные и включают нулевую частоту. Окончательный результат представлен обратным преобразованием Фурье (8.2) [5, 6, 7]. Результаты иллюстрируются рисунком 8.1.

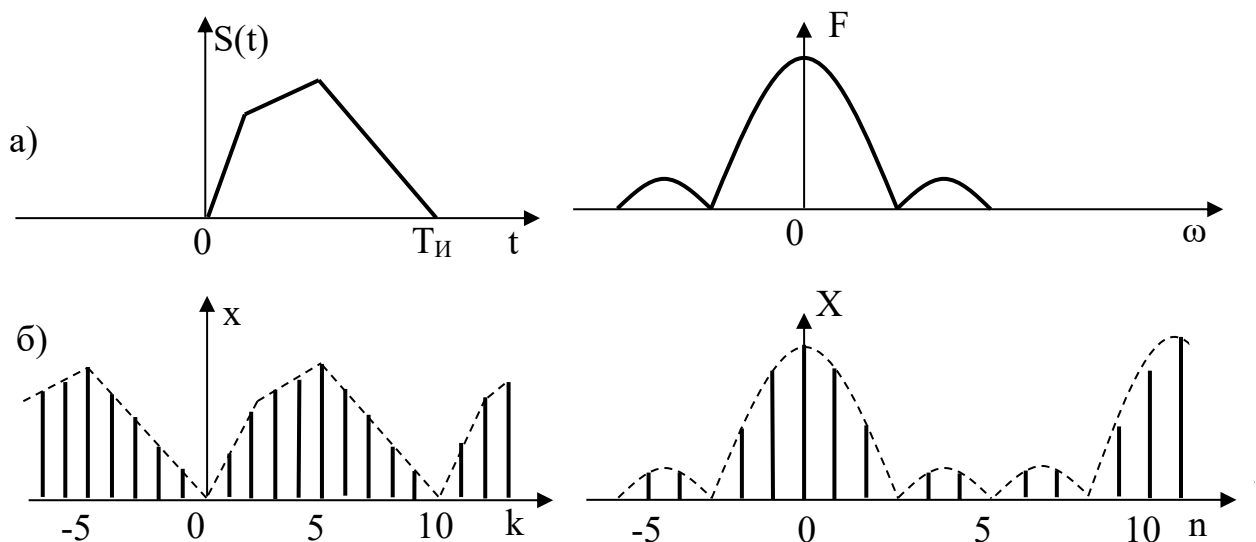


Рис. 8.1 Сигналы и их спектры. Одиночный импульс (а), дискретизированный, периодически продолженный импульс (б)

ВЫВОДЫ

- В формулах для ДПФ и ОДПФ отсутствуют размерные интервалы отсчета Δt и ω_l . Аргументами функций являются целые положительные числа – номера отсчетов. Это послужило причиной широкого использования ДПФ для цифровой обработки сигналов с помощью компьютеров. Были разработаны программы, существенно уменьшившие время обработки и известные как быстрое преобразование Фурье (БПФ).
- Спектр и сигнал имеют одинаковую размерность.
- Спектр является дискретным, периодическим. Рабочий период начинается с частоты, равной θ . Остальные частоты на периоде положительные. Для вещественного дискретного сигнала результат ДПФ является комплексной дискретной функцией. Комплексный спектр предполагает использование отрицательных частот (отрицательных номеров отсчета). Отрицательным частотам соответствуют положительные частоты на втором полупериоде спектра.

В заключение надо отметить, что современный спектральный анализ в радиочастотном диапазоне представляет цифровую обработку сигнала, основанную на ДПФ и последующем выводе результатов в виде, удобном для потребителя. Знание особенностей и ограничений ДПФ позволит избежать ошибок при осмыслении наблюдаемых результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов / С.И. Баскаков. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Высшая школа, 2000. – 462 с.
2. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учебник для вузов / И.С. Гоноровский. – 4-е изд. перераб. и доп. – Москва: Радио и связь. – 1986. – 512 с.
3. Харкевич, А. А. Основы радиотехники / Харкевич А.А., – 3-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 512 с.: ISBN 978-5-9221-0790-7. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/945086> (дата обращения: 12.01.2023). – Режим доступа: по подписке.
4. Гадзиковский, В. И. Цифровая обработка сигналов : учебное пособие / В. И. Гадзиковский. – Москва: СОЛОН-ПРЕСС, 2020. – 766 с. – ISBN 978-5-91359-117-3. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1858810> (дата обращения: 12.01.2023). – Режим доступа: по подписке.
5. Марьев, А. А. Методы и устройства цифровой обработки сигналов. Дискретизация. Квантование. Цифровой анализ сигналов: учебное пособие / А. А. Марьев ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2020. – 132 с. – ISBN 978-5-9275-3608-5. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/1894454> (дата обращения: 12.01.2023). – Режим доступа: по подписке.
6. Подлесный, С. А. Устройства приема и обработки сигналов: учебное пособие / С. А. Подлесный, Ф. В. Зандер. - Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011. – 352 с. – ISBN 978-5-7638-2263-2. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/441113> (дата обращения: 12.01.2023). – Режим доступа: по подписке.
7. Поляков, В. Т. Техника радиоприема: простые приемники АМ сигналов [Электронный ресурс] / В. Т. Поляков. – Москва: ДМК Пресс, 2008. – 256 с.: ил. – (В помощь радиолюбителю). – ISBN 5-94074-056-1. – Текст: электронный. – URL: <https://znanium.com/catalog/product/406744> (дата обращения: 12.01.2023). – Режим доступа: по подписке.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В таблице П.1 приведены свойства непрерывного спектра, доказательство которых проводится в курсе математического анализа. Список свойств не является полным. Приведены свойства, которые лежат в основе обработки сигналов. Важно подчеркнуть, что перечисленные свойства сохраняют свою сущность для всех типов сигналов, хотя и требуют уточнения формулировок для конкретных их типов.

Таблица П.1.

Свойства спектра.

Название свойства	$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$\bar{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt$
Аддитивность	$S_1(t) + S_2(t)$	$\bar{F}_1(\omega) + \bar{F}_2(\omega)$
Однородность	$\alpha S(t)$	$\alpha \bar{F}(\omega)$
Дуальность	$\bar{F}(t)$	$2\pi S(-\omega)$
Подобие	$S(\mu t)$	$\frac{1}{ \mu } \bar{F}\left(\frac{\omega}{\mu}\right)$
Запаздывание (сдвиг во времени)	$S(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} \bar{F}(\omega)$
Смещение (сдвиг по частоте)	$S(t) e^{j\omega_0 t}$	$\bar{F}(\omega - \omega_0)$
Дифференцирование сигнала	$\frac{dS}{dt}$	$j\omega \bar{F}(\omega)$
Интегрирование сигнала	$\int_{-\infty}^t S(\tau) d\tau$	$\bar{F}(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \bar{F}(\omega)$
Свертка сигналов	$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\tau) S_2(t - \tau) d\tau$	$\bar{F}_1(\omega) \bar{F}_2(\omega)$
Произведение сигналов	$S_1(t) S_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_1(\nu) \bar{F}_2(\omega - \nu) d\nu$